Análisis Funcional

Bibliografía:

- Bernardo Cascales, José Manuel Mira, José Orihuela, Matías Raja. *Análisis Funcional* (1ª ed., 2010).
- Pablo Miralles González, Purificación Hernández López, Mariano Garre Martínez. *Análisis Funcional—Notas de clase* (2023).
- Todd Kemp. *Cauchy's construction of* $\mathbb{R}$ (2016), pp. 9–10. Recuperado de https://mathweb.ucsd.edu/~tkemp/140A/Construction.of.R.pdf.
- Wikipedia, the Free Encyclopedia. *Locally integrable function.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Locally_integrable_function el 18 de diciembre de 2022.
- Wikipedia, the Free Encyclopedia. *Relatively compact subspace.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Relatively_compact_subspace el 11 de enero de 2023.
- Richard Haberman. *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 5th. ed. (2014). Pearson Education, p. 165.
- Ziosilvio. *Proof of Radon-Nikodym theorem* (2013). Recuperado de https://www.planetmath.org/proofofradonnikodymtheorem.
- Wikipedia, the Free Encyclopedia. *σ-finite measure.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/%CE%A3-finite_measure el 13 de enero de 2023.
- Wikipedia, the Free Encyclopedia. *Tychonoff space.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Tychonoff_space el 17 de enero de 2023.

Capítulo 1

Espacios de Banach

Salvo que se indique lo contrario, los espacios vectoriales son sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dados dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales X e Y, $f : X \to Y$ es **lineal conjugada** si $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X, f(ax + by) = \overline{a} f(x) + \overline{b} f(y)$.

1.1. Espacios vectoriales topológicos

Un **espacio vectorial topológico** (**e.v.t.**) es un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ donde E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $s : E \times E \to E$ y $p : \mathbb{K} \times E \to E$ dadas por $s(x, y) := x + y$ y $p(\alpha, x) := \alpha x$ son continuas en la topología producto, y entonces $\mathcal{T}$ es una **topología vectorial**.

Dados $\mathbb{K}$-espacios vectoriales E y F, un **operador** es una función lineal de E a F, y llamamos **dual algebraico** de E al conjunto de funciones de E a $\mathbb{K}$, las **formas lineales** de E. Si E y F son $\mathbb{K}$-e.v.t.s, $\mathcal{L}(E, F)$ es el conjunto de operadores continuos de E a F, y llamamos **dual topológico** de E a $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Dados e.l.t.s E y F, $T : E \to F$ es un **isomorfismo topológico** si es un isomorfismo y un homeomorfismo, y entonces E y F son **topológicamente isomorfos**.

TEM

Una **base de entornos** de $p \in X$ es una subfamilia $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{E}(p)$ tal que $\forall V \in \mathcal{E}(p), \exists U \in \mathcal{B}(p) : U \subseteq V$. [...] Un espacio topológico [...] satisface el **primer axioma de numerabilidad**, o es **1AN**, si todo punto posee una base de entornos numerable [...].

Si E es un $\mathbb{K}$-e.v.t.:

1. $s_a : E \to E$ con $y \in E$ y $p_\lambda : E \to E$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$ dados por $s_a(x) := x + a$ y $p_\lambda(x) := \lambda x$ son homeomorfismos.
2. La suma de un abierto y un subconjunto cualquiera de E es abierta en E.
3. La suma de un cerrado y un compacto de E es cerrada en E.
4. Un subespacio vectorial de X es propio si y sólo si su interior es vacío.
5. Si $F \subseteq E$ es un subespacio vectorial también lo es $\overline{F}$.

6. Si F es otro e.v.t. y $T : E \to F$ es lineal, T es continua si y sólo si lo es en 0, y si T es una forma lineal, T es continua si y sólo si $\ker T \leq E$ es cerrado.

$A \subseteq E$ es **equilibrado** si $\forall \alpha \in \mathbb{K}, (|\alpha| \leq 1 \implies \alpha A \subseteq A)$, es **absorbente** si $\forall x \in E, \exists \rho_0 > 0 : \forall \rho \in \mathbb{K}, (|\rho| \geq \rho_0 \implies x \in \rho A)$, y es **total** si $\overline{\text{span} A} = E$. Los entornos de 0 son absorbentes.

Si E es un $\mathbb{K}$-e.v.t. y $\mathcal{U}$ una base de entornos de 0:

1. Para $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $x + \alpha\mathcal{U}$ es base de entornos de x.
2. $\forall M \subseteq E, \overline{M} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (M + U)$.
3. $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subseteq U$.
4. $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U} : \forall \alpha \in \mathbb{K}, (|\alpha| \leq 1 \implies \alpha V \subseteq U)$.
5. Todo $U \in \mathcal{U}$ es absorbente.
6. $\tilde{\mathcal{U}} := \left\{\bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha U\right\}_{U \in \mathcal{U}}$ y $\overline{\mathcal{U}} := \{\overline{U}\}_{U \in \mathcal{U}}$ son bases de entornos de 0, con lo que toda e.v.t. tiene una base de entornos del 0 formada por conjuntos absorbentes, equilibrados y cerrados.

Una **base de filtro** en un conjunto S es un $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ no vacío tal que $\forall U, V \in \mathcal{U}, \exists W \in \mathcal{U} : W \subseteq U \cap V$, y se puede definir una topología en S tomando una base de filtros sobre cada punto, que actuará como base de entornos.

1.2. Espacios localmente convexos

Sean E un espacio vectorial y $\mathcal{U}$ una base de filtro en E formada por conjuntos absorbentes y equilibrados y tal que $\bigcap \mathcal{U} = 0$ y $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subseteq U$, existe una única topología vectorial sobre E tal que para $x \in E$, $\{x + U\}_{U \in \mathcal{U}}$ es base de entornos de x.

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, $q : E \to \mathbb{R}$ es **subaditiva** si $\forall x, y \in E, q(x + y) \leq q(x) + q(y)$, **positivamente homogénea** si $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, q(\lambda x) = \lambda q(x)$ y **absolutamente homogénea** si $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$. Una **seminorma** es una función $E \to \mathbb{R}$ subaditiva y absolutamente homogénea. Las seminormas son no negativas.

Sean E un espacio vectorial y $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^E$ una familia de seminormas con $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x \in E \mid p(x) = 0\} = 0$,

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigcap_{p \in \mathcal{F}} \{x \in E \mid p(x) < \varepsilon\} \right\}_{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \text{ finito}, \varepsilon > 0}$$

es una base de filtro formada por conjuntos convexos, absorbentes y equilibrados, con intersección vacía y tal que para $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ con $V + V \subseteq U$, y llamamos **topología asociada a $\mathcal{P}$** a la única topología vectorial sobre E que tiene a $\mathcal{U}$ como base de entornos de 0.

Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $A \subseteq E$ es **absolutamente convexo** si es convexo y equilibrado, si y sólo si $\forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (|\alpha| + |\beta| \leq 1 \implies \alpha x + \beta y \in A)$.

La intersección de conjuntos absolutamente convexos es absolutamente convexa, y llamamos **envoltura absolutamente convexa** de $A \subseteq E$, $\Gamma(A)$ a la intersección de todos los conjuntos absolutamente convexos que contienen a A.

La intersección de conjuntos convexos es convexa, y llamamos **envoltura convexa** de $A \subseteq E$, co$A$, a la intersección de todos los convexos que contienen a A, que es absolutamente convexa si A es equilibrado.

Un **espacio localmente convexo** es un e.v.t. $(E, \mathcal{T})$ con una base de entornos de 0 formada por conjuntos convexos, y entonces $\mathcal{T}$ es **localmente convexa**. Todo e.l.c. tiene una base de entornos del origen formada por conjuntos absolutamente convexos y cerrados. Un **espacio de Fréchet** es un e.l.c. metrizable y completo.

Dados un espacio vectorial E y $A \subseteq E$ absorbente, llamamos **funcional de Minkowski** asociado a A a $p_A : E \to \mathbb{R}$ dada por $p_A(x) := \inf\{t > 0 \mid x \in tA\}$, y entonces:

1. p_A es no negativa y positivamente homogénea.

2. Si A es convexo, p_A es subaditiva y $\{p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{p_A(x) \leq 1\}$.

3. Si A es absolutamente convexo, p_A es una seminorma.

Toda seminorma $p : E \to \mathbb{R}$ es el funcional de Minkowski asociado a $\{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$.

Si E es un e.v.t. y $C \subseteq E$ es convexo y absorbente, $0 \in \mathring{C}$ si y sólo si el funcional de Minkowski p_C es continuo en E, y entonces $\mathring{C} = \{p_C(x) < 1\}$ y $\overline{C} = \{p_C(x) \leq 1\}$.

Una seminorma $p : E \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si $\{x \in E \mid p(x) < 1\}$ es abierta, si y sólo si $0 \in \overbrace{\{p(x) < 1\}}^{\circ}$, si y sólo si p es continua en 0, si y sólo si existe una seminorma continua $q : E \to \mathbb{R}$ con $p \leq q$.

Como **teorema**, un e.v.t. $(E, \mathcal{T})$ es localmente convexo si y sólo si $\mathcal{T}$ está asociada a una familia de seminormas.

Dados dos e.l.c. E y F, $T : E \to F$ lineal es continua si y sólo si para toda seminorma continua $q : F \to \mathbb{R}$ existe una seminorma continua $p : E \to \mathbb{R}$ con $q \circ T \leq p$.

Como **teorema**, si E es un e.v.t., $E' \neq 0$ si y sólo si existe $U \in \mathcal{E}(0_E)$ convexo distinto de E.

Como **teorema**, un e.l.c. $(E, \mathcal{T})$ es metrizable si y sólo si es 1AN, si y sólo si $\mathcal{T}$ es asociada a una familia numerable de seminormas continuas.

1.3. Ejemplos de espacios localmente convexos

Si Z es un conjunto y $\mathbb{K}^Z$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\{f \mapsto |f(z)|\}_{z \in Z}$ es una familia de seminormas en $\mathbb{K}^Z$ que define la **topología de convergencia puntual**, $\mathcal{T}_\text{p}$, sobre $\mathbb{K}^Z$, en que una base de entornos en un $f : Z \to \mathbb{K}$ es

$$\Big\{\{g \in \mathbb{K}^Z \mid \forall z \in F, |f(z) - g(z)| < \varepsilon\}\Big\}_{F \subseteq Z \text{ finito}, \varepsilon > 0}.$$

Si X es un espacio topológico, llamamos $C(X)$ al subespacio de $(\mathbb{K}^X, \mathcal{T}_\text{p})$ de las funciones continuas y $C_\text{b}(X)$ al de las funciones continuas y acotadas.

X es **completamente regular** si para todo cerrado $A \subseteq X$ y $x \in X \setminus A$ existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua con $f(A) = 0$ y $f(x) = 1$, y entonces, si $\mathcal{K}$ es la familia de los compactos de X, la familia de seminormas $\{f \mapsto \max_{x \in K} |f(x)|\}_{K \in \mathcal{K}}$ en $C(X)$ tiene asociada una topología $\mathcal{T}_\text{K}$, la **topología de convergencia uniforme sobre compactos**, en que una base de entornos de $f \in C(X)$ es

$$\big\{\{g \in C(X) \mid \forall x \in K, |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}\big\}_{K \in \mathcal{K}, \varepsilon > 0}.$$

Una **sucesión exhaustiva de compactos** de un espacio topológico X es una sucesión $(K_n)_n$ de compactos con unión X y tal que cada $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$. Todo abierto $\Omega \subseteq \mathbb{K}^k$ es completamente regular y admite una sucesión exhaustiva de compactos $(K_n)_n$, y entonces $\mathcal{T}_\text{K}$ es la topología asociada a la familia $\{f \mapsto \text{máx}_{x\in K_n} |f(x)|\}_n$ y está asociada a la métrica

$$d(f,g) \coloneqq \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_{K_n}(f-g)}{1+p_{K_n}(f-g)},$$

y $(C(\Omega), \mathcal{T}_\text{K})$ es un espacio de Fréchet.

Teorema de Weierstrass: Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, el límite de una sucesión de funciones holomorfas en $(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{T}_\text{K})$ es holomorfa, y en particular $(\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}_\text{K})$ es un espacio de Fréchet.

FVV2

Llamamos **soporte** de una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ a $\text{sop}(g) \coloneqq \overline{\{g \neq 0\}}$[...].

