Ampliación de Álgebra y Geometría

Bibliografía:

- Ampliación de Álgebra Lineal y Geometría 2016–17, Claudi Busqué Roca, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia.

Capítulo 1

Introducción a las cónicas

Un **doble cono recto** es la figura obtenida al girar una recta g alrededor de una recta h, llamada **eje**, que la corta en un solo punto, el **vértice**. La recta g y las que se obtienen al girar g alrededor del eje se llaman **generatrices**. Una (**sección**) **cónica** es la intersección de un doble cono recto con un plano que lo corta. Secciones cónicas **no degeneradas**:

- **Circunferencia**: El plano es perpendicular al eje y no pasa por el vértice.
- **Elipse**: El plano forma un ángulo con el eje mayor al que este forma con una generatriz, sin ser perpendicular, y no pasa por el vértice.
- **Parábola**: El plano es paralelo a una generatriz y no pasa por el vértice.
- **Hipérbola**: El plano forma un ángulo con el eje menor al que este forma con una generatriz, y no pasa por el vértice.

Secciones cónicas **degeneradas**: Cuando el plano pasa por el vértice, obtenemos un punto si el ángulo del plano con el eje es mayor al del eje con la generatriz, una recta si es igual y un par de rectas que se cortan si es menor.

1.1. Circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano a la misma distancia, llamada **radio**, a un punto fijo, el **centro**. **Demostración:** Sean h el eje del cono, g la generatriz V el vértice y $O \neq V$ el punto de corte de h con el plano perpendicular. Si A y B están en la circunferencia, se corresponden con un giro de centro V, luego $\|\overrightarrow{VA}\| = \|\overrightarrow{VB}\|$ y por tanto $\|\overrightarrow{OA}\|^2 = \|\overrightarrow{VA}\|^2 - \|\overrightarrow{VO}\|^2 = \|\overrightarrow{VB}\|^2 - \|\overrightarrow{VO}\|^2 = \|\overrightarrow{OB}\|^2$.

Fijado un sistema de referencia ortonormal, la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $O = (a, b)$ y radio r, que denotamos $\mathcal{C}(O, r)$, es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, que podemos desarrollar como $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Situando el origen de coordenadas en O, obtenemos la **ecuación reducida de la circunferencia**:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

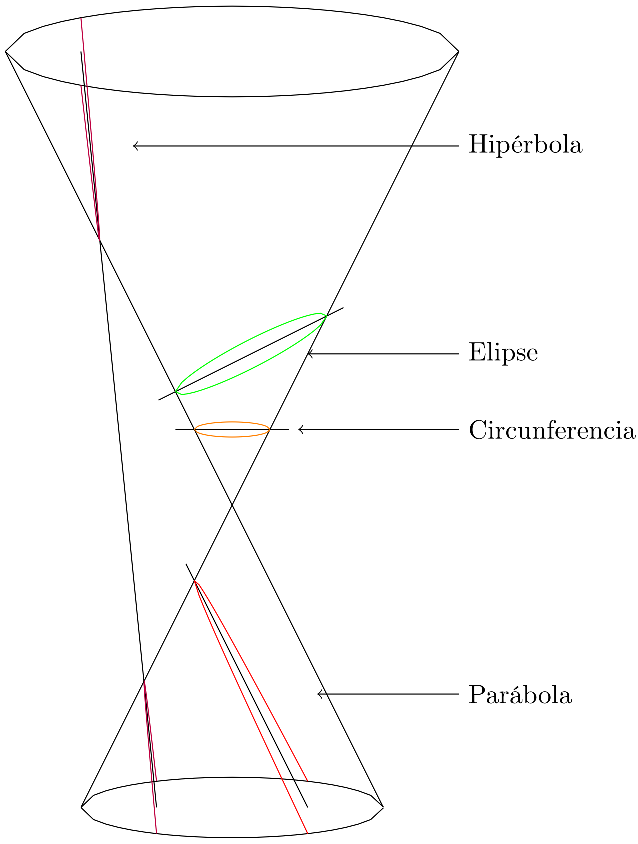

Figura 1.1: Secciones cónicas no degeneradas.

Las **ecuaciones paramétricas** de un cierto objeto $\mathcal{C}$ son las componentes de una aplicación biyectiva $p : I \to \mathcal{C}$ donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. Para las circunferencias, tenemos

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos t \\ y & = & r\sin t \end{array}\right. \qquad \text{con} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ con $r < r'$, sea $d := \|\overrightarrow{OO'}\| \neq 0$, estas se cortan en dos puntos si $r-r' < d < r+r'$ y en uno si $d = r-r'$ ó $d = r+r'$. **Demostración:** Sean $\mathcal{C} := \mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{D} := \mathcal{C}(O', r')$, la ecuación de $\mathcal{C}$ en un cierto referencial ortonormal es $x^2 + y^2 = r^2$, y rotando este referencial, obtenemos uno con $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 = r^2$ y $\mathcal{D} \equiv (x-d)^2 + y^2 = r'^2$. Así, si $P = (x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, restando la ecuación de $\mathcal{C}$ a la de $\mathcal{D}$ obtenemos que $-2dx + d^2 = r'^2 - r^2$ y por tanto $x = \frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}$, luego $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm\sqrt{r^2 - \left(\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}\right)^2}$. Esta última ecuación tiene solución cuando

$$|r| \geq \left|\frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d}\right| \overset{r \geq r'}{\iff} r \geq \frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d} \iff 2dr \geq d^2 + r^2 - r'^2 \iff$$
$$\iff r'^2 \geq (d-r)^2 \iff r' \geq |d-r| \iff r' \geq d-r, r-d \iff r - r' \leq d \leq r + r'$$

Vemos de forma análoga que esta solución es única cuando $d \in \{r - r', r + r'\}$, y de lo contrario es doble.

Un punto P pertenece a la circunferencia en que A y B son diametralmente opuestos si y sólo si $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$. **Demostración:** Sea $\mathcal{C}(O, r)$ esta circunferencia,

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} =$$
$$= -r^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = -r^2 + \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} =$$
$$= -r^2 + \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = -r^2 + 2r^2 + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = r^2 + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$$

luego $P \in \mathcal{C}(O, r) \iff \|\overrightarrow{OP}\|^2 = r^2 \iff \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$.

Una recta es **tangente** a una circunferencia si la corta en un único punto, y **secante** si la corta en dos puntos. Sea P un punto exterior a la circunferencia $\mathcal{C} := \mathcal{C}(O, r)$ ($\|\overrightarrow{OP}\| > r$), existen dos y solo dos tangentes a $\mathcal{C}$ por P, y si A y B son los puntos de tangencia, $\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$ y $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{PA}$.

Demostración: Sea $M := \frac{O+P}{2}$ y $\mathcal{D} := \mathcal{C}(M, \|\overrightarrow{MO}\|)$, sabemos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se cortan en dos puntos A y B. Como $O, P, A \in \mathcal{D}$ siendo O y P diametralmente opuestos, tenemos $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{PA}$, luego PA es tangente a $\mathcal{C}$ en A, porque cualquier otro punto $A' \in PA$ cumple $\|\overrightarrow{OA'}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{AA'}\|^2} > \|\overrightarrow{OA}\|$, y por tanto $A' \notin \mathcal{C}$. Por el mismo argumento, PB es tangente a B. Además, por ser $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{PB}$, $\|\overrightarrow{PA}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2 = \|\overrightarrow{PB}\|^2$.

Finalmente, supongamos que existe una tercera recta que pasa por P y es tangente a $\mathcal{C}$ en un punto D. Sea Q el punto de PD tal que $QM \perp PD$, tenemos que $\min\{\|\overrightarrow{P'M}\|\}_{P' \in PD} = \|\overrightarrow{QM}\|$, y para cualquier otro punto $Q' \in PD$ se tiene $\|\overrightarrow{Q'M}\| > \|\overrightarrow{QM}\|$, luego $PM \perp PD \iff \min\{\|\overrightarrow{P'M}\|\}_{P' \in PD} = \|\overrightarrow{PM}\|$. Si PD es perpendicular a PM, también lo es a PO, luego para un punto $P' \in PD$, $\|\overrightarrow{P'O}\| > \|\overrightarrow{PO}\| > r$ y PD no corta a $\mathcal{C}\#$. Si por el contrario $Q \neq P$, tomando $P' \neq P$ como la simetría de P sobre la recta QM es fácil ver que $P' \in PD \cap \mathcal{D}$, y como P y O son diametralmente opuestos en $\mathcal{D}$, $PP' \perp OP'$. Así, si $\|\overrightarrow{OP'}\| > r$, entonces $\|\overrightarrow{OD}\| \geq \|\overrightarrow{OP'}\| > r\#$, y si $\|\overrightarrow{OP'}\| < r$, tomando la simetría de $D \in \mathcal{C}$ sobre la recta OP' obtenemos un punto $D' \in \mathcal{C} \cap PD$, luego PD es secante#.[1]

Por tres puntos no alineados A, B y C pasa una única circunferencia. **Demostración:** Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia que pasa por A, B y C. Necesariamente el centro, O, debe estar en las mediatrices de AC y de AB, que llamaremos m y m' respectivamente. La intersección de estas es un único punto, pues de lo contrario estas serían paralelas y por tanto AB y AC lo serían también entre sí, pero como tienen un punto A en común, los tres puntos estarían alineados. Así, podemos tomar $\{O\} := m \cap m'$ y entonces $\mathcal{C}(O, \overrightarrow{OA})$ sería la única circunferencia que pasa por los tres puntos.

Sea $\mathcal{C} \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (por ejemplo, una circunferencia) y $\ell \nsubseteq \mathcal{C}$ una recta, entonces $|\ell \cap \mathcal{C}| \leq 2$. **Demostración**: Tras un cambio de coordenadas ortonormal tal que $\ell \equiv y = 0$, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{llcl} \mathcal{C}: & a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' & = & 0 \\ \ell: & y & = & 0 \end{array} \right. \iff a'x^2 + d'x + f' = 0$$

que al ser una ecuación de segundo grado, tiene a lo sumo 2 soluciones salvo si $a' = d' = f' = 0$, pero entonces sería $\mathcal{C} \equiv b'xy + c'y^2 + e'y = 0$ y $\ell \subseteq \mathcal{C}\#$.

1.2. La elipse

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es constante.

Si F y F' son los focos de la elipse, la recta FF' es el **eje principal**, la mediatriz del segmento FF', el **eje secundario**, y su intersección es el **centro** O. Los **vértices** son los puntos de la elipse que intersecan con el eje principal (A y A') o el secundario (B y B'). Llamamos **semidistancia focal** a $c := \|\overrightarrow{OF}\|$, **distancia focal** a $2c$, **semieje principal** a $a := \|\overrightarrow{OA}\|$ y **semieje secundario** a $b := \|\overrightarrow{OB}\|$.

Para todo punto P de la elipse, $\|\overrightarrow{PF}\| + \|\overrightarrow{PF'}\| = 2a$, pues $\|\overrightarrow{AF}\| + \|\overrightarrow{AF}\| + \|\overrightarrow{FF'}\| = \|\overrightarrow{AF}\| + \|\overrightarrow{AF'}\| = \|\overrightarrow{A'F}\| + \|\overrightarrow{A'F'}\| = \|\overrightarrow{A'F'}\| + \|\overrightarrow{F'F}\| + \|\overrightarrow{A'F'}\|$, con lo que $\|\overrightarrow{AF}\| = \|\overrightarrow{A'F'}\|$ y entonces $\|\overrightarrow{PF}\| + \|\overrightarrow{PF'}\| = \|\overrightarrow{AF}\| + \|\overrightarrow{AF'}\| = \|\overrightarrow{A'F'}\| + \|\overrightarrow{AF'}\| = \|\overrightarrow{AA'}\| = 2a$. De aquí que $\|\overrightarrow{BF}\| = a$ y por tanto $a^2 = \|\overrightarrow{BF}\|^2 = \|\overrightarrow{BO}\|^2 + \|\overrightarrow{OF}\|^2 = b^2 + c^2$.

Llamamos **excentricidad** de la elipse a $\epsilon := \frac{c}{a}$, y tenemos que $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$ y $0 \leq \epsilon < 1$, si bien cuando $\epsilon = 0$ entonces $F = F'$ y tenemos una circunferencia.

Una **ecuación reducida de la elipse** es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo a el semieje mayor y b el menor. En efecto, en cierto referencial ortonormal la elipse tiene focos $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$, y para un punto $P(x, y)$ en la elipse, $2a = \|\overrightarrow{PF}\| + \|\overrightarrow{PF'}\| =$

[1] Si alguien tiene una demostración más corta o procesable de que no hay tercera recta, que me lo diga, por favor.

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, luego $4a^2+x^2+2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=x^2-2cx+c^2+y^2$, y simplificando, $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ y de aquí, elevando al cuadrado y simplificando, $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.

Unas **ecuaciones paramétricas** de esta elipse son

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos t \\ y & = & b\sin t \end{array}\right. \qquad \text{con} \qquad t\in[0,2\pi)$$

Decimos que una recta es **tangente** a una elipse si la corta en un único punto y **secante** si la corta en dos puntos. La **propiedad focal de la elipse** dice que, dado un punto P de una elipse de focos F y F', la recta bisectriz del ángulo entre $-\overrightarrow{PF}$ y $\overrightarrow{PF'}$ es tangente a la elipse. **Demostración:** Sea ℓ dicha recta, basta ver que cualquier otro punto $P'\in\ell$ no está en la elipse. Sea $G:=s_\ell(F)$ (el simétrico), entonces P está en el segmento $F'G$ y $\|\overrightarrow{F'P}\|+\|\overrightarrow{FP}\|=\|\overrightarrow{F'P}\|+\|\overrightarrow{GP}\|=\|\overrightarrow{F'G}\|<\|\overrightarrow{F'P'}\|+\|\overrightarrow{P'G}\|=\|\overrightarrow{F'P'}\|+\|\overrightarrow{P'F}\|$.

La recta tangente a la elipse $\mathcal{C}\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ por el punto $P(x_0,y_0)$ es $\ell\equiv\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. En particular, la tangente a la circunferencia $\mathcal{C}\equiv x^2+y^2=r^2$ por $P\in\mathcal{C}$ es $\ell\equiv x_0x+y_0y=r^2$. **Demostración**: Sea

$$\ell\equiv\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0+ut \\ y & = & y_0+vt \end{array}\right.$$

Los puntos de ℓ que están en la elipse satisfacen $\frac{(x_0+ut)^2}{a^2}+\frac{(y_0+vt)^2}{b^2}=1$, y operando obtenemos $\left(\frac{2ux_0}{a^2}+\frac{2vy_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)t^2=1-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$, que se cumple para $t\in\left\{0,-\frac{2\left(\frac{ux_0}{a^2}+\frac{vy_0}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}\right\}$. Estos dos valores son iguales si y sólo si $\frac{ux_0}{a^2}+\frac{vy_0}{b^2}=0$, con lo que $\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0$ o, equivalentemente, $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

1.3. La hipérbola

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos distintos, llamados **focos**, es constante en valor absoluto. Si los focos son F y F', llamamos **eje principal** a la recta FF', **eje secundario** a la mediatriz del segmento FF' y **centro** a donde intersecan ambos ejes. Los **vértices** de la hipérbola son los sus puntos de corte con el eje principal. Llamamos **semidistancia focal** a $c:=\|\overrightarrow{OF}\|$, **distancia focal** a $2c$, **semieje principal** a $a:=\|\overrightarrow{OA}\|$ y **semieje secundario** a $b:=\sqrt{c^2-a^2}$. Una hipérbola es **equilátera** si $a=b$. Llamamos **excentricidad** a $\epsilon:=\frac{c}{a}>1$, y tenemos que $b=a\sqrt{\epsilon^2-1}$.

Todo punto P de la hipérbola $\mathcal{H}$ cumple $\|\overrightarrow{PF}\|-\|\overrightarrow{PF'}\|=\pm 2a$. **Demostración**: Sabemos que $\|\overrightarrow{AA'}\|=\|\overrightarrow{A'F}\|-\|\overrightarrow{AF}\|=\|\overrightarrow{AF'}\|-\|\overrightarrow{A'F'}\|$, y que $\|\overrightarrow{AF'}\|-\|\overrightarrow{AF}\|=\|\overrightarrow{A'F}\|-\|\overrightarrow{A'F'}\|$. Sustituyendo $\|\overrightarrow{AF'}\|$ en la segunda ecuación, nos queda $\|\overrightarrow{A'F'}\|+\|\overrightarrow{A'F}\|-2\|\overrightarrow{AF}\|=\|\overrightarrow{A'F}\|-\|\overrightarrow{A'F'}\|$ y por tanto $\|\overrightarrow{A'F'}\|=\|\overrightarrow{AF}\|$, lo que significa que $\|\overrightarrow{OA'}\|=\|\overrightarrow{OF'}\|-\|\overrightarrow{A'F'}\|=\|\overrightarrow{OF}\|-\|\overrightarrow{AF}\|=\|\overrightarrow{OA}\|=a$ y $\|\overrightarrow{AA'}\|=2a$. Así, dado un punto $P\in\mathcal{H}$ arbitrario, se tiene $|\|\overrightarrow{PF}\|-\|\overrightarrow{PF'}\||=\|\overrightarrow{AF'}\|-\|\overrightarrow{AF}\|=\|\overrightarrow{AF'}\|-\|\overrightarrow{A'F'}\|=\|\overrightarrow{AA'}\|=2a$.

Una **ecuación reducida de la hipérbola** de semieje principal a y secundario b es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

En efecto, si tomamos el referencial ortonormal en el que $F=(c,0)$ y $F'=(-c,0)$, tenemos $\pm 2a=\|\overrightarrow{PF}\|-\|\overrightarrow{PF'}\|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, es decir, $4a^2+(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=(x-c)^2+y^2$, y simplificando, $a^2+cx=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando, nos queda que $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

Unas ecuaciones paramétricas para esta hipérbola son

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cosh t \\ y & = & b\sinh t \end{array}\right. \qquad \text{con} \qquad t\in\mathbb{R}$$

FUVR1

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x)=\tfrac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

Una recta ℓ es una **asíntota** de la hipérbola $\mathcal{H}$ si $\ell\cap\mathcal{H}=\emptyset$ y $d(\ell,\mathcal{H})=0$, es **asintótica** si es paralela a una asíntota, y es **tangente** si corta a la hipérbola en un único punto sin ser asintótica. Las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$ son las (únicas) asíntotas de la hipérbola dada por la ecuación reducida.

$\Longrightarrow$] Si $\ell\equiv y=\pm\frac{b}{a}x$, $(x,y)\in\mathcal{H}\cap\ell \iff \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{\pm\frac{b}{a}x}{b}\right)^2=1$, pero $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{\pm\frac{b}{a}x}{b}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2=0$, luego $\ell\cap\mathcal{H}=\emptyset$. Ahora bien, dado $t\in\mathbb{R}$, el punto $P:=(a\cosh t,b\sinh t)\in\mathcal{H}$ está en la misma abscisa que $Q:=(a\cosh t,b\cosh t)\in\ell$, con lo que $d(P,Q)=b(\cosh t-\sinh t)=be^{-t}$, que tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$ y por tanto $d(\ell,\mathcal{H})=0$.

$\Longleftarrow$] $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \iff y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Así, una recta de la forma $\ell\equiv x=r$ intersecará con $\mathcal{H}$ en $(r,\pm\sqrt{r^2-a^2})$ si $|r|\geq|a|$. De lo contrario, observamos que todo punto $P(x,y)\in\mathcal{H}$ cumple $|x|\geq a$, luego $d(P,\ell)^2=(x-r)^2$, pero como $|x|\geq|a|>|r|$, entonces $|x|\neq|r|$, $x\neq r$ y por tanto $(x-r)^2>0$.
Si $\ell\equiv y=mx+n$ para ciertos $m,n\in\mathbb{R}$, vemos que para que sea $d(\ell,\mathcal{H})=0$ pero $\ell\cap\mathcal{H}=\emptyset$, la distancia 0 debe tenerse como un límite. De lo contrario, dada la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(t):=d((a\cosh t,b\sinh t),\ell)$, debería haber un $c\in\mathbb{R}$ con $\lim_{t\to c}h(c)=0$, pero por ser h continua se tendría $h(c)=0$, con lo que $d(c,\ell)=0$ y si ahora definimos $g_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $g_c(t):=d((a\cosh c,b\sinh c),mt+n)$, por el mismo argumento existiría un $d\in\mathbb{R}$ con $d((\cosh c,\sinh c),md+n)=0$ y por tanto $\ell\cap\mathcal{H}\neq\emptyset\#$.
Centrémonos ahora en el «hemisferio norte» de la hipérbola ($\{(x,y)\in\mathcal{H}\mid y\geq 0\}$), dado por $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Si definimos la función $f:(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ como $f(x):=mx+n-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, tenemos que $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ó $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ debe ser 0 para que ℓ sea una asíntota en el hemisferio norte de $\mathcal{H}$. Ahora bien, $\lim_{x\to+\infty}mx+n-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ converge si y sólo si $m=\frac{b}{a}$, y en este caso converge a n, por lo que debe ser $m=\frac{b}{a}$ y $n=0$. Para el $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ nos encontramos con lo mismo pero con $m=-\frac{b}{a}$. El hemisferio sur se hace de forma análoga, tomando $\hat{f}(x):=mx+n+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, y las condiciones que deben cumplir m y n son las mismas.

La **propiedad focal de la hipérbola** afirma que dado un punto P de una hipérbola de focos F y F', la recta bisectriz del ángulo entre $-\overrightarrow{PF}$ y $\overrightarrow{PF'}$ es tangente a la elipse en P.

Demostración: Sea ℓ dicha recta y $E := s_\ell(F)$, se tiene que $E \in PF'$ y por tanto $\|\overrightarrow{EF'}\| = |\|\overrightarrow{PF'}\| - \|\overrightarrow{PE}\|| = |\|\overrightarrow{PF'}\| - \|\overrightarrow{PF}\|| = 2a$. Sea $P \neq P' \in \ell$, entonces $\|\overrightarrow{P'E}\| < \|\overrightarrow{P'F'}\| + \|\overrightarrow{EF'}\| < \|\overrightarrow{P'E}\| + 2\|\overrightarrow{EF'}\|$, por lo que restando $\|\overrightarrow{P'E}\| + \|\overrightarrow{EF'}\|$, nos queda $-\|\overrightarrow{EF'}\| < \|\overrightarrow{P'F'}\| - \|\overrightarrow{P'E}\| < \|\overrightarrow{EF'}\|$ y por tanto $|\|\overrightarrow{P'F'}\| - \|\overrightarrow{P'E}\|| < \|\overrightarrow{EF'}\| = 2a$ y P' no está en la hipérbola. Queda ver que ℓ no es asintótica.

La recta tangente a la hipérbola $\mathcal{H} \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P(x_0, y_0)$ es $\ell \equiv \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. **Demostración**: Sea

$$\ell \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + ut \\ y & = & y_0 + vt \end{array} \right.$$

Los puntos de ℓ en la hipérbola satisfacen $\frac{(x_0+ut)^2}{a^2} - \frac{(y_0+vt)^2}{b^2} = 1$, y operando, $\left(\frac{2ux_0}{a^2} - \frac{2vy_0}{b^2}\right)t + \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)t^2 = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0$, lo que se cumple para $t \in \left\{0, -\frac{2\left(\frac{ux_0}{a^2} - \frac{vy_0}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}}\right\}$. Estos dos valores son iguales si y sólo si $\frac{ux_0}{a^2} = \frac{vy_0}{b^2}$, con lo que $\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) = \frac{y_0}{b^2}(y - y_0)$ y $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

1.4. La parábola

Una parábola es el lugar de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado **foco** (F), y una recta llamada **directriz** (l). La perpendicular a l por F es el **eje** (**principal**) de la parábola y el punto en que la parábola interseca con el eje es el **vértice**.

Una ecuación reducida de la parábola con $d(F, l) =: p$ es

$$y^2 = 2px$$

En efecto, si tomamos un referencial ortonormal en el que $x = 0$ sea el eje de la parábola, el origen sea el vértice, $F = (\frac{p}{2}, 0)$ y $l \equiv x = -\frac{p}{2}$, sea $P(x, y)$ un punto «genérico» de la parábola, entonces $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \|\overrightarrow{PF}\| = d(P, l) = x + \frac{p}{2}$, luego $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ e $y^2 = 2px$.