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto:

1. El conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ m veces diferenciables con $\mathrm{d}^m f$ continua, $\mathcal{E}^m(\Omega) \coloneqq \mathcal{C}^m(\Omega)$, es un espacio de Fréchet con la **topología de convergencia uniforme sobre compactos de las funciones y sus derivadas hasta el grado** m, dada por la familia de seminormas

$$\left\{ p_K^m(f) \coloneqq \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leq m}} \sup_{x\in K} |\mathrm{D}^\alpha f(x)| \right\}_{K\subseteq\Omega \text{ compacto}},$$

donde

$$\mathrm{D}^\alpha f(x) \coloneqq \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

2. $\mathcal{E}(\Omega) \coloneqq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \coloneqq \bigcap_m \mathcal{C}^m(\Omega)$ es un e.l.c. metrizable con la **topología de convergencia uniforme sobre compactos de las funciones y todas sus derivadas**, dada por la familia de seminormas $\{p_K^m\}_{K\subseteq\Omega \text{ compacto}, m\in\mathbb{N}}$.

3. Si para $K \subseteq \Omega$ compacto, $\mathcal{D}_K(\Omega) \coloneqq \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{sop} f \subseteq K\}$, llamamos **base de distribuciones** a $\mathcal{D}(\Omega) \coloneqq \bigcup_{K\subseteq\Omega \text{ compacto}} \mathcal{D}_K(\Omega) \neq 0$ con la topología más fina que hace continuas las inclusiones $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$.

1.4. Espacios normados

Una **norma** es una seminorma q con $q^{-1}(0) = 0$. Un **espacio normado** es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial X con una norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$. Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un e.l.c. metrizable con la distancia $(x, y) \mapsto \|x - y\|$.

Un e.l.c. $(E, \mathcal{T})$ es **normable** si $\mathcal{T}$ es la topología asociada a una norma en E. Si E es un e.l.c., $A \subseteq E$ es **acotado** si $\forall U \in \mathcal{E}(0), \exists\rho > 0 : A \subseteq \rho U$, si y sólo si para toda seminorma $p : E \to \mathbb{R}$ continua es $\sup\{p(x)\}_{x\in A} < \infty$. **Teorema de Kolmogoroff:** Un e.l.c. es normable si y sólo si 0_E tiene un entorno acotado.

Si X es un espacio normado, llamamos $B_X := B[0,1] = \overline{B(0,1)} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, que es equilibrado y absorbente, y conjunto de **vectores unitarios** a $S_X := \partial B(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. La norma es uniformemente continua. Todo subespacio vectorial de un espacio normado es normado con la norma inducida.

Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado:

1. X es completo si y sólo si toda sucesión $\{y_n\}_n \subseteq X$ con $\sum_n \|y_n\|$ convergente cumple que $\sum_n y_n$ converge a un punto de X.
2. Todo subespacio vectorial de Banach de X es cerrado en X.
3. Si X es de Banach, todo subespacio vectorial cerrado es de Banach.

1.5. Operadores

Un operador entre espacios normados es **acotado** si es continuo, y si X es un $\mathbb{K}$-espacio normado, $X^* := X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

Sean X e Y $\mathbb{K}$-espacios normados:

1. Si $T : X \to Y$ es lineal, T es continuo si y sólo si lo es en 0, si y sólo si para $S \subseteq X$ acotado, $T(S) \subseteq Y$ es acotado, si y sólo si $\|T(S_X)\| \subseteq Y$ es acotado, si y sólo si $\exists M \geq 0 : \forall x \in X, \|T(x)\| \leq M\|x\|$, si y sólo si T es uniformemente continuo.
2. $\mathcal{L}(X, Y)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con norma
$$\|T\| := \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|T(x)\|,$$
tomando $\sup \emptyset := 0$, y si Y es un espacio de Banach, $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ también. En X^* esta norma se llama **norma dual**.
3. La composición de operadores acotados es un operador acotado.
4. En espacios de dimensión infinita hay operadores no acotados.

1.6. Isomorfismos topológicos

Una función T entre espacios normados es un isomorfismo topológico si y sólo si es lineal, suprayectiva y $\exists m, M > 0 : \forall x, m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|$.

Dos espacios normados son **isométricamente isomorfos** si entre ellos hay un isomorfismo topológico **isométrico**, es decir, que conserve distancias o, equivalentemente, normas. Dos normas $\|\cdot\|, |\cdot| : X \to \mathbb{R}$ son **equivalentes** si $1_X : (X, \|\cdot\|) \to (X, |\cdot|)$ es un isomorfismo topológico, si y sólo si $\exists m, M > 0 : \forall x \in X, m|x| \leq \|x\| \leq M|x|$, en cuyo caso ambas definen la misma topología.

Si X e Y son espacios normados topológicamente isomorfos, la completitud de uno equivale a la del otro.

Para todo espacio normado X existen un espacio de Banach $\hat{X}$ y un operador isométrico $J : X \to \hat{X}$ tales que $J(X)$ es denso en $\hat{X}$, y llamamos a $\hat{X}$ la **compleción** de X.

1.7. Espacios cociente

TS

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una relación de equivalencia $\sim$ en X, llamamos **topología cociente** en $X/\sim$ a $\{V \subseteq (X/\sim) \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$, donde $p : X \to X/\sim$ es la **proyección canónica** [...].

Dado un espacio vectorial X con un subespacio Y, llamamos **espacio vectorial cociente** X/Y al conjunto cociente de X bajo la relación de equivalencia $x \equiv y \iff x-y \in Y$ entendido como espacio vectorial con las operaciones heredadas de X, y llamamos **codimensión** de Y en X a la dimensión de X/Y. Si X es normado e Y es cerrado en X:

1. X/Y es un espacio normado con la **norma cociente** $\|x+Y\| \coloneqq \inf_{y\in Y} \|x+y\|$.
2. La proyección $X \to X/Y$ es lineal, continua y abierta.
3. La norma cociente genera la topología cociente.
4. Si X es de Banach también lo es X/Y.

Sean X un espacio normado e $Y, Z \leq X$, X es la **suma directa topológica** de Y y Z si $X = Y \oplus Z$ y las proyecciones canónicas $y + z \mapsto y$ e $y + z \mapsto z$ para $y \in Y$ y $z \in Z$ son continuas, si y sólo si $s : Y \times Z \to X$ dada por $s(y, z) \coloneqq y + z$ es un isomorfismo topológico, en cuyo caso Z es un **complementario topológico** de Y respecto de X.

1.8. Espacios normados de dimensión finita

Desigualdad de Hölder: Dados $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$ y $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\sum_k a_k b_k \leq \left(\sum_k a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

La **desigualdad de Schwarz** es la desigualdad de Hölder con $p = 2$.
Desigualdad de Minkowski: Para $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ y $p \geq 1$,

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos los espacios normados:

1. $\ell_n^p \coloneqq (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ para $p \in [1, \infty)$, donde
$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
2. $\ell_n^\infty \coloneqq (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ con $\|x\|_\infty \coloneqq \sup_{k=1}^n |x_k|$.

Si X es un espacio normado de dimensión finita n con base $(e_1, \dots, e_n)$, $T : \ell_n^1 \to X$ dado por $T(a_1, \dots, a_n) \coloneqq a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ es un isomorfismo topológico.

1. Todos los espacios normados de igual dimensión finta son topológicamente isomorfos.

2. Todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes.

3. Toda norma en $\mathbb{K}^n$ genera la topología producto.

4. Todo espacio de dimensión finita es de Banach.

5. Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.

6. Todo operador entre espacios normados con dominio de dimensión finita es continuo.

Teorema de Bolzano-Weierstrass: En espacios normados de dimensión finita, los cerrados acotados son compactos.[1]

Lema de Riesz: Dados un espacio normado X, $Y < X$ cerrado y $\varepsilon \in (0,1)$, existe $x \in X$ unitario con $d(x,Y) \geq 1-\varepsilon$. **Demostración:** Sea $x_0 \in X \setminus Y$, como Y es cerrado, $d := d(x_0,Y) > 0$, y como $d < \frac{d}{1+\varepsilon}$, existe $y_0 \in Y$ tal que $d \leq \|x_0 - y_0\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$. Sea entonces $x := \frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}$, para $y \in Y$ es

$$\|x-y\| = \left\| \frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x_0-y_0\|} \left\| x_0 - y_0 - \|x_0-y_0\| y \right\| =$$
$$= \frac{\left\| x_0 - (y_0 + \|x_0-y_0\| y) \right\|}{\|x_0-y_0\|} \geq \frac{d}{\|x_0-y_0\|} > 1-\varepsilon,$$

donde usamos que $y_0 + \|x_0-y_0\|y \in Y$, y entonces $d(x,Y) \geq 1-\varepsilon$.

Si X es un espacio normado de dimensión infinita, existen una sucesión $(M_n)_n$ de subespacios de X de dimensión finita con cada $M_n \subsetneq M_{n+1}$ y una sucesión de vectores unitarios $\{y_n\}_n \subseteq X$ con cada $y_n \in M_n$ y $d(M_n, y_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ con cada $x_n \in M_n$ y $d(M_n, x_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. **Demostración:** Tomamos $x_1 \in X$ unitario y por inducción, para $n \geq 1$, $M_n := \text{span}\{x_1,\dots,x_n\} \neq X$ por ser X de dimensión infinita, luego por el lema de Riesz existe $x_{n+1} \in X$ unitario con $d(x_{n+1}, M_n) \geq \frac{1}{2}$.

Teorema de Riesz: Un espacio normado X es de dimensión finita si y sólo si todo cerrado y acotado de X es compacto, si y sólo si B_X es compacta.

$1 \implies 2]$ Visto.

$2 \implies 3]$ Obvio.

$3 \implies 1]$ Si X tuviera dimensión infinita, habría una sucesión $\{y_n\}_n \subseteq S_X \subseteq B_X$ con $\|y_n - y_m\| \geq \frac{1}{2}$ para cada $n \neq m$ y por tanto no hay puntos de acumulación.#

Para $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $(\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}_{\text{K}})$ es un espacio de Fréchet que no es de Banach.

Dado un espacio normado X:

1. Si $Y \leq X$ es cerrado y $Z \leq X$ tiene dimensión finita, $Y+Z \leq X$ es cerrado.

2. Sean Y un espacio normado y $T : X \to Y$ lineal con imagen de dimensión finita, T es continua si y sólo si $\ker T$ es cerrado.

3. Si X es de Banach e $Y \leq X$ tiene codimensión finita, todo complementario algebraico Z de Y es un complementario topológico.

[1] El teorema se suele enunciar como que toda sucesión en un cerrado acotado posee una subsucesión convergente, pero esto es la compacidad por sucesiones.

1.9. Ejemplos de espacios de Banach

TEM

$D \subseteq X$ es **denso** en $(X, \mathcal{T})$ si $\overline{D} = X$, si y sólo si cualquier abierto no vacío corta a D. $(X, \mathcal{T})$ es **separable** si admite un subconjunto denso y numerable.

Para $S \neq \emptyset$, definimos $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^S \to [0, +\infty]$ como $\|f\|_\infty := \sup_{s \in S} |f(s)|$ y llamamos **espacio de las funciones acotadas** en S al espacio de Banach $\ell^\infty(S) := (\{f \in \mathbb{K}^S \mid \|f\|_\infty < \infty\}, \|\cdot\|_\infty)$ y **topología de convergencia uniforme** a la topología asociada a esta norma.

Si además S es un espacio topológico:

1. $C_\text{b}(S)$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(S)$.
2. $f : S \to \mathbb{K}$ **se anula en el infinito** si $\forall \varepsilon > 0, \exists K \subseteq S$ compacto : $\|f|_{S \setminus K}\|_\infty < \varepsilon$. El espacio $C_0(S)$ de funciones $S \to \mathbb{K}$ continuas que se anulan en el infinito es un subespacio cerrado de $C_\text{b}(S)$.
3. Si S es localmente compacto y Hausdorff, el espacio $C_\text{c}(S)$ de funciones $S \to \mathbb{K}$ continuas con soporte compacto es un subespacio denso de $C_0(S)$.

Llamando $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N})$:

1. ℓ^∞ no es separable.
2. $c_0 := \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \lim_n |x_n| = 0\}$ y $c := \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \exists \lim_n x_n\}$ son subespacios cerrados y separables de ℓ^∞ con $c_0 < c < \ell^\infty$.

Dados un espacio métrico (X, d) y $x_0 \in X$, $\phi : (X, d) \to \ell^\infty(X)$ dado por $\phi(x)(y) := d(x, y) - d(x_0, y)$ es una isometría.

FVV2

Un **álgebra de partes** de $\Omega \neq \emptyset$ es un conjunto no vacío $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $A \in \mathcal{A} \implies A^\complement \in \mathcal{A}$ y $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$. [...] Una **$\sigma$-álgebra de partes** de Ω es un álgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tal que si $\{A_n\}_n \subseteq \Sigma$ entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$ [...]. [...]

Dada una σ-álgebra Σ de partes de Ω, una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es una **medida** [...] sobre Σ si $\mu(\emptyset) = 0$ y para toda familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ de conjuntos disjuntos [...] $\sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$. Si existe [...] (Ω, Σ) es un **espacio medible**.

Un **espacio de medida** es una terna (Ω, Σ, μ) donde (Ω, Σ) es un espacio medible y μ es una medida sobre este.

Dados un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y, para $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^\Omega \to [0, +\infty]$ dada por

$$\|f\|_p := \left(\int |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \Sigma, \mu) := (\{f \in \mathbb{K}^\Omega \mid \|f\|_p < \infty\}, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue inducida, $C_\text{c}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Para $p \geq 1$, llamamos $\ell^p := L^p(\mathbb{N})$, y entonces:

1. ℓ^p es separable.
2. El **espacio de las sucesiones finitamente no nulas**,
$$c_{00} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, x_n = 0\},$$
es un subespacio denso de ℓ^p.
3. Para $1 \leq p < q$, $\ell^p \subsetneq \ell^q \subsetneq c_0$.

La suma de subespacios cerrados puede no ser un subespacio cerrado.

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, $K \subseteq \Omega$ compacto y, para $m \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_m : \mathcal{C}^m(\Omega) \to [0, +\infty)$ dada por
$$\|f\|_m := \sup_{x \in \Omega} \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|,$$
entonces:

1. $(\mathcal{D}_K^m(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega) \mid \text{sop} f \subseteq K\}, \|\cdot\|_m)$ es un espacio de Banach.
2. $\mathcal{D}^m(\Omega) := (\{f \in \mathcal{C}^m(\Omega) \mid \text{sop} f \text{ compacto}\}, \|\cdot\|_m)$ es un espacio normado.
3. $\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{sop} f \text{ compacto}\} < \mathcal{D}^m(\Omega)$.

Sean $D := \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$ y $\mathcal{H}(D)$ el espacio de funciones holomorfas $D \to \mathbb{C}$ y, para $p \geq 1$, $\|\cdot\|_{H_p}, \|\cdot\|_{H_\infty} : \mathcal{H}(D) \to [0, \infty]$ dadas por
$$\|f\|_{H_p} := \sup_{r \in (0,1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|f\|_{H_\infty} := \|f\|_\infty,$$
para $p \in [1, \infty]$, el **espacio de Hardy** $H^p(D) := (\{f \in \mathcal{H}(D) \mid \|f\|_{H_p} < \infty\}, \|\cdot\|_{H_p})$ es un espacio de Banach.

1.10. Redes

Un **conjunto preordenado** es un par $(C, \lesssim)$ formado por un conjunto C y un **preorden** $\lesssim$ en C, una relación reflexiva y transitiva.

Un **conjunto dirigido** es un conjunto preordenado $(D, \leq)$ tal que $\forall i, j \in D, \exists k \in D : k \geq i, j$. Una **red** en un conjunto Y es una función $\phi : D \to Y$ donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido, que escribimos como $\phi =: \{\omega_i\}_{i \in D}$ con $\omega_i := \phi(i)$. Todo conjunto totalmente ordenado es dirigido, y en particular $(\mathbb{N}, \leq)$ lo es y así las sucesiones son redes.

Si X es un espacio topológico, la red $\{x_i\}_{i \in D} \subseteq X$ **converge** a $z \in T$ (con **convergencia de Moore-Smith**) si $\forall V \in \mathcal{E}(z), \exists i_0 \in D : \forall i \geq i_0, x_i \in V$, y $s \in X$ es **de aglomeración** de $(x_i)_{i \in D}$ si $\forall V \in \mathcal{E}(s), \forall j \in D, \exists i \geq j : x_i \in V$.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, una red $\{x_i\}_{i \in D} \subseteq X$ es **de Cauchy** o satisface la **condición de Cauchy** si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in D : \forall i, j \geq i_0, \|x_i - x_j\| < \varepsilon.$$

Si X es de Banach, toda red de Cauchy es convergente.

Una **subred** de la red $\phi : D \to Y$ es una red $\phi \circ \rho : J \to Y$ para cierta $\rho : J \to D$ que cumple que $\forall i_0 \in D, \exists j_0 \in J : \forall j \geq j_0, \rho(j) \geq i_0$. Si D es un conjunto dirigido, $J \subseteq D$ es **cofinal** en D si $\forall i \in D, \exists j \in J : j \geq i$, y entonces, si $(\omega_i)_{i\in D}$ es una red, $(\omega_i)_{i\in J}$ es una subred suya. Si una red converge en un espacio topológico, toda subred suya converge al mismo punto.

Sea X un espacio topológico:

1. X es de Hausdorff si y sólo si toda red $\{x_i\}_{i\in D} \subseteq X$ convergente converge a un único $z \in X$, en cuyo caso z es el **límite** de la red, $\lim_{i\in D} x_i = z$.
2. Un $s \in X$ es de aglomeración de una red en X si y sólo si esta admite una subred convergente a s.
3. $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si toda red convergente en A tiene límite en A.
4. Si $s \in X$ y $A \subseteq X$, $s \in \overline{A}$ si y sólo si es límite de una red en A.
5. Si Y es otro espacio topológico, $f : X \to Y$ es continua en $a \in Y$ si y sólo si lleva redes en X convergentes a a a redes en Y convergentes a $f(a)$.
6. $A \subseteq X$ es compacto si y sólo si toda red en A posee una subred convergente a un punto de A.

Si X es un espacio métrico, $s \in X$ es de aglomeración de una sucesión si y sólo si esta posee una subsucesión convergente a s, pero esto no es cierto en espacios topológicos arbitrarios.

1.11. Familias sumables

Si $I \neq \emptyset$, llamamos $\mathcal{P}_0(I) := \{J \subseteq I \mid J \text{ finito}\}$, que es un conjunto dirigido por $\subseteq$. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado e $I \neq \emptyset$, $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ es **sumable** con **suma** $s \in X$ si $(\sum_{i\in J} x_i)_{J\in\mathcal{P}_0(I)}$ converge a s, y es **absolutamente sumable** si $(\|x_i\|)_{i\in I}$ es sumable en $\mathbb{R}$.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ es no vacía:

1. $(\sum_{i\in J} x_i)_{J\in\mathcal{P}_0(I)}$ es de Cauchy si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in \mathcal{P}_0(I) : \forall J \in \mathcal{P}_0(I \setminus J_0), \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\| < \varepsilon,$$

   y entonces $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ es contable y $\sup_{J\in\mathcal{P}_0(I)} \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\| < \infty$.

2. $(x_i)_{i\in I}$ es absolutamente sumable si y sólo si $\sup_{J\in\mathcal{P}_0(I)} \sum_{i\in J} \|x_i\| < \infty$.
3. X es de Banach si y sólo si toda familia sumable es absolutamente sumable, y entonces toda familia absolutamente sumable es sumable.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, llamamos

$$C(S) := \sup \left\{ C \in [0,1) \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in X^n, \exists S \subseteq \mathbb{N}_n : C \sum_{j\in\mathbb{N}_n} \|z_j\| \leq \left\| \sum_{j\in S} z_j \right\| \right\},$$

y $\|\cdot\|$ en X tiene la **propiedad S** si $C(S) > 0$.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es de dimensión finita, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es sumable si y sólo si $\sum_n x_n$ es absolutamente convergente, si y sólo si $\sup_n \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \|x_i\| < \infty$.

Teorema de reordenación de Riemann: Si la serie real $\sum_n x_n$ es convergente pero no absolutamente convergente, para $x \in [-\infty, \infty]$, existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$.

Si X es un espacio de Banach y $\{x_n\}_n \subseteq X$ es una sucesión, $\sum_n x_n$ es **incondicionalmente convergente** si para $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum_n x_{\pi(n)}$ converge, si y sólo si $(x_n)_n$ es sumable, en cuyo caso todas las $\sum_n x_{\pi(n)}$ convergen al mismo número.

Como **teorema**,un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es de dimensión finita si y sólo si tiene la propiedad S, si y sólo si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}_n} \subseteq X, \left(\sup_{S\subseteq\mathbb{N}_n}\left\|\sum_{j\in S} z_j\right\| < \delta \implies \sum_{j\in\mathbb{N}_n} \|z_j\| < \varepsilon\right),$$

si y sólo si toda serie sumable en X es absolutamente convergente.

Capítulo 2

Espacios de Hilbert

David Hilbert (1862–1943) fue un influyente matemático alemán que formuló la teoría de los espacios de Hilbert. En 1900 publicó una lista de 23 problemas que marcarían en buena medida el progreso matemático en el siglo XX, y presentó 10 de ellos en el *International Congress of Mathematicians* de París de 1900. Fue editor jefe de *Mathematische Annalen*, una revista matemática muy prestigiosa por casi 150 años, y tuvo discípulos como Alfréd Haar, Erhard Schmidt, Hugo Steihaus, Hermann Weyl o Ernst Zermelo.

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial H, $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H\to\mathbb{K}$ es una **forma hermitiana** si para $a,b\in\mathbb{K}$ y $x,y,z\in H$, $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ y $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, y es **definida positiva** si para $x\in H\setminus 0$ es $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}^+$. Un **producto escalar** es una forma hermitiana definida positiva, y un **espacio prehilbertiano** es un par formado por un espacio vectorial y un producto escalar sobre este.

Dado un espacio prehilbertiano $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$:

1. **Desigualdad de Cauchy-Schwartz:** $\forall x,y\in H, |\langle x,y\rangle|^2\leq\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$, con igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

2. H es un espacio normado con la norma $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, y para $x,y\in H$, $\|x+y\| = \|x\|+\|y\| \iff x=0\lor y=0\lor\exists a>0 : x=ay$.

3. Para $a,b\in\mathbb{K}$ y $x,y,z\in H$, $\langle x,ay+bz\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle+\overline{b}\langle x,z\rangle$.

4. Para $x,y\in H$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$.

Identidades de polarización: Si H es un espacio prehilbertiano y $x,y\in H$:

1. $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)$.

2. Si H es real, $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$.

Teorema de von Neumann: Un espacio normado $(X,\|\cdot\|)$ admite un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en X con $\langle x,x\rangle\equiv\|x\|^2$ si y sólo si $\|\cdot\|$ verifica la **ley del paralelogramo:**

$$\forall x,y\in H, \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

$\Longrightarrow$]

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle=$$
$$=\langle x,x\rangle\cancel{+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle}+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle\cancel{-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle}+\langle y,y\rangle=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

$\Longleftarrow$] Definimos $\langle\cdot,\cdot\rangle$ según la identidad de polarización, y queremos ver que es un producto escalar cuya norma es la inicial. Se tiene

$$\langle x,x\rangle=\frac{1}{4}\left(\|2x\|^2-\|x-x\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}x\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}x\|^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(4\|x\|^2+\mathrm{i}|1+\mathrm{i}|^2\|x\|^2-\mathrm{i}|1-\mathrm{i}|^2\|x\|^2\right)=\|x\|^2,$$

y

$$\begin{aligned}4\langle x,y\rangle&=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\\&=\|y+x\|^2-\|y-x\|^2+\mathrm{i}\|y-\mathrm{i}x\|-\mathrm{i}\|y+\mathrm{i}x\|^2=4\overline{\langle y,x\rangle}\\&=\|-x-y\|^2-\|-x+y\|^2+\mathrm{i}\|-x-\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|-x+\mathrm{i}y\|^2=-4\langle -x,y\rangle\\&=\|\mathrm{i}x+\mathrm{i}y\|^2-\|\mathrm{i}x-\mathrm{i}y\|^2+\mathrm{i}\|\mathrm{i}x-y\|^2-\mathrm{i}\|\mathrm{i}x+y\|^2=4\frac{\langle\mathrm{i}x,y\rangle}{\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Para ver que $\langle x+z,y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle$,

$$\|x+z+y\|^2-\|x+z-y\|^2=\left\|\left(x+\frac{y}{2}\right)+\left(z+\frac{y}{2}\right)\right\|^2-\left\|\left(x+\frac{y}{2}\right)-\left(z+\frac{y}{2}\right)\right\|^2=$$
$$=2\left\|x+\frac{y}{2}\right\|^2+2\left\|z+\frac{y}{2}\right\|^2\cancel{-\|x-z\|^2}-2\left\|x-\frac{y}{2}\right\|^2-2\left\|z-\frac{y}{2}\right\|^2\cancel{+\|x-z\|^2},$$

de donde

$$\begin{aligned}4\langle x+z,y\rangle&=\|x+z+y\|^2-\|x+z-y\|^2+\mathrm{i}\|x+z+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x+z-\mathrm{i}y\|^2\\&=2\left(\left\|x+\frac{y}{2}\right\|^2+\left\|z+\frac{y}{2}\right\|^2-\left\|x-\frac{y}{2}\right\|^2-\left\|z-\frac{y}{2}\right\|\right)\\&\quad+2\mathrm{i}\left(\left\|x+\mathrm{i}\frac{y}{2}\right\|^2+\left\|z+\mathrm{i}\frac{z}{2}\right\|^2-\left\|x-\mathrm{i}\frac{y}{2}\right\|^2-\left\|z-\mathrm{i}\frac{y}{2}\right\|^2\right)\\&=8\left\langle x,\frac{y}{2}\right\rangle+8\left\langle z,\frac{y}{2}\right\rangle,\end{aligned}$$

y por tanto

$$\langle x+z,y\rangle=2\left\langle x,\frac{y}{2}\right\rangle+2\left\langle z,\frac{y}{2}\right\rangle=\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la primera igualdad al revés con $z=0$ o $x=0$. Usando esto y que $\langle -x,y\rangle=-\langle x,y\rangle$ es fácil ver que $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$ para $a\in\mathbb{Q}$; para $a\in\mathbb{R}$ se usa la continuidad de la norma y por tanto del producto escalar, y para $a\in\mathbb{C}$ se usa $\langle \mathrm{i}x,y\rangle=\mathrm{i}\langle x,y\rangle$.