Unas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{t^2}{2p} \\ y & = & t \end{array} \right. \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

Una recta es **tangente** a una parábola si la corta en un solo punto sin ser paralela al eje. La **propiedad focal de la parábola** afirma que si P es un punto de la parábola de directriz l y foco F y A es la intersección de l con su perpendicular por P entonces la recta bisectriz del ángulo entre $\overrightarrow{PF}$ y $\overrightarrow{PA}$ es tangente a la parábola en P. **Demostración**: Sea r la bisectriz y $P \neq P' \in r$, entonces $\|\overrightarrow{P'F}\| = \|\overrightarrow{P'A}\| > d(P', l)$, luego P' no está en la parábola. Queda ver que r no es paralela al eje. Si lo fuese, el ángulo entre $\overrightarrow{PA}$ y r sería 0 y por tanto también lo sería aquel entre $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PF}$ con lo que $\overrightarrow{PA} = \lambda\overrightarrow{PF}$ para cierto $\lambda > 0$, que debe ser 1 porque $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{PA}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{PF}\|$, pero entonces $F = A \in l\#$.

La recta tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en $P(x_0, y_0)$ es $\ell \equiv y_0 y - px = px_0$. **Demostración**: Sea

$$\ell \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + ut \\ y & = & y_0 + vt \end{array} \right.$$

Los puntos de ℓ en la parábola satisfacen $(y_0+vt)^2 = 2p(x_0+ut)$, y operando, $(2y_0v-2pu)t + v^2t^2 = 2px_0 - y_0^2 = 0$, lo que se cumple para $t \in \left\{0, \frac{2(pu-y_0v)}{v^2}\right\}$. Si $v=0$, la recta es paralela al eje y no tangente; de lo contrario los dos valores son iguales si y sólo si $pu = y_0v$, con lo que $p(x-x_0) = y_0(y-y_0)$ e $y_0y - px = y_0^2 - px_0 = 0$.

1.5. Definición alternativa de las cónicas

$\mathcal{C}$ es una cónica no degenerada distinta de una circunferencia si y sólo si existen $\epsilon > 0$, una recta ℓ y un punto $F \notin \ell$ tales que $\frac{d(P,F)}{d(P,\ell)} = \epsilon$, en cuyo caso $\epsilon < 1$ para una elipse, $\epsilon = 1$ para una parábola y $\epsilon > 1$ para una hipérbola. Llamamos a ℓ la **directriz del foco** F y a $p \coloneqq d(F,\ell)$ el **parámetro focal**.

$\Longleftarrow$] Sea O el punto de intersección entre ℓ y su perpendicular por F, y tomamos un referencial ortonormal con origen O, $\ell \equiv x = 0$ y $F = (p, 0)$ siendo $p > 0$ la distancia focal. Vemos que $\frac{d(P,F)}{d(P,\ell)} = \epsilon \iff (x-p)^2 + y^2 = \epsilon^2 x^2 \iff (1-\epsilon^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$.

- Si $\epsilon < 1$, entonces $1 - \epsilon^2 > 0$ y

$$0 = (1-\epsilon)^2 \left(x^2 - \frac{2p}{1-\epsilon^2}x\right) + y^2 + p^2 =$$

$$= (1-\epsilon)^2 \left(\left(x - \frac{p}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2}\right) + y^2 + p^2 \implies$$

$$\implies (1-\epsilon^2)\left(x - \frac{p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\epsilon^2} - p^2 = \frac{p^2\epsilon^2}{1-\epsilon^2} \implies$$

$$\left.\begin{array}{r} x' := x - \frac{p}{1-\epsilon^2} \\ y' := y \end{array}\right\} \implies (1-\epsilon^2)x'^2 + y'^2 = \frac{p^2\epsilon^2}{1-\epsilon^2} \implies \frac{(1-\epsilon^2)^2}{\epsilon^2p^2}x'^2 + \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2p^2}y'^2 = 1 \implies$$

$$\left.\begin{array}{r} a := \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2} \\ b := \frac{\epsilon p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \end{array}\right\} \implies \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

- Si $\epsilon = 1$, nos queda $y^2 - 2px + p^2 = 0 \iff y^2 = 2p(x - \frac{p}{2}) \underset{y':=y}{\overset{x':=x-\frac{p}{2}}{\implies}} y'^2 = 2px'$.
- Si $\epsilon > 1$, cambiando el signo a la ecuación de arriba nos queda $(\epsilon^2-1)x^2 - y^2 + 2px - p^2 = 0$ con $\epsilon^2 - 1 > 0$, luego

$$(\epsilon^2 - 1)\left(x + \frac{p}{\epsilon^2-1}\right)^2 - y^2 = p^2 - \frac{p^2}{\epsilon^2-1} = \frac{p^2\epsilon^2}{\epsilon^2-1} \implies$$

$$\left.\begin{array}{r} x' := x + \frac{p}{\epsilon^2-1} \\ y' := y \end{array}\right\} \implies (\epsilon^2-1)x'^2 - y'^2 = \frac{p^2\epsilon^2}{\epsilon^2-1} \implies \frac{(\epsilon^2-1)^2}{p^2\epsilon^2}x'^2 - \frac{\epsilon^2-1}{p^2\epsilon^2}y'^2 = 1 \implies$$

$$\left.\begin{array}{r} a := \frac{\epsilon p}{\epsilon^2-1} \\ b := \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2-1}} \end{array}\right\} \implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Longrightarrow$] Las cuentas son aproximadamente las de la otra implicación pero al revés. Así, para una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tomamos $\epsilon = \frac{c}{a}$, $F = (c, 0)$ y $\ell \equiv x = \frac{a^2}{c}$, mientras que para una parábola $y^2 = 2px$, tomamos $\epsilon = 1$, $F = (\frac{p}{2}, 0)$ y $\ell \equiv x = -\frac{p}{2}$.

Si $F = (p, 0)$ y $\ell \equiv x = 0$, la distancia entre F y $Q := (p, p\epsilon)$, $\lambda := d(F, Q) = p\epsilon$, se llama **semilado recto** de la cónica. La ecuación de una cónica de excentricidad ϵ, foco $F = (s, t)$ y directriz $\ell \equiv ux + vy + w = 0$ se puede escribir como

$$(x - s)^2 + (y - t)^2 = (lx + my + n)^2$$

con $k := \frac{\epsilon}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $l := ku$, $m := kv$ y $n := kw$, la **ecuación focal de la cónica**, pues

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = \epsilon \iff d(P, F)^2 = \epsilon^2 d(P, \ell)^2 \iff$$

$$\iff (x - s)^2 + (y - t)^2 = \epsilon^2 \frac{(ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2} = (lx + my + n)^2$$

GAE

La distancia de un punto $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ a un hiperplano $\mathcal{H}$ de ecuación $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ es $d(Q, \mathcal{H}) = \frac{|a_1q_1 + \cdots + a_nq_n + b|}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|}$.

Capítulo 2

Estudio métrico de las cónicas

Fijado un referencial ortonormal en un plano afín euclídeo, llamamos **cónica** al conjunto de puntos (x, y) con ecuación

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy + d = 0$$

donde al menos uno de los valores a, b o c no es nulo. Distintas ecuaciones de este tipo pueden definir la misma cónica, como múltiplos de esta por $\lambda \neq 0$, o las que dan lugar a la cónica vacía. Esta ecuación se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ b & c & f \\ \hline e & f & d \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Llamamos **matriz (proyectiva) de la cónica** a

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ b & c & f \\ e & f & d \end{pmatrix}$$

y **matriz principal de la cónica** a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Sean

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right) \qquad B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \overline{X} = \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

podemos expresar la ecuación como $\overline{X}^t \overline{AX} = 0$ o como $X^t AX + 2B^t X + d = 0$.

2.1. Forma reducida

GAE

Para cambiar coordenadas entre dos referenciales $\Re = (O, \mathcal{B})$ y $\Re' = (O', \mathcal{B}')$ de $\mathcal{E}$, si llamamos $X_0 \coloneqq [O]_{\Re'} = [\overrightarrow{O'O}]_{\mathcal{B}'}$ y $M \coloneqq M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, se tiene que:

$$[...]X' = [...] = X_0 + MX$$

Podemos emplear la expresión matricial equivalente:

$$\left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & X_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

AlgL

Los vectores propios de f asociados a λ son todos los vectores no nulos de $\operatorname{Nuc}(f - \lambda Id)$. Así, $V_\lambda = \operatorname{Nuc}(f - \lambda Id) = \{v \in V \mid (f - \lambda Id)(v) = 0\} = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ es el **subespacio propio** o **característico** correspondiente al valor propio λ. Así, $\lambda \in K$ es un valor propio de f si y sólo si $\det(f - \lambda Id) = 0$. [...]

$P_f(x) \coloneqq \det(xId - f)$ es el **polinomio característico** de f, y $P_A(x) \coloneqq \det(xI_n - A)$ es el polinomio característico de A. Podemos comprobar que

$$P_A(x) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Teorema de diagonalización: f es diagonalizable si y sólo si

$$P_f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_r)^{d_r}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ distintos dos a dos, y $d_i = \dim(\operatorname{Nuc}(\lambda_i Id - f))$. [...]

Así, para diagonalizar una matriz $A \in M_n(K)$ en matrices $A = M_{\mathcal{CB}} D M_{\mathcal{BC}}$, con D diagonal, obtenemos su polinomio característico, hallamos sus raíces, que serán los autovalores de A. Si la suma de sus multiplicidades da n, resolvemos cada ecuación $(\lambda Id - f)X = 0$ para obtener las bases de los subespacios propios, cuya dimensión debería coincidir con la multiplicidad del autovalor si A es diagonalizable. Entonces añadimos cada raíz en D tantas veces como sea su multiplicidad y razonamos que los vectores correspondientes de la base $\mathcal{B}$, y por tanto las correspondientes columnas de $M_{\mathcal{CB}}$, son los de la base de dicho subespacio propio.

Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ simétrica, existe una matriz ortogonal Q de determinante 1 tal que $Q^t AQ$ es diagonal. **Demostración:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \implies P_A(x) = \begin{vmatrix} a - x & b \\ b & c - x \end{vmatrix} = x^2 - (a + c)x + (ac - b^2)$$

y el discriminante de $P_A(x) = 0$, $(a - c)^2 + 4b^2$, es siempre mayor que 0 salvo que A ya sea diagonal con $a = c$, pero entonces A tiene dos valores propios distintos y por tanto diagonaliza. Si u y v son vectores propios de valores propios respectivos $\alpha \neq \beta$, entonces $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v =$

$f_A(u) \cdot v = (Au)^t v = u^t A^t v = u^t A v = u \cdot f_A(v) = u \cdot \beta v = \beta(u \cdot v)$, luego $(\alpha - \beta)(u \cdot v) = 0$ y como $\alpha \neq \beta$ se tiene $u \perp v$, luego la base en que diagonaliza A se puede escoger ortonormal. Finalmente, si Q es la matriz cuyas columnas son estos vectores propios y su determinante es -1, podemos cambiar el signo de una de las columnas para que el determinante sea 1.

Con esto podemos hacer dos reducciones a cualquier cónica $\mathcal{G}$ y encontrar un referencial ortonormal en que esta tenga ecuación reducida.

Para la primera reducción, sea

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right)$$

la matriz de $\mathcal{G}$ en un referencial ortonormal $\Re$ y Q una matriz ortogonal con $|Q| = 1$ tal que $Q^t A Q = Q^{-1} A Q$ sea diagonal. Entonces, si consideramos el referencial $\Re'$ tal que

$$\left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) = N \left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad N := \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

la ecuación de $\mathcal{G}$ queda como

$$\left(N \left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right)\right)^t \overline{A} N \left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X'^t & 1 \end{array}\right) N^t \overline{A} N \left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) = 0$$

y la matriz de $\mathcal{G}$ en $\Re'$ es

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline B'^t & d' \end{array}\right) = N^t \overline{A} N = \left(\begin{array}{c|c} Q^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Q^t A Q & Q^t B \\ \hline B^t Q & d \end{array}\right)$$

luego $A' = Q^t A Q$, $B' = Q^t B$ y $d' = d$ y el término xy se anula en la ecuación de $\mathcal{G}$, lo que nos deja con

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2mx' + 2ny' + d = 0$$

Este cambio es solo vectorial, pues no modifica el origen de coordenadas, y como $|Q| = 1$, se trata de un giro. Para la segunda reducción, sea $\delta := \lambda_1 \lambda_2$:

- Si $\delta > 0$, podemos suponer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (de lo contrario cambiamos de signo la ecuación), y completando cuadrados tenemos que $\lambda_1 x'^2 + 2mx' = \lambda_1 (x' + \frac{m}{\lambda_1})^2 - \frac{m^2}{\lambda_1}$ y $\lambda_2 y'^2 + 2ny = \lambda_2 (y + \frac{n}{\lambda_2})^2 - \frac{n^2}{\lambda_2}$. Nos queda entonces $\lambda_1 (x' + \frac{m}{\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y' + \frac{n}{\lambda_2})^2 - \frac{m^2}{\lambda_1} - \frac{n^2}{\lambda_2} + d = 0$ y, haciendo la traslación de vector $(\frac{m}{\lambda_1}, \frac{n}{\lambda_2})$, nos queda $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = q$, lo que nos deja con una cónica de **tipo elíptico**. Si $q > 0$ es una **elipse real**, si $q = 0$ es un **punto** y si $q < 0$ es una **elipse imaginaria**.