$(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_1)$ son espacios normados no prehilbertianos.

Dos espacios prehilbertianos $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ son **equivalentes** si existe un isomorfismo algebraico $T : H_1 \to H_2$ con $\langle x, y\rangle_1 = \langle Tx, Ty\rangle_2$ para todo $x, y \in H_1$, si y sólo si existe un isomorfismo isométrico entre los espacios normados.

Si H es un espacio prehilbertiano, $x, y \in H$ son **ortogonales**, $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$; $x \in H$ es **ortogonal** a $M \subseteq H$, $x \perp M$, si $\forall y \in M, x \perp y$, y llamamos $M^\perp := \{x \in H \mid x \perp M\}$. Una familia $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq H$ es **ortogonal** si $\forall i, j \in I, (i \neq j \implies x_i \perp x_j)$, y es **ortonormal** si además $\forall i, \|x_i\| = 1$.

1. **Teorema de Pitágoras:** Si $x \perp y$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2. Si $(x_i)_{i\in I}$ es una familia ortogonal de elementos no nulos, es una familia linealmente independiente.

3. Si $M \subseteq H$, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de H.

Lema de Gram-Schmidt: Sean H prehilbertiano, $\{x_n\}_n \subseteq H$ una familia contable linealmente independiente y $(u_n)_n$ e $(y_n)_n$ dadas por $u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}$, $y_0 := x_0$ y para $n \geq 1$,

$$y_n := x_n - \sum_{j<n} \langle x_n, u_j\rangle u_j,$$

$(u_n)_n$ es una sucesión ortonormal en H y, para cada n, $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Si M es un subespacio de dimensión finita del espacio prehilbertiano H:

1. M tiene una base algebraica formada por vectores ortonormales.

2. M es equivalente a $\mathbb{K}^{\dim M}$.

Un **espacio de Hilbert** es un espacio prehilbertiano completo. Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ), $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ es un espacio de Hilbert con

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f\overline{g} \, \mathrm{d}\mu,$$

y en particular lo son ℓ^2 con $\langle x, y\rangle := \sum_n x_n\overline{y_n}$ y ℓ^2_n con $\langle x, y\rangle := \sum_i x_i\overline{y_i}$.

Son espacios prehilbertianos no completos:

1. c_{00} con el producto escalar de ℓ^2.

2. $C([a,b])$ con el producto escalar de $L^2([a,b])$ con la medida de Lebesgue, que es denso en $L^2([a,b])$.

2.1. Mejor aproximación

Si X es un espacio vectorial, $A \subseteq X$ es **convexo** si $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda A + (1-\lambda)A \subseteq A$. Si X es normado, $S \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, un $y \in S$ es un **vector de mejor aproximación** de x a S si $\|x - y\| = \min_{z\in S} \|x - z\|$.

Teorema de mejor aproximación: Si H es un espacio prehilbertiano y $C \subseteq H$ es no vacío, convexo y completo, para cada $x \in H$ existe una mejor aproximación de x a C.

Demostración: Podemos suponer por traslación que $x = 0$, y llamamos $\alpha := \inf_{z\in C} \|z\|$. Para la existencia tomamos una sucesión $\{y_n\}_n \subseteq C$ con $\lim_n \|y_n\| = \alpha$ y probamos que es de Cauchy, pues entonces por completitud existe $y := \lim_n y_n \in C$ y por continuidad de la norma es $\|y\| = \alpha$. Para $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ es $\|y_n\|^2 < \alpha^2 + \varepsilon$, y por la ley del paralelogramo es

$$\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) - \left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \varepsilon + \alpha^2 + \varepsilon) - \alpha^2 = \varepsilon,$$

pues por convexidad $\frac{y_n+y_m}{2} \in S$ y por tanto su norma es mayor o igual a α. Para la unicidad, si $y, z \in C$ cumplen $\|y\| = \|z\| = \alpha$, por un argumento como el anterior,

$$\left\|\frac{y - z}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y\|^2 + \|z\|^2) - \left\|\frac{y + z}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^2) - \alpha^2 = 0.$$

Como **teorema**, si Y es un subespacio de un espacio prehilbertiano H y $x \in H$:

1. $y \in Y$ es de mejor aproximación de x a Y si y sólo si $x - y \perp Y$.

   $\Longrightarrow$] Para $z \in Y$ y $a \in \mathbb{K}$, como $y - az \in Y$,

   $$\|x - y\|^2 \leq \|x - y + az\|^2 = \|x - y\|^2 + 2\mathrm{Re}(a\langle z, x - y\rangle) + |a|^2\|z\|^2,$$

   luego $0 \leq 2\mathrm{Re}(a\langle z, x - y\rangle) + |a|^2\|z\|^2$ y, haciendo $a = t\langle x - y, z\rangle$ con $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq 2t|\langle x - y, z\rangle|^2 + t^2|\langle x - y, z\rangle|^2\|z\|^2$. Si fuera $\langle x - y, z\rangle \neq 0$, $0 \leq 2t + t^2\|z\|^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pero si $\|z\|^2 = 0$, esto es negativo cuando $t < 0$, y si $\|z\|^2 > 0$, es negativo al menos cuando $t = -\frac{1}{\|z\|^2}$#, luego $x - y \perp z$ y $x - y \perp Y$.

   $\Longleftarrow$] Para $z \in Y$, por el teorema de Pitágoras,

   $$\|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

2. Si existe una mejor aproximación de x a Y, es única.

   Sean $y, z \in Y$ de mejor aproximación, como $x - y, x - z \in Y^\perp$, su diferencia $y - z \in Y^\perp \cap Y$, luego $\langle y - z, y - z\rangle = 0$ e $y = z$.

3. Si Y es completo, hay vector de mejor aproximación.

   Por el teorema anterior (los subespacios son convexos).

2.2. Determinante de Gram

Sean H prehilbertiano y $M \leq H$ de dimensión finita con base ortonormal $(e_i)_i$.

1. Para $x \in H$ existe un único vector de aproximación de x a M dado por

   $$\sum_i \langle x, e_i\rangle e_i.$$

2. $d(x, M)^2 = \|x\|^2 - \sum_i |\langle x, e_i\rangle|^2$.

Llamamos **determinante de Gram** de $(x_i)_{i=1}^n$ a

$$G(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \det(\langle x_j, x_i \rangle)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}.$$

Como **teorema**, si H es prehilbertiano, $M \leq H$ de dimensión finita con base $(b_i)_i$ y $x \in H$, el vector de mejor aproximación de x a M es

$$\frac{-1}{G(b_1, \dots, b_n)} \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_2, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x, x_1 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_2 \rangle & \langle x, x_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x, x_n \rangle \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix},$$

y

$$d(x, M) = \sqrt{\frac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)}}.$$

Algunas aplicaciones:

1. **Resolución de sistemas sobre-dimensionados por mínimos cuadrados.** Tenemos un fenómeno experimental que se puede modelar como una función lineal $y(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, pero no conocemos los a_i. Hacemos m experimentos fijando un x_i en cada uno y midiendo $y_i \coloneqq y(x_i)$ para plantear un sistema de m ecuaciones. Solo hacen falta n experimentos cuidando que los x_i sean linealmente independientes, pero en general conviene hacer más, $m > n$. Como las mediciones son aproximadas, el sistema puede ser incompatible, por lo que se eligen los $a_i \in \mathbb{R}$ de forma que se minimice

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_m} \left(y_i - \sum_{j \in \mathbb{N}_n} a_j x_{ij} \right)^2 = \left\| y - \sum_{j \in \mathbb{N}_n} a_j X_j \right\|^2,$$

   donde $X_j \coloneqq (x_{1j}, \dots, x_{mj})$. Si $X_1, \dots, X_n$ son linealmente independientes, sea $M \coloneqq \operatorname{span}\{X_1, \dots, X_n\} < \mathbb{R}^m$, buscamos el vector $Z \in M$ de mejor aproximación de y en M que, expresado respecto de la base $(X_1, \dots, X_n)$, nos dará el vector $(a_1, \dots, a_n)$ buscado.

2. **Ajustes polinómicos por mínimos cuadrados.** Queremos modelar un fenómeno experimental como una función polinómica $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, y tenemos k observaciones de la forma $f(t_i) = y_i$ con $t_1 < \ldots < t_k$. Existe un polinomio de grado máximo $k - 1$ que cumple esto, pero muchas veces k es muy grande y esto complica los cálculos y puede llevar al *overfitting* o fenómeno de Runge. Entonces buscamos un polinomio f de grado máximo n bastante menor que $k - 1$ que minimice

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_k} |y_i - f(t_i)|^2 = \left\| y - \sum_{j=0}^{n} f_j t^j \right\|^2,$$

   donde $t^j \coloneqq (t_1^j, \dots, t_k^j)$. Para ello, como para $k \geq 2$ los t^j son linealmente independientes, consideramos $M \coloneqq \operatorname{span}\{1, t, t^2, \dots, t^n\} < \mathbb{R}^{n+1}$ y buscamos la mejor aproximación de y a M.

2.3. Teorema de la proyección

Teorema de la proyección: Sean H un espacio de Hilbert con un subespacio cerrado M y $P_M : H \to M$ la **proyección ortogonal** de H sobre M que asigna a cada $x \in H$ la mejor aproximación de x a M:

1. H es suma directa topológica de M y $M^\perp$, P_M es la proyección canónica y, si $P_{M^\perp} : H \to M^\perp$ es la otra proyección canónica, si $M \neq 0$, $\|P_M\| = 1$, y si $M^\perp \neq 0$, $\|P_{M^\perp}\| = 1$.

   Por la definición de producto escalar, $M^\perp \leq H$. Claramente $M \cap M^\perp = 0$, y para $x \in M$, como $y := P_M(x)$ cumple $x - y \perp M$, $x = y + z$ con $y \in M$ y $z := x - y \in M^\perp$, luego $M + M^\perp = H$ y H es suma directa algebraica de M y $M^\perp$. P_M es la proyección canónica porque, si $y \in M$ y $z \in M^\perp$, $(y + z) - y = z \perp M$, y por unicidad de la mejor aproximación, $P_M(y + z) = y$. P_M y $P_{M^\perp}$ son lineales por ser proyecciones canónicas, y para $x = y+z \in S_H$ con $y \in M$ y $z \in M^\perp$, $\|x\|^2 = \|y\|^2+\|z\|^2 = \|P_M(x)\|^2+\|P_{M^\perp}(x)\|^2$ y $\|P_M(x)\|, \|P_{M^\perp}(x)\| \leq \|x\| = 1$, lo que prueba la continuidad y por tanto que la suma directa es topológica. Además, si $M \neq 0$, existe $y \in S_M$ y $\|P_M(y)\| = \|y\| = 1$, luego $\|P_M\| = 1$, y análogamente para $M^\perp$.

2. $P_M(H) = M$, $\ker P_M = M^\perp$ y $P_{M^\perp} = 1_H - P_M$.

3. Para $x, y \in H$, $\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$ y $\langle P_{M^\perp} x, y\rangle = \langle x, P_{M^\perp} y\rangle$.

   Si $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ con $x_1, y_1 \in M$ y $x_2, y_2 \in M^\perp$, $\langle P_M(x), y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, P_M(y)\rangle$, y para $P_{M^\perp}$ es análogo.

4. $M^{\perp\perp} = M$.

   Si $x \in M$, para $y \in M^\perp$, $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = 0$, luego $x \in M^{\perp\perp}$. Si $x \in M^{\perp\perp} \subseteq H$, sean $y \in M$ y $z \in M^\perp$ con $x = y + z$, $0 = \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle + \langle z, z\rangle = \langle z, z\rangle = \|z\|^2$, luego $z = 0$ y $x \in M$.

Esto no es cierto si M no es cerrado ni si H no es completo.

Un espacio normado es de Hilbert si y sólo si cada subespacio cerrado tiene un complementario topológico.

Si H es un espacio de Hilbert, $S \subseteq H$ es total si y sólo si $S^\perp = 0$.

2.4. Dual de un espacio de Hilbert

Teorema de Riesz-Fréchet: Dados un espacio de Hilbert H y un operador $f : H \to \mathbb{K}$, f es acotado si y sólo si existe $y \in H$ con $f = \langle \cdot, y\rangle$, en cuyo caso y es único y $\|f\| = \|y\|$.

$\Longrightarrow$] Para la unicidad, si $f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in H$, $\langle x, y - z\rangle = 0$, luego $y - z \perp H$ y, como $H^\perp = 0$, $y = z$. Para la existencia, si $f = 0$ tomamos $y = 0$, y en otro caso, $Y := \ker f$ es un subespacio cerrado de H y por tanto $H = Y \oplus Y^\perp$, con $\dim Y^\perp = \dim \mathrm{Im} f = 1$. Sea entonces $z \in Y^\perp$ unitario, la proyección ortogonal de un $x \in H$ sobre $Y^\perp$ es $\langle x, z\rangle z$, luego $x - \langle x, z\rangle z \in Y$ y

$$f(x) = f(x - \langle x, z\rangle z + \langle x, z\rangle z) = f(\langle x, z\rangle z) = \langle x, z\rangle f(z) = \langle x, \overline{f(z)} z\rangle =: \langle x, y\rangle.$$

Para $x \in S_H$, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, $\|f(x)\|^2 = |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = \|y\|^2$, luego $\|f\| \leq \|y\|$, pero $f(\frac{y}{\|y\|}) = \frac{f(y)}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$, luego $\|f\| = \|y\|$.

$\Longleftarrow$] $f := \langle\cdot, y\rangle$ es lineal, y es continua por el argumento anterior que prueba que $\|f\| = \|y\|$.

El teorema no es válido si H no es completo.

Sean H un espacio de Hilbert y $T : H^* \to H$ que a cada f le asocia el y con $f = \langle\cdot, y\rangle$:

1. T es biyectiva, isométrica y lineal conjugada.

2. H^* es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle f, g\rangle^* := \langle Tg, Tf\rangle$.

Dado un un $\mathbb{K}$-espacio vectorial X, $B : X \times X \to \mathbb{K}$ es **bilineal** si las $B(\cdot, y)$ y $B(x, \cdot)$ son lineales, **sesquilineal** si las $B(\cdot, y)$ son lineales y las $B(x, \cdot)$ son lineales conjugadas, **simétrica** si $B(x, y) \equiv B(y, x)$ y **positiva** si $\forall x \in X, B(x, x) \geq 0$. Si además X es normado, B es **acotada** si $\exists M > 0 : \forall x, y \in X, |B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$, y es **fuertemente positiva** si $\exists c > 0 : \forall x \in X, B(x, x) \geq c\|x\|^2$.

Si B es bilineal o sesquilineal sobre un espacio normado, es acotada si y sólo si es continua, y para todo x e y es $2B(x, x) + 2B(y, y) = B(x + y, x + y) + B(x - y, x - y)$.

Teorema de Lax-Milgram: Sean H un espacio de Hilbert y B una H-forma sesquilineal acotada y fuertemente positiva, existe un único isomorfismo de espacios de Hilbert $T : H \to H$ tal que $\forall x, y \in H, B(x, y) = \langle x, Ty\rangle$. **Demostración:** Sea

$$Y := \{y \in H \mid \exists z \in H : \langle\cdot, y\rangle = B(\cdot, z)\},$$

$0 \in Y$ tomando $z = 0$ y z está unívocamente determinado por y, ya que si $\langle\cdot, y\rangle = B(\cdot, z) = B(\cdot, z')$ entonces $B(\cdot, z - z') = 0$ y en particular $0 = B(z - z', z - z') \geq c\|z - z'\|^2$ para cierto $c > 0$ por ser B fuertemente positiva, luego $z = z'$. Como $\langle\cdot, \cdot\rangle$ y B son sesquilineales, Y es un espacio vectorial y $S : Y \to H$ que a cada y le asocia el z con $\langle\cdot, y\rangle = B(\cdot, z)$ es lineal. Entonces, para $y \in S_Y$,

$$c\|Sy\|^2 \leq B(Sy, Sy) = \langle Sy, y\rangle \in \mathbb{R}^+,$$

pero por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, $\langle Sy, y\rangle^2 = |\langle Sy, y\rangle|^2 \leq \|Sy\|^2\|y\|^2$, luego $c\|Sy\|^2 \leq \langle Sy, y\rangle \leq \|Sy\|\|y\| = \|Sy\|$ y $\|Sy\| \leq \frac{1}{c}$, con lo que S es continua. Entonces, si $\{y_n\}_n \subseteq Y$ tiene límite $y \in H$, por continuidad de S y de B,

$$\langle x, y\rangle = \lim_n \langle x, y_n\rangle = \lim_n B(x, Sy_n) = B(x, Sy),$$

luego $y \in Y$ e Y es cerrado. Entonces, si $z \in Y^\perp$, como $B(\cdot, z) : H \to \mathbb{K}$ es continua, por el teorema de Riesz-Fréchet existe $w \in H$ con $B(\cdot, z) = \langle\cdot, w\rangle$, luego $w \in Y$, pero entonces $B(z, z) = \langle z, w\rangle = 0$ y, por ser B fuertemente positiva, $z = 0$, luego $Y^\perp = 0$ e $Y = H$. Para $z \in H$, como $B(\cdot, z)$ es continua, existe $w \in H$ con $B(\cdot, z) = \langle\cdot, w\rangle$ y por tanto $z = Sw$, luego S es suprayectiva. Si $Sy = 0$, para $x \in H$, $\langle x, y\rangle = B(x, Sy) = 0$ y por tanto $y = 0$, luego S es inyectiva. Por tanto S es biyectiva y $T := S^{-1}$ cumple $\langle x, Ty\rangle \equiv B(x, y)$. Además, para $y \in S_H$, $\|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty\rangle = B(Ty, y) \leq M\|Ty\|\|y\| = M\|Ty\|$, siendo M una cota de B, de donde $\|T\| \leq M$ y, como $\|T^{-1}\| = \|S\| \leq \frac{1}{c}$, T es un isomorfismo topológico isométrico.

En particular, dado un espacio vectorial H con dos productos escalares $\langle\cdot, \cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot, \cdot\rangle_2$ equivalentes que hacen a H completo, existe un isomorfismo $T : H \to H$ de espacios de Hilbert con $\langle x, y\rangle_1 = \langle x, Ty\rangle_2$.

Dado un espacio medible (Ω, Σ) con medidas μ y ν, ν es **absolutamente continua** respecto de μ si $\forall A \in \Sigma, (\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0)$, y es **finita** si $\nu(\Omega) < \infty$. **Teorema de Radon-Nicodym:** Si (Ω, Σ) es un espacio medible con medidas finitas μ y ν siendo ν absolutamente continua respecto de μ, existe $g : \Omega \to [0, +\infty]$ μ-integrable tal que

$$\forall A \in \Sigma, \nu(A) = \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: $\sigma := \mu + \nu$ es una medida finita en X tal que $\forall A \in \Sigma, (\sigma(A) = 0 \iff \mu(A) = 0)$, y la función lineal entre espacios de Hilbert $T : L^2(\Omega, \Sigma, \sigma) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Tu := \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu$$

está bien definida y es continua porque, si $\|u\|_{L^2(\Omega,\Sigma,\sigma)} = 1$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} |Tu| = \left| \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |u| \, \mathrm{d}\mu \leq \sqrt{\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}\mu} + \sqrt{\int_\Omega \mathrm{d}\mu} \leq \\ \leq \sqrt{\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}\nu} + \sqrt{\int_\Omega \mathrm{d}\mu + \int_\Omega \mathrm{d}\nu} = 1 + \sqrt{\sigma(X)}. \end{aligned}$$

Por el teorema de representación de Riesz, existe $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \sigma)$ tal que, para $u \in L^2(\Omega, \Sigma, \sigma)$,

$$\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu = Tu = \int_\Omega uf \, \mathrm{d}\sigma,$$

pero esta igualdad se da cuando $u = \chi_A$ para todo $A \in \mathcal{F}$ y por linealidad para cualquier función Σ-medible simple, y por el teorema de convergencia dominada también se da para cualquier función Σ-medible no negativa en casi todo punto. Además, para $A \in \Sigma$,

$$\mu(A) = \int_\Omega \chi_A f \, \mathrm{d}\sigma = \int_A f \, \mathrm{d}\sigma,$$

de modo que f es Σ-medible y, haciendo $A = \{x \mid f(x) \leq 0\}$ o $A = \{f(x) > 1\}$, vemos que $f(\omega) \in (0, 1]$ para casi todo $\omega \in \Omega$, con lo que $\frac{1}{f}$ es Σ-medible no negativa en casi todo punto y, en casi todo punto, $\frac{1}{f} f = 1$, con lo que para $A \in \Sigma$,

$$\int_A \frac{1}{f} \, \mathrm{d}\mu = \int_A \mathrm{d}\sigma \implies \nu(A) = \sigma(A) - \mu(A) = \int_A \left(\frac{1}{f} - 1 \right) \mathrm{d}\mu =: \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

2.5. Problemas variacionales cuadráticos

Teorema principal de los problemas variacionales cuadráticos: Sean H un $\mathbb{R}$-espacio de Hilbert, B una H-forma bilineal simétrica, acotada y fuertemente positiva, $b \in H^*$ y $F : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := \frac{1}{2} B(x, x) - b(x),$$

entonces:

1. F alcanza su mínimo en $w \in H$ si y sólo si $B(w, \cdot) = b$.

$\Longrightarrow$] Fijado $y \in H$, para $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(w+ty) &= \frac{1}{2}B(w+ty, w+ty) - b(w+ty) = \\ &= \frac{1}{2}(B(w,w) + 2tB(w,y) + t^2B(y,y)) - b(w) - tb(y) = \\ &= F(w) + t(B(w,y) - b(y)) + \frac{1}{2}t^2B(y,y), \end{aligned}$$

pero por hipótesis $F(w) \leq F(w+ty)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) := F(w+ty)$ tiene un mínimo en $t = 0$ y $0 = \varphi'(0) = B(w,y) - b(y)$.

$\Longleftarrow$] Para $y \in H$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$F(w+ty) = F(w) + \cancel{t(B(w,y) - b(y))}^{=0} + \frac{1}{2}t^2B(y,y) \geq F(w).$$

2. Existe un único $w \in H$ en el que F alcanza su mínimo.

   Como B es bilineal, simétrica y fuertemente positiva, es un producto escalar sobre H, y que es equivalente al de H ya que existen $c, M > 0$ con $c\|x\|^2 \leq B(x,x) \leq M\|x\|^2$, luego b es continua con el producto escalar B y por el teorema de Riesz-Fréchet existe un único $w \in H$ con $b = B(\cdot, w) = B(w, \cdot)$, que es la condición del primer apartado.

2.6. Convolución y aproximación de funciones

Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **localmente integrable** si $|f|$ es integrable en todo compacto $K \subseteq \Omega$. Dadas dos funciones localmente integrables $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos su **producto de convolución** como $(f * g) : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$(f * g)(a) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(a-x)\,\mathrm{d}x,$$

donde $D := \{a \in \mathbb{R}^n \mid x \mapsto f(x)g(a-x) \text{ integrable}\}$. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f * g$ está definida en todo $\mathbb{R}^n$ y es continua y uniformemente acotada con

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

El producto de convolución es conmutativo, y si $f * g$ está definida en casi todo punto, $\operatorname{sop}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{sop}(f) + \operatorname{sop}(g)}$.