- Si $\delta < 0$, por el mismo procedimiento llegamos a que $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 =: q$ y, como λ_1 y λ_2 tienen signos opuestos, la ecuación es de **tipo hiperbólico**. Si $q = 0$ tenemos un **par de rectas que se cortan**, dadas por $y'' = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x''$; de lo contrario es una **hipérbola**.

- Si $\delta = 0$, podemos suponer $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ (no pueden ser ambos 0 porque entonces sería $A = 0$). Nos queda entonces que $\lambda_2 y'^2 + 2mx' + 2ny' + d = 0$ y, completando cuadrados, que $\lambda_2 (y' + \frac{n}{\lambda_2})^2 - \frac{n^2}{\lambda_2} + 2mx' + d = 0$, una ecuación de **tipo parabólico**. Si $m \neq 0$

podemos escribir la ecuación como $\lambda_2(y' + \frac{n}{\lambda_2})^2 + 2m(x' - \frac{n^2}{2m\lambda_2} + \frac{d}{2m}) = 0$, y la traslación de vector $(\frac{d}{2m} - \frac{n^2}{2m\lambda_2}, \frac{n}{\lambda_2})$ nos lleva la ecuación a $\lambda_2 y''^2 + 2mx'' = 0$, y tenemos una parábola. Si $m = 0$, nos queda $\lambda_2(y' + \frac{n}{\lambda_2})^2 - \frac{n^2}{\lambda_2} + d = 0$ y la traslación de vector $(0, \frac{n}{\lambda_2})$ nos lleva la ecuación a $\lambda_2 y''^2 = q$, con lo que tenemos **dos rectas paralelas** si $\frac{q}{\lambda_2} > 0$, una **recta doble** si $q = 0$ o **dos rectas paralelas imaginarias** si $\frac{q}{\lambda_2} < 0$.

Nótese que la ecuación reducida obtenida no es exactamente como las que vimos en el tema anterior para las cónicas no degeneradas. Para obtener estas dividiríamos entre q para $\delta \neq 0$ o entre λ_2 para $\delta = 0$, intercambiaríamos coordenadas si fuera necesario (negando una de las dos para que el cambio sea ortonormal) y, para el caso de la parábola, la giraríamos 180° en su caso.

2.2. Invariantes métricos

Dada una cónica con matriz proyectiva $\overline{A}$ y matriz principal A, las cantidades $\Delta := |\overline{A}|$, $\delta := |A|$ y $s := \text{tr}(A)$, llamadas **invariantes métricos de la cónica**, se mantienen invariantes al cambiar a otro referencial ortonormal. **Demostración:** Consideremos el cambio de referencial dado por

$$\left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) = N \left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad N := \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

con Q ortogonal. Entonces la matriz de la cónica en la nueva referencia es $N^t\overline{A}N$ y la matriz principal es Q^tAQ, y como $|N| = |Q|$ y $Q^t = Q^{-1}$, se tiene $|N^t\overline{A}N| = |Q^t\overline{A}Q| = |\overline{A}|$, $|Q^tAQ| = |A|$ y $\text{tr}(Q^tAQ) = \text{tr}(A)$.

	$\Delta \neq 0$: No degenerada	$\Delta = 0$: Degenerada
$\delta > 0$: Ecuación elíptica	Elipse, imaginaria si $s\Delta > 0$ o real si $s\Delta < 0$.	Punto
$\delta < 0$: Ecuación hiperbólica	Hipérbola	Dos rectas secantes
$\delta = 0$: Ecuación parabólica	Parábola	Recta doble, o dos rectas paralelas reales o imaginarias

Además, si $\delta \neq 0$, la ecuación reducida es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{\Delta}{\delta}$, mientras que si $\delta = 0$ y $\Delta \neq 0$ la ecuación reducida es $y^2 + 2\sqrt{-\frac{\Delta}{s^3}}x = 0$.

Demostración: Consideremos $\delta \neq 0$. Entonces tenemos una cónica de tipo elíptica o hiperbólica que tras la doble reducción es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = q$, con lo que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & -q \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 q = -\delta q$$

y entonces $q = -\frac{\Delta}{\delta}$. Así, si $\Delta = 0$ entonces $q = 0$ y estamos en un caso degenerado, mientras que si $\Delta \neq 0$ estamos en el correspondiente caso no degenerado. Si $\delta = 0$, tras la primera reducción y suponiendo $\lambda_1 = 0$ tendríamos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ 0 & \lambda_2 & n \\ m & n & d \end{vmatrix} = -m^2\lambda_2$$

Así, si $\Delta = 0$ tenemos $m = 0$ y estamos en un caso degenerado, mientras que si $\Delta \neq 0$ entonces $m^2 \neq 0$ y la ecuación se reduce a $\lambda_2 y^2 + 2mx = 0$, es decir, $y^2 + 2\frac{m}{\lambda_2}x = 0$, y la ecuación se debe a que $\frac{m}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^3}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{s^3}}$.

2.3. Elementos geométricos

Una cónica es **centrada** si $\delta \neq 0$, y llamamos **centro de simetría** de una cónica a todo punto (x_0, y_0) tal que la traslación dada por $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$ elimina los términos en x e y de la ecuación. Una cónica centrada tiene un único centro de simetría que es la solución del sistema

$$AX = -B$$

Demostración: Si escribimos la traslación como

$$\left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) = N \left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) \quad N = \left(\begin{array}{c|c} I & X_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

la matriz de la cónica tras la traslación es

$$N^t \overline{A} N = \left(\begin{array}{c|c} * & AX_0 + B \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

luego debe ser $AX_0 + B = 0$ y por tanto $AX = -B$, sistema que tiene solución única porque $|A| \neq 0$.

Llamamos **ejes** de una cónica a los del referencial ortonormal en que la cónica tiene ecuación reducida. Las direcciones de los ejes son los subespacios propios de A. **Demostración:** Las direcciones de los ejes tras la doble reducción son $<(1,0)>$ y $<(0,1)>$ y multiplicando por la matriz de cambio de base Q, cuyas columnas son los vectores propios de A, obtenemos los ejes en el referencial actual.

Dada una elipse real o hipérbola $\mathcal{G}$ de matriz $\overline{A}$, si λ_1 y λ_2 son los valores propios de A, los semiejes principal y secundario de la cónica son $\{a, b\} = \left\{\sqrt{\left|\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right|}, \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right|}\right\}$. **Demostración:** Llevamos $\mathcal{G}$ a un referencial ortonormal donde $\mathcal{G} \equiv \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = q$ con $q \neq 0$. Entonces $\frac{x^2}{\frac{q}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{q}{\lambda_2}} = 1$, luego $\{a, b\} = \left\{\sqrt{\left|\frac{q}{\lambda_1}\right|}, \sqrt{\left|\frac{q}{\lambda_2}\right|}\right\}$, pero $q = -\frac{\Delta}{\delta}$, de donde se deduce la ecuación.

El eje de una parábola tiene por dirección el subespacio de vectores propios correspondiente al valor propio nulo. Para hallar el vértice, si el eje tiene pendiente k, lo más fácil es derivar implícitamente y en función de x y buscar un punto de la parábola en el que esta valga $-\frac{1}{k}$.[1]

[1] La validez de este procedimiento se desprende del teorema de la función implícita, estudiado en FVV3.

Capítulo 3

Cónicas proyectivas

Un **plano afín** es una terna $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ formada por los conjuntos $\mathcal{P}, \mathcal{L} \neq \emptyset$, cuyos elementos se llaman **puntos** y **rectas**, respectivamente, y la **relación de incidencia** $\epsilon \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, que satisface que $\forall P, Q \in \mathcal{P}, \ell \in \mathcal{L}$:

1. $P \neq Q \implies \exists! \ell \in \mathcal{L} : P, Q \epsilon \ell$.

2. $\exists P, Q, R \in \mathcal{P} : \nexists \ell \in \mathcal{L} : P, Q, R \epsilon \ell$.

3. $P \not\epsilon \ell \implies \exists! m \in \mathcal{L} : (P \epsilon m \land \nexists Q \in \mathcal{P} : Q \epsilon \ell, m)$.

$P \in \mathcal{P}$ es **incidente** con $\ell \in \mathcal{L}$ si $P \epsilon \ell$, y $\ell, m \in \mathcal{L}$ son **paralelas** si $\nexists P : P \epsilon \ell, m$. Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 2$, definimos el plano afín $\mathbb{A}(V) := (\mathcal{P}(V), \mathcal{L}(V), \in)$ con $\mathcal{P}(V) := V$ y $\mathcal{L}(V) = \{\vec{v} + < \vec{w} >\}_{\vec{v}, \vec{w} \in V, \vec{w} \neq 0}$, y escribimos $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{A}(\mathbb{K}^n)$. Llamamos a $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ el **plano afín usual**.

Un **plano proyectivo** es una terna $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ similar a un plano afín pero cambiando el último axioma por que $\forall \ell, m \in \mathcal{L}$:

3. $\exists P \in \mathcal{P} : P \epsilon \ell, m$.

4. $\exists P, Q, R \in \mathcal{P} : (P \neq Q \neq R \neq P \land P, Q, R \in \ell)$.

El **principio de dualidad para planos proyectivos** afirma que si $\pi := (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ es un plano proyectivo entonces $\pi^* := (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \epsilon^*)$ con $\ell \epsilon^* P \iff P \epsilon \ell$ también lo es.

1. $\forall \ell, m \in \mathcal{L}, (\ell \neq m \implies \exists! P \in \mathcal{P} : P \epsilon \ell, m)$: El axioma 3 asegura que P existe. Ahora bien, si existiera otro $Q \neq P$ con $Q \epsilon \ell, m$, por el axioma 1 se tendría $\ell = m \#$.

2. $\exists \ell, m, n \in \mathcal{L} : \nexists P \in \mathcal{P} : P \epsilon \ell, m, n$: El axioma 2 nos dice que hay 3 puntos $Q, R, S \in \mathcal{P}$ para los que $\nexists \ell \in \mathcal{L} : Q, R, S \epsilon \ell$. Si fueran $Q = R \neq S$, el axioma 1 nos dice que existe una recta que los contiene, y si fueran $Q = R = S$, podríamos tomar uno de los puntos del axioma 4 (para alguna recta) como punto distinto a este para aplicar el axioma 1. Por tanto los 3 puntos son distintos. Sean ahora $\ell := QR$, $m := RS$ y $n := SQ$ (aplicando el axioma 1). Si hubiera un punto $P \epsilon \ell, m, n$ (podemos suponer $P \neq Q, R$), entonces por el axioma 1 $n = PQ = \ell = PR = m$ y entonces $Q, R, S \in \ell \#$.

3. $\forall P, Q \in \mathcal{P}, \exists \ell \in \mathcal{L} : P, Q \epsilon \ell$. Si $P \neq Q$, esto nos lo asegura el axioma 1. Para poder aplicarlo con $P = Q$, tomamos un punto de los dados por el axioma 4 que sea distinto a P.

4. $\forall P \in \mathcal{P}, \exists \ell, m, n \in \mathcal{L} : (\ell \neq m \neq n \neq \ell \wedge P \epsilon \ell, m, n)$. Tomamos los puntos Q, R, S dados por el axioma 2, que ya hemos visto que deben ser distintos. Podemos suponer $P \neq Q, R$, y entonces podemos suponer $PQ \neq PR$. En efecto, si fueran iguales sería $P \epsilon QR$ y $S \not\epsilon QR = PR$, de modo que $P \neq S$ y además $PS \neq PR$, y podríamos tomar S en vez de R. Ahora tomamos QR que, por el axioma 4, contiene un tercer punto $T \neq Q, R$, de modo que $P \neq T$ (si fuera $P = T$ se tendría $PQ = PR\#$) y $PT \neq PQ, PR$ (si fuera, por ejemplo, $PT = PQ$, se tendría $PQ = TQ = TR = QR\#$). Por tanto, $\ell := PQ$, $m := PT$ y $n := PR$ cumplen las condiciones.