Una **sucesión de Dirac** es una sucesión $(K_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0})_m$ de funciones continuas con integral 1 en $\mathbb{R}^n$ y tal que

$$\forall \varepsilon, \delta > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} K_n(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Por ejemplo, si $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, no negativa, con soporte compacto e integral 1, entonces $(x \mapsto m^n K(mx))_{m \geq 1}$ es una sucesión de Dirac.

Las sucesiones de Dirac aproximan la **delta de Dirac**, una «función extendida» con integral 1 que vale 0 en todo punto salvo en el origen en que el valor es infinito.

Como **teorema**, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, la sucesión $(f * K_m)_m$ tiende uniformemente a f sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es localmente integrable y $g \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ y para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $\sum_i \alpha_i \leq k$ es

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f*g)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = f * \left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right),$$

con lo que $f * g$ es una regularización de f a través de una función suave g.

Como **teorema**, dado un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(G)$ es denso en $(C_c(G), \|\cdot\|_\infty)$ y en $L^p(G)$ para todo $p \in [1, \infty)$.

Para $G \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^2(G)$, si para todo $\psi \in \mathcal{D}(G)$ es

$$\int_G f\psi = 0$$

entonces $f = 0$ en casi todo punto y en particular, si f es continua, $f = 0$.

2.7. Principio de Dirichlet

Dado un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}^2(G)$ es **armónica** en G si $\triangle u := \nabla^2 u = 0$ en todo punto de G. Dada $g \in \mathcal{C}(S_{\mathbb{C}})$, el **problema de Dirichlet** consiste en encontrar $u \in \mathcal{D}^2(B_X)$ armónica con $u|_{S_{\mathbb{C}}} = g$. Para un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$, llamamos $\mathcal{C}^m(\overline{G})$ al conjunto de funciones $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ con $u|_G \in \mathcal{C}^m(G)$ para las que las derivadas parciales de orden m de u en G admiten prolongación continua a $\overline{G}$. Escribimos $\partial_j u := \frac{\partial u}{\partial j}$.

Dados un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y no vacío, $f : G \to \mathbb{R}$ y $g : \partial G \to \mathbb{R}$, el **problema de valores frontera para la ecuación de Poisson** consiste en encontrar $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ tal que $-\triangle u|_G = f$ y $u|_{\partial G} = g$, y el **problema generalizado de valores frontera** consiste en encontrar $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ con $u|_{\partial G} = g$ y

$$\forall v \in \mathcal{D}(G), \int_G \sum_j \partial_j u \partial_j v \,\mathrm{d}x = \int_G fv.$$

Si $G \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado no vacío, $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$ y $g \in \mathcal{C}(\partial G)$:

1. Una $w \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ es solución del problema de valores frontera para la ecuación de Poisson y sólo si lo es del problema generalizado de valores frontera.

2. Si $w \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ es solución del problema variacional consistente en encontrar el mínimo de $F : \{u \in \mathcal{C}^2(\overline{G}) \mid u|_{\partial G} = g\} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$F(u) := \frac{1}{2} \int_G \sum_j (\partial_j u(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_G fu,$$

   entonces es solución de los dos problemas anteriores.

El **teorema de integración por partes en varias variables** afirma que, si $G \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, $u \in \mathcal{C}^1(G)$ y $v \in \mathcal{D}(G)$,

$$\int_G u \partial_j v = -\int_G (\partial_j u) v.$$

Si G es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u,w\in L^2(G)$, w es la **derivada generalizada j-ésima** de u, $w=\partial_j u$, si

$$\forall v\in\mathcal{D}(G),\int_G u\partial_j v=-\int_G wv,$$

y para $\alpha\in\mathbb{N}^n$ llamamos $\mathrm{D}^\alpha u\coloneqq\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}u$.

Para $G\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $k\in\mathbb{N}$ y $p\in[1,\infty)$, llamamos **espacio de Sobolev** a

$$W^{k,p}(G)\coloneqq\{u\in L^p(G)\mid\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,(|\alpha|\leq k\implies\exists\mathrm{D}^\alpha f\in L^p(G))\}.$$

Escribimos $W^k(G)\coloneqq W^{k,2}(G)$, y generalmente consideramos el espacio de Sobolev $W^1(G)$.

Si $G\subseteq\mathbb{R}^n$ es abierto, definimos la relación de equivalencia en $G\to\mathbb{R}$ como $f\sim g$ si y sólo si $\{f(x)\neq g(x)\}$ es de medida nula, y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}:W^1(G)/\sim\to\mathbb{R}$ dada por

$$\langle\overline{u},\overline{v}\rangle_{1,2}\coloneqq\int_G\left(uv+\sum_j(\partial_j u)(\partial_j v)\right)$$

es un producto escalar en $W^1(G)/\sim$ que lo convierte en un espacio de Hilbert. Identificamos $W^1(G)$ con $W^1(G)/\sim$.

Llamamos $H_0^1(G)$ al espacio de Hilbert obtenido como la clausura de $\mathcal{D}(G)$ en $W^1(G)$, que en general es un subespacio propio de $W^1(G)$ pero es igual a $W^1(G)$ si $G=\mathbb{R}^n$.

Si $G\subseteq\mathbb{R}^n$ es abierto acotado no vacío y $u\in W^1(G)$, u **se anula en la frontera de G en sentido generalizado**, $u=0$ en ∂G, si $u\in H_0^1(G)$, y para $f,g\in W^1(G)$, $f=g$ **en ∂G en sentido generalizado** si $f-g\in H_0^1(G)$.

Desigualdad de Poincaré-Friedrichs: Si $G\subseteq\mathbb{R}^n$ es un abierto acotado no vacío, existe $C>0$ tal que para $u\in H_0^1(G)$,

$$C\int_G u^2\leq\int_G\sum_j(\partial_j u)^2.$$

Demostración: Sean $R\coloneqq\prod_i[a_i,b_i]$ con $G\subseteq R$ y $u\in\mathcal{D}(G)$, y vemos u como una función en R que se anula fuera de G y con valor indefinido en ∂G, para $x\in R$, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}(u(x))^2&=\left(\int_{a_n}^{x_n}\partial_n u(x_1,\dots,x_{n-1},t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leq\left(\int_{a_n}^{x_n}\mathrm{d}t\right)\left(\int_{a_n}^{x_n}\partial_n u(x_1,\dots,x_{n-1},t)^2\,\mathrm{d}t\right)\leq\\&\leq(b_n-a_n)\int_{a_n}^{b_n}\partial_n u(x_1,\dots,x_{n-1},t)^2\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_G u^2&=\int_R u^2\leq\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}(b_n-a_n)\int_{a_n}^{b_n}\partial_n u(x_1,\dots,x_{n-1},t)^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1=\\&=(b_n-a_n)^2\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\partial_n u(x_1,\dots,x_{n-1},t)^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\mathrm{d}x_1=\\&=(b_n-a_n)^2\int_R(\partial_n u)^2\,\mathrm{d}x\leq(b_n-a_n)^2\int_R\sum_j(\partial_j u)^2\,\mathrm{d}x=(b_n-a_n)^2\int_G\sum_j(\partial_j u)^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para $u\in H_0^1(G)$, existe una sucesión $\{u_m\}_m\subseteq\mathcal{D}(G)$ con $\lim_m\|u-u_m\|_{1,2}=0$ y por tanto $\lim_m\|u-u_m\|_2=\lim_m\|\partial_j u-\partial_j u_m\|_2=0$, y tomando límites y usando que la norma $\|\cdot\|_2\leq\|\cdot\|_{1,2}$ y por tanto es continua en $W^1(G)$,

$$C\int_G u^2-\int_G\sum_j(\partial_j u)^2=C\|u\|_2^2-\sum_j\|\partial_j u\|_2^2=\lim_m\left(C\|u_m\|_2^2-\sum_j\|\partial_j u_m\|_2^2\right)\leq 0.$$

Principio de Dirichlet: Sean $G\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto acotado no vacío, $f\in L^2(G)$ y $g\in W^1(G)$, $F:\{u\in W^1(G)\mid u-g\in H_0^1(G)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(u):=\frac{1}{2}\int_G\sum_j(\partial_j u)^2-\int_G fu$$

alcanza su mínimo en un único punto, que es el único $u\in\text{Dom}F$ tal que

$$\forall v\in H_0^1(G),\int_G\sum_j(\partial_j u)(\partial_j v)=\int_G fv$$

y es la única solución en $\text{Dom}F$ del problema de valores frontera para la ecuación de Poisson $-\nabla^2u=f$.

Demostración: Para $u,v\in W^1(G)$ definimos

$$B(u,v):=\int_G\sum_j(\partial_j u)(\partial_j v),\qquad b_0(v):=\int_G fv,\qquad b(v):=b_0(v)-B(v,g).$$

B es bilineal y simétrica, y es acotada porque

$$|B(u,v)|=\left|\sum_j\int_G(\partial_j u)(\partial_j v)\right|\leq\sum_j\left|\int_G(\partial_j u)(\partial_j v)\right|\leq\sum_j\|\partial_j u\|_2\|\partial_j v\|_2\leq n\|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2}.$$

Por la desigualdad de Poincaré-Friedrichs, existe $C>0$ tal que, para todo $v\in H$,

$$C\int_G v^2\leq\int_G\sum_j(\partial_j v)^2,$$

luego

$$C\|v\|_{1,2}^2=C\left(\int_G v^2+\sum_j(\partial_j v)^2\right)\leq(1+C)\int_G\sum_j(\partial_j v)^2=(1+C)B(v,v)$$

y B es fuertemente positiva. Además, b_0 es lineal y es acotada por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, y como B es bilineal y acotada, b es lineal acotada y se dan las condiciones del teorema principal de los problemas variacionales cuadráticos. Ahora bien, si $w := u - g \in H_0^1(G)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}B(w,w) - b(w) &= \frac{1}{2}\int_G \sum_j (\partial_j(u-g))^2 - \int_G f(u-g) + \int_G \sum_j (\partial_j(u-g))(\partial_j(g)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_G \sum_j (\partial_j(u-g))(\partial_j(u+g)) - \int_G f(u-g) = \\
&= \frac{1}{2}\int_G \sum_j (\partial_j u)^2 - \int_G fu + \frac{1}{2}\int_G \sum_j (\partial_j g)^2 + \int_G fg,
\end{aligned}
$$

luego minimizar F equivale a minimizar $\frac{1}{2}B(w,w) - b(w)$, y además

$$
\begin{aligned}
B(w,v) = b(v) &\iff B(u,v) - B(g,v) = b_0(v) - B(v,g) \iff B(u,v) = b_0(v) \iff \\
&\iff \int_G \sum_j (\partial_j u)(\partial_j v) = \int_G fv.
\end{aligned}
$$

Para la última parte, si u_0 cumple esta última fórmula para todo $v \in H_0^1(G)$, por integración por partes,

$$
0 = \int_G \sum_j (\partial_j u_0)(\partial_j v) - \int_G fv = -\int_G \sum_j (\partial_j \partial_j u_0) v - \int_G fv = -\int_G (\nabla^2 u_0 + f) v,
$$

con lo que $(\nabla^2 u_0 + f) \perp H_0^1(G)$ y, como $\mathcal{D}(G) \subseteq H_0^1(G)$ es denso en $L^2(G)$, $\nabla^2 u_0 + f = 0$.

2.8. Soluciones débiles

Dados $k, n \in \mathbb{N}$ y $a_\alpha \in \mathbb{K}^n$ para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| < k$, un **operador diferencial lineal de coeficientes constantes** es uno de la forma

$$
L := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha,
$$

y su **operador adjunto** es

$$
L^* := \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \overline{a_\alpha} \mathrm{D}^\alpha.
$$

Si $G \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, $\varphi, \psi \in L^2(G)$ son de clase $\mathcal{C}^k$ y una de las dos tiene soporte compacto, entonces $\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L^*\psi \rangle$.

Así, si G es un abierto en $\mathbb{R}^n$, $f, u \in L^2(G)$ son de clase $\mathcal{C}^k$ y $Lu = f$, entonces $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle$ para todo $\psi \in \mathcal{D}(G)$. Para $f \in L^2(G)$, $u \in L^2(G)$ es **solución débil** de la ecuación en derivadas parciales $Lu = f$ si para todo $\psi \in \mathcal{D}(G)$ es $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle$.

Si $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ y $u, f \in L^2((0,1))$, $Lu = f$ en sentido débil si y sólo si existe $F : (0,1) \to \mathbb{R}$ absolutamente continua con $F = u$ y $F' = f$ para casi todo $x \in (0,1)$.

La ecuación de ondas en una dimensión,

$$
\left\{
\begin{array}{rll}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & = 0, & t \in [0, +\infty), \\
u(x,0) & \equiv f(x), & x \in [0, \pi], \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & \equiv 0, &
\end{array}
\right.
$$

siendo $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ una función lineal a trozos, admite soluciones débiles que no son soluciones ordinarias.

Teorema de Malgrange-Ehrenpreis: Sean G un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y L un operador en derivadas parciales lineal con coeficientes constantes, existe un operador lineal continuo $K:L^2(G)\to L^2(G)$ tal que para todo $f\in L^2(G)$, $u:=K(f)$ es solución débil de $Lu=f$.

Demostración: Definimos $\langle\varphi,\psi\rangle_L:=\langle L^*\varphi,L^*\psi\rangle_2$, y para ver que es un producto escalar sobre $\mathcal{D}(G)$ vemos que existe $C>0$ tal que, para $\psi\in\mathcal{D}(G)$, $\|\psi\|_2\leq C\|L^*\psi\|_2$. Si $L^*=\frac{\partial}{\partial x_1}$, llamando $\psi(x):=0$ para $x\notin G$, para $x\in G$, como sop$\psi\subseteq G$ es compacto, sea $m:=\inf_{x\in G}x_1$,

$$\psi(x)^2=\left(\int_m^{x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{d}t\right)^2\leq\left(\int_m^{x_1}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_n)\right|\cdot 1\,\mathrm{d}t\right)^2\leq$$

$$\leq\int_m^{x_1}\mathrm{d}t\int_m^{x_1}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_n)\right|^2\mathrm{d}t\leq d\int_m^{x_1}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_n)\right|^2\mathrm{d}t,$$

donde d es el diámetro de G, e integrando de nuevo,

$$\|\psi\|_2^2=\int_G\psi(x)^2\,\mathrm{d}x\leq d\int_m^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\int_m^{x_1}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_n)\right|^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1\leq$$

$$\leq d^2\int_G\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)\right|^2\mathrm{d}x=d^2\|L^*\psi\|_2^2.$$

Si $L^*=\frac{\partial}{\partial x_i}$ para otro i, es análogo, y si $L^*=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{|\alpha|}$, por inducción, $\|\psi\|_2\leq d^{|\alpha|}\|L^*\psi\|_2$. Para L arbitrario basta hacer combinaciones lineales. Visto esto, sean $H_0:=(\mathcal{D}(G),\langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ y H su compleción, $L^*:H_0\to L^2(G)$ es lineal y continuo y por tanto admite una extensión lineal y continua $\hat{L}^*:H\to L^2(G)$. Sea ahora $f\in L^2(G)$ y $l_0:H_0\to\mathbb{K}$ dada por $l_0(\psi):=\langle\psi,f\rangle_2$,

$$|l_0(\psi)|=|\langle\psi,f\rangle_2|\leq\|\psi\|_2\|f\|_2\leq C\|f\|_2\|L^*\psi\|_2,$$

donde C es tal que $\|\psi\|_2\leq C\|L^*\psi\|_2$ para todo ψ, de modo que l_0 es lineal continua por la cota $C\|f\|_2$ y se puede extender a una forma lineal y continua $l:H\to\mathbb{K}$ con $\|l\|\leq C\|f\|_2$. Por el teorema de Riesz, existe un único $\hat{u}\in H$ con $l(h)\equiv\langle h,\hat{u}\rangle_L$ para $h\in H$ y además $\|\hat{u}\|_H=\|l\|_H$, y tomando $u:=\hat{L}^*\hat{u}$, $l(h)=\langle\hat{L}^*h,\hat{L}^*\hat{u}\rangle=\langle\hat{L}^*h,u\rangle_2$, pero para $\psi\in\mathcal{D}(G)$, $l(\psi)=\langle\psi,f\rangle_2$ y $\hat{L}^*(\psi)=L^*\psi$, con lo que $\langle L^*\psi,u\rangle_2=l(\psi)=\langle\psi,f\rangle_2$, y basta llamar $K(f):=u$. Para la continuidad de K,

$$\|K(f)\|_2=\|u\|_2=\|\hat{L}^*\hat{u}\|_2=\|\hat{u}\|_H=\|l\|_H=\sup_{\|\psi\|_H=\|L^*\psi\|_2=1}|l(\psi)|\leq C\|f\|_2.$$

2.9. Método de Galerkin

Sean $M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots\subseteq M_n\subseteq\dots$ una sucesión de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H con unión densa en H, $a:H\times H\to\mathbb{R}$ bilineal, simétrica, continua y fuertemente positiva, $b:H\to\mathbb{R}$ lineal continua,

$$J(x):=\frac{1}{2}a(x,x)-b(x)$$

para $x\in H$, $u\in H$ con $J(u)$ mínimo y, para $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in M_n$ con $J(u_n)$ mínimo, de modo que $a(x,u_n)=b(x)$ para todo $x\in M_n$ y $a(x,u)=b(x)$ para todo $x\in H$:

1. **Teorema de Galerkin-Ritz:** $\lim_n u_n = u$.

   Para $x \in M_n$, $a(x, u_n) = b(x)$, y para $x \in H$, $a(x, u) = f(x)$, luego $a(x, u - u_n) = b(x) - b(x) = 0$ para $x \in M_n$. Pero a es un producto escalar equivalente al de H, luego $u - u_n \perp M_n$ y, si $P_n : H \to M_n$ es la proyección ortogonal, $P_n(u) = u_n$. Por el teorema de la proyección, $\|u - u_n\| = \|u - P_n(u)\| = d(u, M_n)$, pero por la densidad es $d(u, \bigcup_n M_n) = 0$, y para $\varepsilon > 0$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ e $y \in M_{n_0}$ con $\|u - y\| < \varepsilon$, y como la sucesión es creciente, para $n \geq n_0$, $\|u - u_n\| = d(u, M_n) \leq d(u, M_{n_0}) \leq \|u - y\| < \varepsilon$, con lo que $\lim_n u_n = u$.

2. Dados $c, d > 0$ con $a(x, y) \leq d\|x\|\|y\|$ y $c\|x\|^2 \leq a(x, x)$ para todo $x, y \in H$, $\|u\| \leq \frac{\|b\|}{c}$, $\|u - u_n\| \leq \frac{d}{c} d(u, M_n)$ y, si β es cota inferior de $J(H)$, $\|u - u_n\|^2 \leq \frac{2}{c}(J(u_n) - \beta)$.

El **método de Galerkin** para resolver un problema de esta forma consiste en tomar en el teorema anterior los M_n de dimensión finita y resolver los sistemas de ecuaciones lineales resultantes, con matriz de coeficientes simétrica y definida positiva de tamaño $\dim M_n$. Tomando adecuadamente las bases de los M_n se puede conseguir que las matrices tengan muchas entradas nulas.

2.10. Bases hilbertianas

Sean $(H_i)_{i \in I}$ una familia de $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert, $H_0 := \prod_{i \in I} H_i$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_0 \times H_0 \to [0, +\infty]$ dada por

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{H_i},$$

llamamos **suma directa hilbertiana** o **suma** ℓ^2 de $\{H_i\}_{i \in I}$ al espacio de Hilbert

$$\bigoplus_{i \in I} H_i := \ell^2((H_i)_{i \in I}) := (\{x \in H_0 \mid \langle x, x \rangle < \infty\}, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Cada H_i es isométricamente isomorfo al subespacio de H de los vectores con todas las coordenadas nulas salvo la i, los H_i son mutuamente ortogonales en H, H es la clausura lineal cerrada de los H_i y cada $x \in H$ se puede expresar de forma única como $\sum_{i \in I} x_i$ con cada $x_i \in H_i$.

Si H es un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $(H_i)_{i \in I}$ es una familia de subespacios cerrados de H mutuamente ortogonales con $H = \overline{\text{span}\{H_i\}_{i \in I}}$, entonces H es isométricamente isomorfo a $\bigoplus_{i \in I} H_i$, e identificamos H con $\bigoplus_{i \in I} H_i$.

Desigualdad de Bessel: Sean H un espacio prehilbertiano y $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ una familia ortonormal, para $x \in H$,

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Para un conjunto I arbitrario, llamamos $\ell^2(I) := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}$.

Teorema de la base hilbertiana: Sean H un espacio de Hilbert y $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ una familia ortonormal, $\{e_i\}_{i \in I}$ es ortonormal maximal (por inclusión) si y sólo si $\forall x \in H, (\forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0 \implies x = 0)$, si y sólo si es un conjunto total, si y sólo si $\hat{} : H \to \ell^2(I)$ dada por $\hat{x} := (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ es inyectiva, si y sólo si todo $x \in H$ admite un **desarrollo de Fourier**

$x = \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle e_i$, si y sólo si $\forall x,y\in H, \langle x,y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_i\rangle}$, si y sólo si todo $x\in H$ cumple la **identidad de Parseval**, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2$, y entonces decimos que $(e_i)_{i\in I}$ es una **base hilbertiana** de H o un **sistema ortonormal completo**.

$1 \implies 2]$ Entonces $x\perp\{e_i\}_{i\in I}$, por lo que si $x\neq 0$, $\{e_i\}_{i\in I}\cup\{x\}$ sería ortogonal.#

$2 \iff 3]$ Sabemos que un $S\subseteq H$ es total si y sólo si $S^\perp = 0$.

$2 \iff 4]$ Por ser $\hat{}$ lineal.

$4 \implies 5]$ $\sum_i\widehat{\langle x,e_i\rangle e_i} = \sum_i\langle x,e_i\rangle\hat{e}_i = \sum_i\langle x,e_i\rangle e_i = \hat{x}$, y por inyectividad $x = \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle e_i$.

$5 \implies 6]$ $\langle x,y\rangle = \sum_{i,j\in I}\langle\langle x,e_i\rangle e_i,\langle y,e_j\rangle e_j\rangle = \sum_{i,j\in I}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}\langle e_i,e_j\rangle = \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}$.

$6 \implies 7]$ Basta tomar $x = y$.

$7 \implies 1]$ Si fuera $\{e_i\}_i \subsetneq M \subseteq H$ con M ortonormal, para $x\in M\setminus\{e_i\}_i$, $1 = \|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2 = 0$#.

Primer teorema de Riesz-Fischer: Si H es un espacio prehilbertiano con una familia ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ y $\hat{}: H\to\mathbb{K}^I$ viene dada por $\hat{x} := (\langle x,e_i\rangle)_{i\in I}$, $\hat{}$ es lineal y continua con imagen contenida en $\ell^2(I)$ e igual a $\ell^2(I)$ si H es de Hilbert.

Si H es un espacio de Hilbert, todo espacio ortonormal de vectores en H se puede completar a una base hilbertiana de H, y en particular todo espacio de Hilbert posee una base hilbertiana y es isométricamente isomorfo a un $\ell^2(I)$.

Los espacios de Hilbert $\ell^2(I)$ y $\ell^2(J)$ son topológicamente isomorfos si y sólo si $|I| = |J|$.

Llamamos **dimensión hilbertiana** de un espacio de Hilbert al cardinal de cualquier base hilbertiana. **Segundo teorema de Riesz-Fischer:** Si H es de dimensión infinita, $\dim H = \aleph_0 := |\mathbb{N}|$ si y sólo si $H\cong\ell^2$, si y sólo si H es separable.

$1 \iff 2]$ Por lo anterior.

$2 \implies 3]$ Visto.

$3 \implies 2]$ Dado $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq H$ denso, como H es de dimensión infinita, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ linealmente independiente de $(x_n)_n$ con $\operatorname{span}\{x_n\}_n = \operatorname{span}\{x_{n_k}\}_k$, luego $\overline{\operatorname{span}\{x_{n_k}\}_k} = H$ y el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt nos da una base hilbertiana numerable de H.

Así, si $Z\leq_{\mathbb{K}}\ell^2$ es cerrado de dimensión infinita, $Z\cong\ell^2$.

2.11. Aproximaciones por polinomios

Teorema de Korovkin: Sean $p_0,p_1,p_2 : [a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $p_k(t) := t^k$ y $(P_n : \mathcal{C}([a,b])\to\mathcal{C}([a,b]))_n$ una sucesión de funciones lineales positivas $(\forall f\in\mathcal{C}([a,b]),(f\geq 0 \implies P_n(f)\geq 0))$ con $\lim_n\|P_n(p_k)-p_k\|_\infty = 0$ para $k\in\{0,1,2\}$, entonces, para $f\in\mathcal{C}([a,b])$, $\lim_n\|P_n(f)-f\|_\infty = 0$.

Teorema de Weierstrass: El conjunto de polinomios en una variable es denso $(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$, y en particular $(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ es separable.