Dados $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ y $\pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \epsilon')$ dos planos proyectivos, un **isomorfismo** de π a π' es un par $(f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}', f' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}')$ de biyecciones tal que $\forall P \in \mathcal{P}, \ell \in \mathcal{L}, (P \epsilon \ell \implies f(P) \epsilon' f'(\ell))$. Si existe, decimos que π y π' son **isomorfos**, si y sólo si existe una biyección $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ que lleva ternas de puntos alineados a ternas de puntos alineados.

$\implies$] Obvio.

$\impliedby$] Dada una recta ℓ, por el axioma 4 existen tres puntos P, Q, R distintos sobre la recta. Definimos $f' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ tal que $f'(\ell) := \overline{f(P)f(Q)}$. Para ver que está bien definida, sean $P', Q' \epsilon \ell$, $P' \neq Q'$ con $\{P, Q\} \neq \{P', Q'\}$ (podemos suponer $P \neq P', Q'$ y $P' \neq P, Q$). Entonces $f'(\ell) = \overline{f(P')f(Q')}$, pero como P, Q, P', Q' están alineados, $f(P), f(Q), f(P'), f(Q')$ también lo están, y $\overline{f(P')f(Q')} = \overline{f(P)f(Q)}$. Sean $\ell := \overline{PQ}$ y $R \epsilon \ell$, entonces $f'(\ell) = \overline{f(P)f(Q)}$, pero como P, Q, R están alineados, $f(R) \epsilon' \overline{f(P)f(Q)} = f'(\ell)$.

3.1. Construcción de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

Si en el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{A}(W)$ para cierto espacio vectorial W definimos la relación de equivalencia $\ell \sim \ell' :\iff \ell \parallel \ell'$, entonces $\overline{\mathbb{A}} := (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \in)$ con $\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cup (\mathcal{L}/\sim)$ y $\mathcal{L}' := \{\ell \cup \{[\ell]\}\}_{\ell \in \mathcal{L}} \cup \{\mathcal{L}/\sim\}$ es un plano proyectivo al que llamamos **extensión proyectiva** de $\mathbb{A}$. Llamamos **puntos afines** a los de $\mathcal{P}$ y **puntos del infinito** a los de $\mathcal{L}/\sim$. De igual modo, llamamos **rectas extendidas** a las $\overline{\ell} := \ell \cup \{[\ell]\}$ y **recta del infinito** a $\ell_\infty := \mathcal{L}/\sim$.

Dado el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $W \equiv \mathbb{K}^3$, si $\mathcal{P}(W) := \{\text{rectas vectoriales de } W\}$ y $\mathcal{L}(W) := \{\text{planos vectoriales de } W\}$, entonces $(\mathcal{P}(W), \mathcal{L}(W), \subseteq)$ es un plano proyectivo. Llamamos **plano proyectivo en** $\mathbb{K}$ a $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) := (\mathcal{P}(\mathbb{K}^3), \mathcal{L}(\mathbb{K}^3), \subseteq)$.

1. $<\vec{v}> \neq <\vec{w}> \implies \exists! \pi \in \mathcal{L}(W) : <\vec{v}>, <\vec{w}> \subseteq \pi$: $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son LI, luego necesariamente $\pi = <\vec{v}, \vec{w}>$.

2. $\exists \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in W : \nexists \pi \in \mathcal{L}(W) : <\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}> \subseteq \pi$: Basta tomar una base de W.

3. $\exists \vec{u} \in W : <\vec{u}> \subseteq \pi$: Si $\pi = <\vec{v}, \vec{w}>$, basta tomar $\vec{v}$.

4. $\exists \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in W : (<\vec{u}> \neq <\vec{v}> \neq <\vec{w}> \neq <\vec{u}> \wedge <\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}> \in \pi)$: Si $\pi = <\vec{v}, \vec{w}>$, basta tomar $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{v} + \vec{w}$.

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial W de dimensión 2, $\overline{\mathbb{A}(W)}$ es isomorfo a $\mathbb{P}(W \times \mathbb{K})$. **Demostración:** Sea $\mathcal{P} := W \cup \{[\ell]\}_{\ell \text{ recta afín de } W}$ el conjunto de puntos de $\overline{\mathbb{A}(W)}$ y $\mathcal{P}' :=$ $\{$rectas vectoriales de $W \times \mathbb{K}\}$ el conjunto de puntos de $\mathbb{P}(W \times \mathbb{K})$. Sea $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ dada por $\sigma(u) =< (u,1) > \forall u \in W$ y $\sigma([< u >]) =< (u,0) > \forall u \in W$, una biyección cuya inversa viene dada por $\sigma^{-1}(< (u,0) >) = [< (u,0) >] \forall u \in W$ y $\sigma^{-1}(< (u,\lambda) >) = \frac{u}{\lambda} \forall u \in W, \lambda \neq 0$. Veamos que lleva ternas de puntos alineados a ternas de puntos alineados:

1. Si los tres puntos son afines y suponemos $u_1 \neq 0, u_2$, que estén alineados significa que $u_2 = \lambda u_1$ y $u_3 = \mu u_1$ para $\lambda \neq 1$. Entonces $\sigma(u_1) =< (u_1,1) >$, $\sigma(u_2) =< (\lambda u_1, 1) >$ y $\sigma(u_3) =< (\mu u_1, 1) >$, pero $\frac{\lambda-\mu}{\lambda-1}(u_1,1) + \frac{\mu-1}{\lambda-1}(\lambda u_1, 1) = (\mu u_1, 1)$, luego las tres rectas se encuentran en un plano.

2. Si u_1 y u_2 son afines y $[< u_3 >]$ es del infinito, que estén alineados significa que $u_2 = u_1 + \lambda u_3$. Entonces $\sigma(u_1) =< (u_1,1) >$, $\sigma(u_2) =< (u_1 + \lambda u_3, 1) >$ y $\sigma(u_3) =< (u_3, 0) >$. Pero $(u_1,1) + \lambda(u_3,0) = (u_1 + \lambda_3, 1)$, luego las tres rectas están en el mismo plano.

3. Si u_1 es afín y $[< u_2 >], [< u_3 >]$ son del infinito, que estén alineados significa que $u_2 = u_3$, y entonces es claro que hay una recta que une $\sigma(u_1)$ con $\sigma([< u_2 = u_3 >])$.

4. Si los tres puntos son del infinito, siempre están alineados, pero entonces para $i \in \{1,2,3\}$, $\sigma([< u_i >]) =< (u_i, 0) > \in W \times \{0\}$.

3.2. Referencias proyectivas

Tres puntos $P, Q, R \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ son (**proyectivamente**) **independientes** si los vectores que los representan forman una base de $\mathbb{K}^3$. Una **referencia proyectiva** o **referencial proyectivo** en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ es una cuaterna $\mathcal{R} := (P, Q, R, U)$ de puntos tales que tres puntos cualesquiera de ellos son independientes.

Todo referencial proyectivo de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ admite una base $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{K}^3$ tal que $P =< v_1 >$, $Q =< v_2 >$, $R =< v_3 >$ y $U =< v_1 + v_2 + v_3 >$, única salvo multiplicación simultánea de los 3 vectores por un escalar no nulo. A esta base la llamamos **base asociada** al referencial $\mathcal{R}$, y el punto U es el **punto unidad** del referencial. **Demostración:** $< v_1 >, < v_2 >, < v_3 >$ son no alineados en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si y sólo si (v_1, v_2, v_3) es una base. Entonces, si $P =:< u_1 >$, $Q =:< u_2 >$ y $R =:< u_3 >$, podemos escribir $U =:< u >$ con $u := \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ con $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$. Entonces hacemos $v_i := \alpha_i u_i$ para $i \in \{1,2,3\}$, y sabemos que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$, pues si fuera algún $\alpha_i = 0$, u sería linealmente dependiente con u_j y u_k para $j, k \neq i$ y serían alineados, luego (v_1, v_2, v_3) es una base que satisface las condiciones. Ahora bien, si existe $\mathcal{B}' = (v_1', v_2', v_3')$ que también satisface las condiciones, necesariamente $< v_1' >= P =< v_1 >$ y por tanto $v_1' = \lambda_1 v_1$ para algún $\lambda_1 \neq 0$, y lo mismo sucede con v_2' y v_3', pero entonces $< v_1' + v_2' + v_3' >=< \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \lambda_3 v_3' >= U =< v_1 + v_2 + v_3 >$, y es claro que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Dado $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, decimos que sus **coordenadas homogéneas** respecto a la base $\mathcal{B}$ asociada al referencial $\mathcal{R}$ son x, y, z ($P := [x,y,z]$) si $P =:< \vec{u} >$ con $[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = (x,y,z)$. Estas son únicas salvo multiplicación de las tres por un escalar no nulo. Tres puntos de coordenadas homogéneas $[a,b,c]$, $[d,e,f]$ y $[g,h,i]$ son proyectivamente independientes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Llamamos $[a,b,c]^*$ a la recta en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ dada por $ax+by+cz=0$. Las rectas $\ell := [a_1,b_1,c_1]^*$, $m := [a_2,b_2,c_2]^*$ y $n := [a_3,b_3,c_3]^*$ son **congruentes** (se cortan) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración:

$$\exists P \in \ell, m, n \iff \exists (x_0, y_0, x_0) \neq 0 : \forall i \in \{1,2,3\}, a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 = 0 \iff$$
$$\iff \dim \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} > 0$$

3.3. Teoremas de Desargues y Pappus

El **teorema de Desargues** afirma que, dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ sin vértices ni lados comunes, si las rectas que unen vértices correspondientes (AA', BB' y CC') se cortan en un punto, los puntos de corte de lados correspondientes están alineados. Un plano proyectivo es **desarguesiano** si satisface este teorema.

El **teorema de Pappus** afirma que, dados tres puntos distintos A, B, C en una recta y A', B', C' en otra, los puntos $L \in AB' \cap A'B$, $M \in AC' \cap A'C$ y $N \in BC' \cap B'C$ están alineados. Un plano proyectivo es **papiano** si satisface este teorema.

Un plano proyectivo π es papiano y desarguesiano si y sólo si es isomorfo a $\mathbb{P}(V)$ para algún $\mathbb{K}$-espacio vectorial tridimensional, si y sólo si es isomorfo a $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. En tal caso, el cuerpo $\mathbb{K}$ de las dos últimas condiciones es el mismo y está unívocamente determinado por π salvo isomorfismo.

$2 \iff 3]$ Sea $\mathcal{B}$ una base del $\mathbb{K}$-espacio tridimensional V, $[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^3$ define un isomorfismo entre los puntos de $\mathbb{P}(V)$ y los de $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

$3 \implies 1]$ Probemos el teorema de Desargues. Sean $O := [\vec{o}]$ el punto de corte entre las tres rectas, $A := [\vec{a}]$, $B := [\vec{b}]$ y $C := [\vec{c}]$ con $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{o} \neq 0$, como O, A, A' están alineados, debe ser $A' = [\lambda\vec{o} + \mu\vec{a}]$ con $\lambda \neq 0$ (si fuera $\lambda = 0$ sería $A = A'$ y AA' no tendría sentido) y, dividiendo por λ, $A' =: [\vec{o} + \alpha\vec{a}]$. Análogamente $B' =: [\vec{o} + \beta\vec{b}]$ y $C' =: [\vec{o} + \gamma\vec{c}]$. Como $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = (\vec{o} + \alpha\vec{a}) - (\vec{o} + \beta\vec{b})$, tenemos que $AB \cap A'B' = \{[\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}]\}$, y del mismo modo $AC \cap A'C' = \{[\alpha\vec{a} - \gamma\vec{c}]\}$ y $BC \cap B'C' = \{[\beta\vec{b} - \gamma\vec{c}]\}$. Estos tres puntos están alineados, pues $(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) - (\alpha\vec{a} - \gamma\vec{c}) + (\beta\vec{b} - \gamma\vec{c}) = 0$.
Para el teorema de Pappus, consideremos la referencia proyectiva $\mathcal{R} := (A', A, B, B')$, con lo que $A' = [1,0,0]$, $A = [0,1,0]$, $B = [0,0,1]$ y $B' = [1,1,1]$. Como $C \epsilon AB$,

debe ser $C = [0, \alpha, \beta]$ con $\alpha, \beta \neq 0$, luego $C = [0, 1, c]$ para algún $c \neq 0$. De forma parecida, $C' = [c', 1, 1]$. Entonces

$$\begin{array}{lll} AB' : x = z & AC' : x = c'z & BC' : x = c'y \\ A'B : y = 0 & A'C : z = cy & B'C : (c-1)x - cy + z = 0 \end{array}$$

de donde $AB' \cap A'B = \{[1, 0, 1]\}$, $AC' \cap A'C = \{[cc', 1, c]\}$ y $BC' \cap B'C = \{[c', 1, c + c' - cc']\}$, y los tres puntos están alineados porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ cc' & 1 & c \\ c' & 1 & c + c' - cc' \end{vmatrix} = 0$$

3.4. Ampliación proyectiva

Llamamos $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ al conjunto de polinomios de n variables sobre $\mathbb{K}$, y decimos que $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es **homogéneo** si todos sus monomios tienen el mismo grado.

Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, su **homogeneización** es el polinomio homogéneo $f^* \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ dado por $f^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}^d f(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}})$, siendo d el grado de f, es decir, el máximo de los grados de sus monomios. La **deshomogeneización** de $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ es $F_* \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ dado por $F_*(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n, 1)$.

1. Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $(f^*)_* = f$.
   Si $f(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i} x_{a_{ij}}$, entonces

   $$f^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^k x_{n+1}^{\max\{d_i\}} \prod_{j=1}^{d_i} \frac{x_{a_{ij}}}{x_{n+1}} = \sum_{i=1}^k x_{n+1}^{\max\{d_i\} - d_i} \prod_{j=1}^{d_i} x_{a_{ij}}$$

   y $(f^*)_*(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i} x_{a_{ij}}$.

2. Dado $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ homogéneo, $F = x_{n+1}^k (F_*)^*$, siendo k la mayor potencia de x_{n+1} que divide a todos los monomios de F.
   Si $F(x_1, \dots, x_{n+1}) \coloneqq \sum_{i=1}^k x_{n+1}^{b_i} \prod_{j=1}^{d - b_i} x_{a_{ij}}$, entonces $F_*(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d-b_i} x_{a_{ij}}$ y

   $$\begin{aligned} (F_*)^*(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^k x_{n+1}^{\max\{d - b_i\}} \prod_{j=1}^{d-b_i} \frac{x_{a_{ij}}}{x_{n+1}} = \sum_{i=1}^k x_{n+1}^{d - \min\{b_i\} - d + b_i} \prod_{j=1}^{d-b_i} x_{a_{ij}} \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^{\min\{b_i\}}} \sum_{i=1}^k x_{n+1}^{b_i} \prod_{j=1}^{d-b_i} x_{a_{ij}} = \frac{F}{x_{n+1}^{\min\{b_i\}}} \end{aligned}$$

Sean $f \in \mathbb{K}[x, y]$ y $\mathcal{L} \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \mid f(x, y) = 0\}$, llamamos **ampliación proyectiva** o **completación proyectiva** de $\mathcal{L}$ a $\overline{\mathcal{L}} \coloneqq \{< (x, y, z) > \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid f^*(x, y, z) = 0\}$, y para $\hat{\mathcal{L}} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, la **parte afín** de $\hat{\mathcal{L}}$ es $\hat{\mathcal{L}}^{\text{afín}} \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \mid < (x, y, 1) > \in \hat{\mathcal{L}}\}$. Vemos que para $F \in \mathbb{K}[x, y, z]$ homogéneo y $\hat{\mathcal{L}} \coloneqq \{F(x, y, z) = 0\}$, $\hat{\mathcal{L}}^{\text{afín}} = \{(x, y) \mid F(x, y, 1) = 0\} = \{(x, y) \mid F_*(x, y) = 0\}$. Entonces $\overline{\hat{\mathcal{L}}^{\text{afín}}} = \{< (a, b, c) > \mid (F_*)^*(a, b, c) = 0\} = \hat{\mathcal{L}} \cup \{< (x, y, 0) > \mid F(x, y, 0) = 0\}$, y si F no es divisible por z es $\overline{\hat{\mathcal{L}}^{\text{afín}}} = \hat{\mathcal{L}}$.

Capítulo 4

Formas bilineales y cuadráticas

Una **forma bilineal** en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es una aplicación $\langle\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que $\forall u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$.
2. $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$.
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$.

Una forma bilineal es **simétrica** si $\forall u, v \in V, \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, y es **alternada** si $\forall u \in V, \langle u, u\rangle = 0$. En $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, una forma bilineal simétrica tal que $\forall u \neq 0, \langle u, u\rangle > 0$ es un **producto escalar**. Llamamos **espacio bilineal** o **cuadrático** a un par $(V, \langle\cdot\rangle)$ formado por un espacio vectorial V y una forma bilineal simétrica $\langle\cdot\rangle$ en él. Llamamos $\mathcal{B}(V)$ al conjunto de formas bilineales simétricas en V.

Sean $\langle\cdot\rangle$ una forma bilineal sobre el espacio vectorial V con base $(e_1, \dots, e_n)$ y $A \coloneqq (a_{ij} \coloneqq \langle e_i, e_j\rangle) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces si $x = \sum x_i e_i$ e $y = \sum y_i e_i$, se tiene

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i e_i, y_j e_j\rangle = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij}$$

y por tanto $\langle X, Y\rangle = X^t A Y$. La matriz A es simétrica si $\langle\cdot\rangle$ lo es, y se llama **matriz de la forma bilineal** en la base dada.

Un **forma cuadrática** en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es una aplicación $q : V \to \mathbb{K}$ tal que $\forall u \in V, \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$.
2. $\langle\cdot\rangle : V \times V \to K$ dada por $\langle u, v\rangle \coloneqq \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$ es una forma bilineal simétrica en V, la **forma bilineal asociada** o **forma polar** de q.

Llamamos $\mathcal{Q}(V)$ al conjunto de formas cuadráticas en V. La aplicación $\mathcal{Q}(V) \to \mathcal{B}(V)$ que asocia a cada forma cuadrática su forma polar es biyectiva y su inversa asocia a cada forma bilineal simétrica la forma cuadrática dada por $q(u) \coloneqq \langle u, u \rangle$. **Demostración:** Sea $\langle \cdot \rangle \in \mathcal{B}(V)$ y $q(u) \coloneqq \langle u, u \rangle$, es claro que $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$. Por otra parte,

$$\frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v)) = \frac{1}{2}(\langle u+v, u+v \rangle - \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle) = \frac{1}{2} \cdot 2\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle$$

Sean ahora q una forma cuadrática, $\langle \cdot \rangle$ su forma bilineal asociada y $q' \in \mathcal{Q}(V)$ dada por $q'(u) = \langle u, u \rangle$, $q'(u) = \langle u, u \rangle = \frac{1}{2}(q(2u) - q(u) - q(u)) = \frac{1}{2}(4q(u) - 2q(u)) = q(u)$.

Esta correspondencia permite asociar una matriz $A \coloneqq (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a una forma cuadrática q en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n < +\infty$, pues si $\langle \cdot \rangle$ es la forma polar de q, $q(u) = \langle u, u \rangle = u^t A u$.

4.1. Cambios de base

Sean $(V, \langle \cdot \rangle)$ un espacio bilineal, $\mathcal{C} \coloneqq (u_1, \dots, u_n)$ y $\mathcal{B} \coloneqq (v_1, \dots, v_n)$ bases de V donde $\langle \cdot \rangle$ tiene matrices respectivas $A \coloneqq (a_{ij})$ y $B \coloneqq (b_{ij})$, X e Y las matrices columna de las coordenadas de dos vectores en la base $\mathcal{C}$, X' e Y' las de los mismos vectores en la base $\mathcal{B}$ y P la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Entonces $X = PX'$ e $Y = PY'$, luego $X^t A Y = (PX')^t A (PY') = (X')^t (P^t A P) Y'$ y por tanto $B = P^t A P$.

Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son **congruentes** si existe una matriz invertible P tal que $B = P^t A P$, y escribimos $A \sim B$. Esta es una relación de equivalencia.

AlgL
$A, B \in M_n(K)$ son **semejantes** si $\exists P \in M_n(K) : B = P^{-1} A P$.

Dos formas bilineales $\langle \cdot \rangle$ en V y $\langle \cdot \rangle'$ en V' son **equivalentes**, escrito $\langle \cdot \rangle \sim \langle \cdot \rangle'$, si existen bases respectivas de V y V' respecto de las cuales las formas bilineales tiene la misma matriz asociada.

Dos espacios bilineales $(V, \langle \cdot \rangle)$ y $(V', \langle \cdot \rangle')$ son **isométricos** si existe un isomorfismo $f : V \to V'$ tal que $\forall u, v \in V, \langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle'$, y decimos que f es una **isometría**.

Dados dos espacios bilineales $(V, \langle \cdot \rangle)$ y $(V', \langle \cdot \rangle')$, si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases respectivas de V y V' y A y A' son las matrices respectivas de $\langle \cdot \rangle$ y $\langle \cdot \rangle'$ respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, entonces

$$A \sim A' \iff \langle \cdot \rangle \sim \langle \cdot \rangle' \iff (V, \langle \cdot \rangle), (V', \langle \cdot \rangle') \text{ isométricos}$$

$1 \implies 2$] Existe P invertible tal que $A' = P^t A P$, luego en la base $\mathcal{B}''$ en la que P es matriz de cambio de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}$, $\langle \cdot \rangle$ tiene matriz A'.

$2 \implies 3$] Si $\mathcal{C} \eqqcolon (v_1, \dots, v_n)$ y $\mathcal{C}' \eqqcolon (v'_1, \dots, v'_n)$ son bases en las que $\langle \cdot \rangle$ y $\langle \cdot \rangle'$ tienen la misma matriz asociada $C \coloneqq (c_{ij})$, entonces $\langle v_i, v_j \rangle = c_{ij} = \langle v'_i, v'_j \rangle$, luego el isomorfismo $v_i \mapsto v'_i$ es una isometría.

$3 \implies 1$] Sea $f : V \to V'$ una isometría y $\mathcal{B} \coloneqq (v_1, \dots, v_n)$, entonces $\mathcal{B}' \coloneqq (f(v_1), \dots, f(v_n))$ es una base de V' y, como $\langle v_i, v_j \rangle = \langle f(v_i), f(v_j) \rangle' \eqqcolon c_{ij}$, ambas formas bilineales tienen la misma matriz $C \coloneqq (c_{ij})$, y entonces $A \sim C \sim A'$.

4.2. Ortogonalidad

Sean $(V,\langle\cdot\rangle)$ un espacio bilineal y E un subespacio de V, llamamos **subespacio ortogonal** a E al subespacio $E^\perp := \{v \in V \mid \forall e \in E, \langle v, e\rangle = 0\}$. Dos vectores $u, v \in V$ son **ortogonales**, **perpendiculares** o **conjugados** si $\langle u, v\rangle = 0$.

Llamamos **radical** de V a $Rad(V) := V^\perp$. Una forma bilineal simétrica $\langle\cdot\rangle$ en V es **no degenerada** si $Rad(V) = 0$. Si A es la matriz asociada a $\langle\cdot\rangle$ en la base $\mathcal{B}$ de V, $\langle\cdot\rangle$ es no degenerada si y sólo si $|A| \neq 0$. **Demostración:** Sea $\mathcal{B} =: (u_1,\dots,u_n)$, un vector

$$u := \sum \alpha_i u_i \in Rad(V) \iff \langle u, v\rangle = 0 \forall v \in V \iff \langle u, u_i\rangle = 0 \forall i \iff$$

$$\iff \forall i, \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1} & \dots & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto el radical está formado por los vectores cuyas coordenadas constituyen el núcleo de A, que se reduce al vector 0 si y sólo si $|A| \neq 0$.

Un vector es **isótropo** si $\langle u, u\rangle = 0$, y un subespacio $U \leq V$ es (**totalmente**) **isótropo** si todo vector de U es isótropo, y es **anisótropo** si no contiene vectores isótropos no nulos. Si todos los vectores son isótropos, entonces $\langle\cdot\rangle$ es idénticamente nula, pues en tal caso $0 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + 2\langle u, v\rangle = 2\langle u, v\rangle$ para cualesquiera $u, v \in V$.

4.3. Diagonalización

Dado un espacio bilineal $(V,\langle\cdot\rangle)$ y $E \leq V$, si $\langle\cdot\rangle|_E$ es no degenerada entonces $V = E \oplus E^\perp$. **Demostración:** La suma es directa porque $E \cap E^\perp = Rad(E) = 0$. Sea $\mathcal{B} := (e_1,\dots,e_m)$ una base de E y $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matriz de $\langle\cdot\rangle|_E$, entonces $|A| \neq 0$ y, dado $u \in V$, el sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle u, e_m\rangle \end{pmatrix}$$

tiene solución única y $x := \sum x_i e_i \in E$. Sea $v := u - x$, $v \in E^\perp \iff \forall i, \langle e_i, v\rangle = 0$, pero $\langle e_i, v\rangle = \langle e_i, u\rangle - \sum_j x_j \langle e_i, e_j\rangle = \langle e_i, u\rangle - \sum_j a_{ij} x_j = 0$, luego todo vector $u \in V$ se puede descomponer en un vector $x \in E$ y otro $v \in E^\perp$.

Como **teorema**, para todo espacio bilineal $(V,\langle\cdot\rangle)$ existe una base ortogonal, y por tanto la matriz de $\langle\cdot\rangle$ es siempre de la forma $\text{diag}(d_1,\dots,d_m,0,\dots,0)$ (matriz diagonal) con $d_i \neq 0 \forall i \in \{1,\dots,m\}$. **Demostración:** Si V tiene dimensión 1 toda base es ortogonal. Supongamos que la dimensión de V es $n > 1$ y el teorema se cumple para dimensión $n-1$. Si $\langle\cdot\rangle$ es nula, toda base es ortogonal. De lo contrario existe un vector e_1 no isótropo y, si $E :=< e_1 >$, $\langle\cdot\rangle|_E$ es no degenerada, por lo que tenemos $V = E \oplus E^\perp$ y, por la hipótesis de inducción, $E^\perp$ tiene una base $(e_2,\dots,e_n)$ ortogonal y la base $(e_1,\dots,e_n)$ de V también lo es.

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son congruentes si y sólo si una se puede obtener de la otra por operaciones elementales, las mismas por filas que por columnas.

$\Longrightarrow$] Existe P invertible tal que $P^t A P = B$. Al ser invertible debe ser producto de matrices elementales, $P^t =: E_1 \cdots E_k$, con lo que $B = E_k \cdots E_1 A E_1^t \cdots E_k^t$, pero la traspuesta de una matriz elemental que representa una operación por filas representa la misma operación por columnas.

$\Longleftarrow$] Si $B = E_k \cdots E_1 A E_1^t \cdots E_k^t$, basta tomar $P := E_1^t \cdots E_k^t$.

Así, para obtener a partir de una matriz simétrica A una matriz diagonal congruente:

operación diagonalizar(var A: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)
  si $n > 1$ **y** $A \neq 0$ **entonces**
    si la primera columna es no nula **entonces**
      si no hay ningún i con $a_{ii} \neq 0$ **entonces**
        Sumar a la fila 1 la fila i, para algún i con $a_{i1} \neq 0$
        Sumar a la columna 1 la columna i
      finsi
      Tomar i con $a_{ii} \neq 0$; intercambiar filas 1 e i y columnas 1 e i
      Hacer ceros en la primera columna con operaciones fila
      Hacer las mismas operaciones columna // *Lo que hace ceros en la primera fila*
    finsi
    diagonalizar(A[2..n,2..n])
  finsi

Para recordar los cambios, escribimos una matriz identidad al lado de A y registramos en ella las operaciones elementales de filas, o bien las de columnas. La **diagonalización por completación de cuadrados** es igual pero trabajando con la forma cuadrática:

operación diagonalizar(var q: $\mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$) // *Trabajamos con coordenadas*
  si $n > 1$ **y** $q \neq 0$ **entonces**
    si el valor de q depende de x_1 **entonces**
      si no hay ningún elemento $a_{ii}x_i^2$ con $a_{ii} \neq 0$ **entonces**
        Tomar un término $a_{ij}x_ix_j$ con $a_{ij} \neq 0$
        Hacer el cambio $x_i =: x'_i + x'_j$, $x_j =: x'_i - x'_j$ y $x_k =: x'_k, k \neq i, j$
      finsi
      Tomar i con $a_{ii} \neq 0$; intercambiar x_i y x_1
      Tomar p y r de $q(x_1, \dots, x_n) =: a_{11}x_1^2 + x_1 p(x_2, \dots, x_n) + r(x_2, \dots, x_n)$
      Reescribir q como $a_{11}(x_1 + \frac{p(x_2,\dots,x_n)}{2a_{11}})^2 - \frac{p(x_2,\dots,x_n)}{4a_{11}} + r(x_2, \dots, x_n)$
      Hacer el cambio $x'_1 := x_1 + \frac{p(x_2,\dots,x_n)}{2a_{11}}$ y $x'_j := x_j, j \neq 1$
    finsi
    diagonalizar($q(0, x_2, \dots, x_n)$)
  finsi

Como **teorema**, todo endomorfismo simétrico $f : V \to V$ diagonaliza con una base ortonormal de vectores propios. **Demostración:** Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ los valores propios de f y $U := V_{(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus V_{(\alpha_m)}$, siendo $V_{(\alpha_i)}$ el subespacio propio correspondiente al valor propio α_i. Para ver que $U = V$, primero observamos que $f(U) \subseteq U$, pues si $v_i \in V_{(\alpha_i)}$ entonces $f(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i \alpha_i v_i \in U$. Por otro lado, si $u \in U$ y $w \in U^\perp$ entonces $f(u) \in U$ y $\langle f(w), u \rangle = 0 = \langle w, f(u) \rangle$. Consideremos el endomorfismo simétrico $f|_{U^\perp}$. Como todos los vectores propios de f están en U, el endomorfismo $f|_{U^\perp}$ no tiene vectores propios y por tanto $U^\perp = 0$, luego $U = V$. Si tomamos una base ortonormal de cada $V_{(\alpha_i)}$, al juntarlas obtenemos una base de V ortonormal.

De aquí que toda matriz simétrica real $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ admite una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = P^tAP$ es diagonal.

4.4. Rango

Sean $(V, \langle\cdot\rangle)$ un espacio bilineal y A la matriz de $\langle\cdot\rangle$ en cierta base, llamamos **rango** de $\langle\cdot\rangle$ a $\text{rg}(\langle\cdot\rangle) := \text{rg}(A) = \dim(V) - \dim Rad(\langle\cdot\rangle)$. Dadas las formas bilineales $\langle\cdot\rangle \sim \langle\cdot\rangle'$ en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, $\text{rg}(\langle\cdot\rangle) = \text{rg}(\langle\cdot\rangle')$ y, si A y B son las matrices respectivas de $\langle\cdot\rangle$ y $\langle\cdot\rangle'$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|B| = \lambda^2|A|$. **Demostración:** Si $A \sim B$, existe P invertible tal que $B = P^tAP$, luego A y B tienen igual rango y $|B| = \lambda^2|A|$ con $\lambda := |P|$.

Un cuerpo es **algebraicamente cerrado** si cualquier polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$. Como **teorema**, dos formas bilineales simétricas $\langle\cdot\rangle$ y $\langle\cdot\rangle'$ con igual rango en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, siendo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, son equivalentes. **Demostración:** Sabemos que en cierta base, la matriz de $\langle\cdot\rangle$ es $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_m, 0, \dots, 0)$, siendo $m := \text{rg}(\langle\cdot\rangle)$, con $d_1, \dots, d_m \neq 0$. Tomando la matriz invertible

$$P := \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_m}}, 1, \dots, 1)$$

tenemos que

$$P^tDP = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{m}, 0, \dots, 0)$$

Haciendo lo mismo con $\langle\cdot\rangle'$ obtenemos que su matriz en cierta base también es congruente con esta misma matriz, luego ambas son congruentes.

Por tanto, dadas dos matrices simétricas A y B sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, $A \sim B \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

4.5. Cuerpos ordenados y signatura

Un cuerpo $\mathbb{K}$ es **ordenado** si existe un $P \subseteq \mathbb{K}$, cuyos elementos se llaman **positivos**, tal que:

1. $\mathbb{K} = P \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} -P$. A los elementos de $-P := \{-x\}_{x \in P}$ los llamamos **negativos**.
2. Para $x, y \in P$, $x + y, xy \in P$.

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son ordenados, mientras que $\mathbb{C}$ no lo es. Escribimos $x \geq 0$ si x es positivo o $x = 0$, y definimos la relación de orden total $x \leq y :\iff y - x \geq 0$.

Una forma bilineal $\langle\cdot\rangle$ en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, siendo $\mathbb{K}$ ordenado, es:

- **Semidefinida positiva** si $\forall u \in V, \langle u, u\rangle \geq 0$.
- **Semidefinida negativa** si $\forall u \in V, \langle u, u\rangle \leq 0$.
- **Definida positiva** si $\forall u \neq 0, \langle u, u\rangle > 0$.
- **Definida negativa** si $\forall u \neq 0, \langle u, u\rangle < 0$.

Las mismas definiciones se aplican a una forma cuadrática. Sean $(V, \langle\cdot\rangle)$ un espacio bilineal sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $A := (a_{ij})$ la matriz de $\langle\cdot\rangle$ en cierta base $\mathcal{C} := (e_1, \dots, e_n)$ y definimos

$$d_1 = a_{11}, d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, d_n = |A|$$

Si los $d_1, \dots, d_n$ son todos no nulos, hay una base en que la matriz de $\langle\cdot\rangle$ es $\mathrm{diag}(d_1, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}})$. **Demostración:** Sea $E :=< e_1, \dots, e_{n-1} >$, la matriz de $\langle\cdot\rangle$ en E es la matriz A sin la última fila y columna, cuyo determinante es $d_{n-1} \neq 0$, luego es no degenerada y $V = E \oplus E^\perp$. Sea $v \in E^\perp \backslash \{0\}$, $(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ es una base de V, y la matriz de $\langle\cdot\rangle$ en esta base es

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}$$

Tenemos $A \sim B$, luego existe P invertible con $A = P^t BP$. Sea $\lambda := |P|$, $|A| = \lambda^2 |B|$ y $d_n = \lambda^2 d_{n-1} b$, y entonces la matriz de $\langle\cdot\rangle$ en la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, w := \lambda v)$ es como B pero cambiando b por $\frac{d_n}{d_{n-1}}$. El resultado sigue por inducción.

De aquí que, si además $\mathbb{K}$ es ordenado, la forma bilineal es definida positiva si y sólo si $d_1, \dots, d_n > 0$, y es definida negativa si y sólo si $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, etc.

El **teorema de Sylvester** afirma que si $(V, \langle\cdot\rangle)$ es un espacio bilineal sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ordenado, V se descompone en suma directa ortogonal como $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$, donde $\langle\cdot\rangle$ restringida a V_+, a V_- y a V_0 es definida positiva, definida negativa y nula, respectivamente. Además, $p := \dim(V_+)$ y $m := \dim(V_-)$ son únicos, y al par (p, m) lo llamamos la **signatura** de $\langle\cdot\rangle$. **Demostración:** Sea $\mathcal{C} := (e_1, \dots, e_n)$ una base de V donde la matriz de la forma bilineal es

$$\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_p, d_{p+1}, \dots, d_{p+m}, 0, \dots, 0)$$

con $d_i > 0$ para $i \in \{1, \dots, p\}$ y $d_i < 0$ para $i \in \{p+1, \dots, p+m\}$. Es claro que la descomposición dada por

$$V_+ :=< e_1, \dots, e_p >, \quad V_- :=< e_{p+1}, \dots, e_{p+m} >, \quad V_0 :=< e_{p+m+1}, \dots, e_n >$$

cumple las condiciones. Para la unicidad, supongamos $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0 = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$. Sea $\pi_+ : V \to V_+$ la proyección canónica de V sobre V_+, $\ker(\pi|_{W_+}) = \ker(\pi) \cap W_+ = (V_- \oplus V_0) \cap W_+$. Sea $u \in (V_- \oplus V_0) \cap W_+$, tenemos que $u = u_- + u_0$ con $u_- \in V_-$ y $u_0 \in V_0$ y como $u \in W_+$, $\langle u, u\rangle \geq 0$, pero

$$0 \leq \langle u, u\rangle = \langle u_-, u_-\rangle + 2\langle u_-, u_0\rangle + \langle u_0, u_0\rangle = \langle u_-, u_-\rangle \leq 0$$

de donde $\langle u, u\rangle = 0$ y, por ser $u \in W_+$, $u = 0$. Por tanto $\pi|_{W_+}$ es inyectiva y $\dim W_+ \leq \dim V_+$. De forma parecida podemos probar que $\dim W_- \leq \dim V_-$ y $\dim W_0 \leq \dim W_0$, probando el teorema.

De aquí que, si $(V, \langle\cdot\rangle)$ y $(V, \langle\cdot\rangle')$ son espacios bilineales isométricos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ordenado, entonces $\langle\cdot\rangle$ y $\langle\cdot\rangle'$ tienen la misma signatura. La **ley de inercia de Sylvester** afirma que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el recíproco de esto también se cumple. En efecto, si (p, m) es la signatura de $\langle\cdot\rangle$ y $\langle\cdot\rangle'$, existe una base de V en que la matriz de $\langle\cdot\rangle$ es $\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_p, d_{p+1}, \dots, d_{p+m}, 0, \dots, 0)$, siendo $d_1, \dots, d_p > 0$ y $d_{p+1}, \dots, d_{p+m} < 0$, pero los positivos difieren de 1 en un cuadrado y los negativos de -1 en un cuadrado, por lo que hay una base en que la matriz de $\langle\cdot\rangle$ es

$$D := \mathrm{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{m}, 0, \dots, 0)$$

y, análogamente, hay una base en que la matriz de $\langle\cdot\rangle'$ es D.

4.6. Descomposición de Witt

Sea $(V, \langle\cdot\rangle)$ un espacio bilineal, llamamos **simetría respecto al vector** $v \in V$ no isótropo a la isometría $s_v : V \to V$ dada por

$$s_v(u) = -u + 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

Dados $u, v \in V$ no isótropos con $\langle u, u\rangle = \langle v, v\rangle$, existe una isometría $f : V \to V$ con $f(u) = v$. **Demostración:** Si $u + v$ es no isótropo,

$$s_{u+v}(u) = -u + \frac{2\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + 2\langle u, v\rangle}(u + v) = -u + \frac{2\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle}{2\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle}(u + v) = v$$

Si $u + v$ es isótropo, $u - v$ no lo es, pues $\langle u + v, u + v\rangle + \langle u - v, u - v\rangle = 4\langle u, u\rangle \neq 0$, y entonces definimos $t(w) := -w$ y vemos que $(t \circ s_{u-v})(u) = v$.

Como **teorema**, si $D_1 := \text{diag}(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ y $D_2 := \text{diag}(a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ son matrices con $a_1, \dots, a_r \neq 0$, si D_1 es congruente con D_2 entonces $\text{diag}(b_{r+1}, \dots, b_n)$ lo es con $\text{diag}(c_{r+1}, \dots, c_n)$. **Demostración:** Basta ver que esto se cumple con $r = 1$. Sean $D_1 = \text{diag}(a, b_2, \dots, b_n)$ y $D_2 = \text{diag}(a, c_2, \dots, c_n)$ matrices de una forma bilineal $\langle\cdot\rangle$ en las bases $(u_1, \dots, u_n)$ y $(v_1, \dots, v_n)$, respectivamente. Entonces $\langle u_1, u_1\rangle = a = \langle v_1, v_1\rangle \neq 0$ y existe una isometría s con $s(u_1) = v_1$, por lo que $\{s(u_1), \dots, s(u_n)\}$ es base ortogonal de V y $E :=< s(u_2), \dots, s(u_n) >=< s(u_1) >^\perp =< v_1 >^\perp =< v_2, \dots, v_n >$. La matriz de $\langle\cdot\rangle|_E$ es $\text{diag}(b_2, \dots, b_n)$ en $(s(u_2), \dots, s(u_n))$ y es $\text{diag}(c_2, \dots, c_n)$ en $(v_2, \dots, v_n)$.

El **corolario de cancelación de Witt** afirma que si $U_1, U_2 \leq V$ son tales que $\langle\cdot\rangle|_{U_1}$ y $\langle\cdot\rangle|_{U_2}$ son no degeneradas y U_1 es isométrico a U_2, entonces $U_1^\perp$ es isométrico a $U_2^\perp$. **Demostración:** Tenemos $V = U_1 \oplus U_1^\perp = U_2 \oplus U_2^\perp$, existen bases respectivas $(u_1, \dots, u_r)$ y $(v_1, \dots, v_r)$ de U_1 y U_2 respecto de las cuales la matriz de $\langle\cdot\rangle|_{U_1}$ y de $\langle\cdot\rangle|_{U_2}$ es $\text{diag}(a_1, \dots, a_r)$ con $a_1, \dots, a_r \neq 0$. Sean $(u_{r+1}, \dots, u_n)$ y $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ bases respectivas de $U_1^\perp$ y $U_2^\perp$, si $D_1 := \text{diag}(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ y $D_2 := \text{diag}(a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ son las matrices de $\langle\cdot\rangle$ respecto de $(u_1, \dots, u_n)$ y $(v_1, \dots, v_n)$, respectivamente, entonces $D_1 \sim D_2$ y $\text{diag}(b_{r+1}, \dots, b_n) \sim \text{diag}(c_{r+1}, \dots, c_n)$.

Un **plano hiperbólico** es un espacio bilineal $(V, \langle\cdot\rangle)$ de dimensión 2 donde V contiene vectores isótropos no nulos y $\langle\cdot\rangle$ es no degenerada. Un espacio bilineal $(V, \langle\cdot\rangle)$ de dimensión 2 es un plano hiperbólico si y sólo si existe una base de V respecto la cual la matriz de $\langle\cdot\rangle$ es $\text{diag}(1, -1)$. Por tanto todos los planos hiperbólicos sobre un mismo cuerpo son isométricos.

$\Longrightarrow$] Sean $u \neq 0$ isótropo, $v \in V$ tal que (u, v) es una base y $v' := \frac{v}{\langle u, v\rangle}$, la matriz de $\langle\cdot\rangle$ en (u, v') es

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

con $a := \langle v', v'\rangle$. Sea ahora $w := xu + v'$ tal que $\langle w, w\rangle = 1$, entonces $1 = \langle xu + v', xu + v'\rangle = x^2\langle u, u\rangle + \langle v', v'\rangle + 2x\langle u, v'\rangle = a + 2x$ y por tanto $w = \frac{1-a}{2}u + v'$. Sea $w' \in< w >^\perp$, la matriz de $\langle\cdot\rangle$ en la base (w, w') es

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

con $b := \langle w', w' \rangle$. Las matrices A y B son congruentes, luego sus determinantes difieren en un cuadrado y $b = -\lambda^2$ para cierto λ. Sea $w'' = \frac{w'}{\lambda}$, $\langle w'', w'' \rangle = -1$ y la matriz de $\langle \cdot \rangle$ en (w, w'') es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Longleftarrow$] Si identificamos los vectores con sus coordenadas respecto a la base en la que la matriz de $\langle \cdot \rangle$ es $\mathrm{diag}(1, -1)$, entonces $(1, -1)$ es isótropo no nulo y, si hubiera un $v := (v_1, v_2)$ con $\langle u, v \rangle = 0 \forall u$, en particular $\langle (1, 0), v \rangle = v_1 = 0$ y $\langle (0, 1), v \rangle = -v_2 = 0$ y sería $v = 0$, luego $\langle \cdot \rangle$ es no degenerada.

Si $\dim(V) \geq 2$, V contiene vectores isótropos no nulos y $\langle \cdot \rangle$ es no degenerada, entonces V contiene un plano hiperbólico. En efecto, sea $u \neq 0$ isótropo, existe $v \in V$ con $\langle u, v \rangle = 0$, pues de lo contrario $u \in \mathrm{Rad}(V) = 0$, y podemos ver que $< u, v >$ es un plano hiperbólico.

El **teorema de descomposición de Witt** afirma que, sea $(V, \langle \cdot \rangle)$ un espacio bilineal con $\langle \cdot \rangle$ no degenerada, entonces

$$V =: P_1 \oplus \cdots \oplus P_s \oplus W$$

siendo $P_1, \dots, P_k$ planos hiperbólicos y W anisótropo, y si $V = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_t \oplus W'$ es otra descomposición ortogonal de V con $Q_1, \dots, Q_t$ planos hiperbólicos y W' anisótropo, entonces $s = t$ y W es isométrico a W'. Llamamos **descomposición de Witt** a cualquiera de este tipo, y llamamos a s el **índice de Witt**. **Demostración:** Para $\dim(V) = 1$, si hubiera un vector $u \neq 0$ isótropo, sería $\langle \lambda u, u \rangle = 0$ para todo λ y por tanto $\mathrm{Rad}(V) \neq 0\#$, luego V es anisótropo. Si $n := \dim(V) \geq 2$ y V no es anisótropo, debe contener un plano hiperbólico P y $V = P \oplus P^\perp$. $\langle \cdot \rangle|_{P^\perp}$ es no degenerada y por tanto el resultado sigue por inducción. Para la unicidad, sea $V = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s \oplus W = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_t \oplus W'$ y supongamos $t \geq s$. Como todos los planos hiperbólicos sobre un mismo cuerpo son isométricos, $P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$ es isométrico a $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_s$ y, por el teorema de cancelación de Witt, W es isométrico a $Q_{s+1} \oplus \cdots \oplus Q_t \oplus W'$. Entonces debe ser $t = s$ porque de lo contrario tendríamos un subespacio anisótropo isométrico a uno que no lo es, y por tanto W debe ser isométrico a W'.

4.7. Cónicas proyectivas y formas cuadráticas

Una **cónica proyectiva** en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ es una clase de equivalencia en el conjunto de polinomios homogéneos de grado 2 en $\mathbb{K}[x, y, z]$, o de formas cuadráticas no nulas de dimensión 3, bajo la relación $q \sim q' :\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\} : q' = \lambda q$. Escribimos $\mathcal{C}_q := [q]$, y la identificamos con el conjunto de puntos $[a, b, c]$ en los que $q(a, b, c) = 0$. En $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, una cónica proyectiva es la ampliación proyectiva de una cónica afín de matriz proyectiva igual a la matriz de la forma cuadrática:

- Dada una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, su homogeneización es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$. Los puntos del infinito son aquellos en que $z = 0$, siendo la única solución cuando $x = y = 0$. Como $[0, 0, 0]$ no existe, la elipse no tiene puntos en el infinito.

- Dada una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, su homogeneización es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2$ y vemos que sus puntos del infinito son aquellos en que $z = 0$ y por tanto $x = \pm \frac{a}{b} y$, con lo que la hipérbola tiene dos puntos del infinito correspondientes a sus asíntotas.

- Dada una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, su homogeneización es $y^2 = 2pxz$, siendo los puntos en el infinito aquellos en que $y = z = 0$, con lo que la parábola tiene un punto en el infinito correspondiente a su eje.

Dos puntos $P, Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ son **conjugados** respecto de una cónica proyectiva de matriz proyectiva $\overline{A}$ si $[P]^t\overline{A}[Q] = 0$. $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ es un punto **singular** respecto de una cónica proyectiva si es conjugado de cualquier $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, y es **regular** en caso contrario.

Sea $\mathcal{Q}$ una cónica no degenerada de matriz $\overline{A}$, llamamos **recta polar** de $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ respecto de $\mathcal{Q}$ a $r_P := \{X \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid [P]^t\overline{A}[X] = 0\}$, y decimos que P es el **polo** de la recta r_P.

Una recta es **tangente** a una cónica si la corta en un único punto. Por el principio de dualidad del plano proyectivo, podemos describir una cónica mediante los puntos que le pertenecen o como el conjunto de todas sus tangentes.

Una cónica es **no degenerada** si $\Delta := |\overline{A}| \neq 0$. Dos cónicas $\mathcal{C}_q$ y $\mathcal{C}_{q'}$ son **proyectivamente equivalentes** si podemos transformar una en la otra mediante un cambio de coordenadas proyectivas, si y sólo si la signatura de la forma bilineal asociada a una es igual u opuesta a la de la otra. Esto resulta en los siguientes tipos de cónicas:

Rango	Signatura	Ecuación reducida	Tipo de cónica
3	$(3,0)/(0,3)$	$x^2+y^2+z^2=0$	No degenerada imaginaria
	$(2,1)/(1,2)$	$x^2+y^2-z^2=0$	No degenerada real
2	$(2,0)/(0,2)$	$x^2+y^2=0$	Punto
	$(1,1)$	$x^2-y^2=0$	Par de rectas distintas
1	$(1,0)/(0,1)$	$x^2=0$	Recta doble