Así, para $f \in \mathcal{C}([a,b])$, se puede encontrar una sucesión de polinomios que converja uniformemente a f. Hacerlo con polinomios de interpolación por nodos prefijados no es una buena estrategia ya que para toda secuencia de nodos de interpolación en $[a,b]$, existe $f \in \mathcal{C}([a,b])$ para la que los polinomios de interpolación en dichos nodos no converge uniformemente a f. Si se hace con nodos equidistantes se da el fenómeno de Runge.

Teorema de Čebyšev: Para $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y $n \in \mathbb{N}$, si $K_n \subseteq \mathbb{K}[X]$ es el conjunto de polinomio de grado máximo n, $p : K_n \mapsto \|f-p\|_\infty$ tiene un único mínimo p_n, y $(p_n)_n$ converge uniformemente a f.

Un **polinomio trigonométrico real** es una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$p(x) := \sum_{n=0}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

para ciertos $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. **Teorema de Weierstrass:** Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua con $f(-\pi) = f(\pi)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico real p con $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$.

Para $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrable y $r \in \mathbb{Z}$, llamamos **r-ésimo coeficiente de Fourier** de f a

$$\hat{f}(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}rt}\,\mathrm{d}t,$$

y **serie de Fourier** de f a la serie formal

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} \hat{f}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}rt}.$$

Para $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrable y $n \in \mathbb{N}^*$, llamando

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f, \qquad a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \qquad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t,$$

la **serie de Fourier real** de f es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt).$$

Como **teorema**, sean $([-\pi,\pi], \Sigma, \mu)$ es el espacio de medida usual en $[-\pi,\pi]$, $M_\mathbb{R} := L^2_\mathbb{R}([-\pi,\pi], \Sigma, \frac{\mu}{\pi})$ y $M_\mathbb{C} := L^2_\mathbb{C}([-\pi,\pi], \Sigma, \frac{\mu}{2\pi})$:

1. El **sistema trigonométrico** $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}rt})_{r\in\mathbb{Z}}$ es una base hilbertiana de $M_\mathbb{C}$.

2. $(\cos(nt))_{n\in\mathbb{N}} \star (\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una base hilbertiana de $M_\mathbb{R}$.

3. Para $f \in M_\mathbb{C}$, f coincide con su serie de Fourier en $\|\cdot\|_2$.

4. Para $f \in M_\mathbb{R}$, f coincide con su serie de Fourier real en $\|\cdot\|_2$.

5. $\mathcal{F} : M_\mathbb{C} \to \ell^2(\mathbb{Z})$ que asigna a cada función su familia de coeficientes de Fourier $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ es un isomorfismo de espacios de Hilbert.

Un **peso** en un intervalo cerrado $I \subseteq \mathbb{R}$ es una $p \in \mathcal{C}(I)$ estrictamente positiva tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |t|^n p(t)\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \to [-\infty, +\infty]$ dada por

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_I f\overline{g}p$$

es un producto escalar en $H_p \coloneqq \{f \in \mathcal{C}(I) \mid \langle f, f \rangle < \infty\}$.

Llamamos **sucesión de polinomios ortonormales** asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o al peso p en I a una sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H_p$ de polinomios con $\operatorname{span}\{1, t, \dots, t^n\} = \operatorname{span}\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y entonces, para $n \in \mathbb{N}$:

1. P_n es un polinomio de grado n con coeficientes reales.
2. P_n es ortogonal en H_p al subespacio de polinomios de grado menor que n.
3. P_n tiene n raíces distintas en (a, b).

Ejemplos:

1. **Polinomios de Legendre:** $I = [-1, 1]$, $p(t) = 1$, $P_n(t) = \frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n (t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^n}$.
2. **Polinomios de Laguerre:** $I = [0, \infty)$, $p(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $P_n(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{n!} \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{-t} t^n}{\mathrm{d}t^n}$.
3. **Polinomios de Hermite:** $I = \mathbb{R}$, $p(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, $P_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}} \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{-t^2}}{\mathrm{d}t^n}$.
4. **Polinomios de Čebyšev:** $I = [-1, 1]$, $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $P_n(t) = \cos(n \arccos t)$, siendo $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Una sucesión de polinomios ortonormales asociada a un peso p en un intervalo compacto es total en H_p, y en particular los polinomios de Legendre forman una base hilbertiana en $L^2([-1, 1])$.

Si p es un peso en $[a, b]$ y $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$, se tiene una **fórmula de cuadratura gaussiana**,

$$\int_a^b fp \approx \sum_{k=1}^n A_k f(t_k)$$

para ciertos $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$, y se alcanza la igualdad si f es un polinomio de grado menor que n.

Teorema de Gauss: Dados un peso p en $[a, b]$ con una sucesión de polinomios ortonormales $(P_n)_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a < t_1 < \dots < t_n < b$ y $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$, si

$$\int_a^b fp = \sum_{k=1}^n A_k f(t_k)$$

para todo polinomio f de grado menor que n, esta fórmula se para polinomios de grado menor que $2n$ si y sólo si $t_1, \dots, t_n$ son los ceros de P_n.

Teorema de Stieltjes: Sean p un peso en $[a,b]$ con una sucesión de polinomios ortonormales $(P_n)_n$ y, para $n\in\mathbb{N}$, $t_{n1}<\dots<t_{nn}$ los ceros de P_n y $A_{n1},\dots,A_{nn}\in\mathbb{R}$ los correspondientes coeficientes en la fórmula de cuadratura gaussiana, para $f\in\mathcal{C}([a,b])$,

$$\int_a^b fp = \lim_n \sum_{k=1}^n A_{nk} f(t_{nk}).$$

2.12. El espacio de Bergman

Llamamos $D(a,r) := B(a,r) \subseteq \mathbb{C}$. Si $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ es abierto, $\mathcal{H}(\Omega)$ es el conjunto de las funciones holomorfas en Ω, y para $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)}\subseteq\Omega$, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-a)^n$ con $z\in D(a,r)$ converge uniformemente a f en compactos de $D(a,r)$ para ciertos $a_n\in\mathbb{C}$.

Si $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ es abierto, llamamos $\mathcal{T}_\mathrm{K}$ a la topología en $\mathcal{H}(\Omega)$ de convergencia uniforme sobre compactos, y **espacio de Bergman** en el abierto $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ a

$$A^2(\Omega) := \left\{ f\in\mathcal{H}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega |f|^2 < \infty \right\},$$

un subespacio cerrado y separable de $L^2(\Omega)$ que es pues un espacio de Hilbert numerable con $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, y en el que la topología inducida por $L^2(\Omega)$ es más fina que la inducida por $\mathcal{T}_\mathrm{K}$.

Si $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ es abierto, $(\omega_n)_n$ es base hilbertiana de $A^2(\Omega)$ y $f\in A^2(\Omega)$, el desarrollo en serie de Fourier de f, $\sum_n\langle f,\omega_n\rangle\omega_n$, converge uniformemente a f en compactos de Ω.

Si $\psi_n(z) := (z-a)^n$, $(\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|})_n$ es una base hilbertiana de $A^2(D(a,r))$, y el desarrollo en serie de potencias es el desarrollo en serie de Fourier sobre esta base.

Como **teorema**, si $\Omega\subsetneq\mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo y $f:\Omega\to D(0,1)$ es un isomorfismo, $\left(z\mapsto\sqrt{\frac{n}{\pi}}(f(z))^{n-1}\dot{f}(z)\right)_n$ es base hilbertiana de $A^2(\Omega)$, y en particular para $R>0$, $\left(z\mapsto\sqrt{\frac{n}{\pi}}R^{-n}z^{n-1}\right)_n$ es base hilbertiana de $A^2(D(0,R))$.

Capítulo 3

Teoría espectral

Algunos operadores acotados en espacios de Hilbert:

1. Sean G y H espacios prehilbertianos y G de dimensión finita con base $(e_i)_i$, todo homomorfismo $T : G \to H$ es acotado con
$$\|T\| \leq \sqrt{\sum_i \|Te_i\|^2}.$$

2. Sean G y H $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert de dimensión $\aleph_0$ con bases ortonormales $(e_n)_n$ y $(f_n)_n$ y $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{K}$ una sucesión acotada, el **operador diagonal** $T : G \to H$ dado por
$$T(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle f_n$$
es acotado con $\|T\| = \sup_n |a_n|$.

3. Si $g \in L^\infty([a, b])$, el **operador multiplicación por** g, $T : L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ dado por $Tf \coloneqq gf$, es acotado con $\|T\| = \|g\|_\infty$.

4. Sean G y H $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert de dimensión $\aleph_0$ con bases ortonormales respectivas $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ y $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ una matriz infinita con $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty$, $T : G \to H$ dado por
$$T(x) \coloneqq \sum_{i,j} a_{ij} \langle x, u_i \rangle v_j$$
es un operador acotado con $\|T\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$.

5. Si $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$, el **operador integral con núcleo** k, $K : L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ dado por
$$K(f)(t) \coloneqq \int_a^b k(t, s) f(s) \, \mathrm{d}s,$$
es acotado con $\|K\| \leq \sqrt{\iint_{[a,b]\times[a,b]} |k|^2}$.

6. Una matriz infinita $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ satisface el **test de Schur** si existen $C, D \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \sum_j |a_{ij}| \leq C, \qquad\qquad \forall j \in \mathbb{N}, \sum_i |a_{ij}| \leq D.$$

   Entonces, si G y H son $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert de dimensión $\aleph_0$ con bases ortonormales respectivas $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$, $T : G \to H$ dada por

$$T(x) \coloneqq \sum_{i,j} a_{ij}\langle x, u_i\rangle v_j$$

   es un operador acotado con $\|T\| \leq \sqrt{CD}$.

7. Sean $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ medible y $C, D \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall t \in [a,b], \int_a^b |k(t,s)|\,\mathrm{d}s \leq C, \qquad\qquad \forall s \in [a,b], \int_a^b |k(t,s)|\,\mathrm{d}t \leq D,$$

   entonces $K : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ dada por

$$K(f)(t) \coloneqq \int_a^b k(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

   es un operador acotado con $\|K\| \leq \sqrt{CD}$.

Si H es un espacio de Hilbert de dimensión $\aleph_0$ con base ortonormal $(e_n)_n$, para $T \in L(H)$ y $x \in H$,

$$T(x) = \sum_{i,j} \langle x, e_j\rangle\langle Te_j, e_i\rangle e_i,$$

con lo que T admite una representación matricial $(\langle Te_j, e_i\rangle)_{i,j} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

$T \in L(X,Y)$ es **de rango finito** si $\dim \mathrm{Im}T < \infty$. Dados espacios de Hilbert G y H y $T \in L(G,H)$, T es de rango finito si y sólo si viene dada por $T(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle v_i$ para ciertos $u_1, \dots, u_n \in G$ y $v_1, \dots, v_n \in H$, en cuyo caso los $(v_i)_i$ pueden tomarse de forma que sean una base de $\mathrm{Im}T$.

3.1. Inversión de operadores

Si X e Y son $\mathbb{K}$-espacios normados, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ cumplen $ST = 1_X$ entonces S es el **inverso por la izquierda** de T y T es el **inverso por la derecha** de S, y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es **invertible** si existe $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ inverso de T por la izquierda y por la derecha. Llamamos $\mathcal{L}(X) \coloneqq \mathrm{End}_{\mathbb{K}}X = \mathcal{L}(X,X)$ e

$$\mathrm{Isom}X \coloneqq \mathrm{Isom}_{\mathbb{K}}(X) \coloneqq \{T \in \mathcal{L}(X) \mid T \text{ invertible}\}.$$

Si X es de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(X)$ tiene inverso por la izquierda si y sólo si lo tiene por la derecha, si y sólo si es invertible. Esto no es cierto en general en dimensión infinita; por ejemplo, el operador **desplazamiento a derecha**, $S_{\mathrm{r}} \in \ell^2$ dado por $S_{\mathrm{r}}(x_1, \dots, x_n, \dots) \coloneqq$

$(0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, tiene como inverso por la izquierda el **desplazamiento a izquierda**, $S_{\mathrm{l}} \in \ell^2$ dado por $S_{\mathrm{l}}(x_1, \dots, x_n, \dots) := (x_2, \dots, x_n, \dots)$, pero no tiene inverso por la derecha.

Sea $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor regular** de T si $T - \lambda 1_X$ es invertible, un **valor espectral** en otro caso, y un **valor propio** si $\ker(T - \lambda 1_X) \neq 0$, en cuyo caso llamamos **subespacio propio** de T correspondiente al valor propio λ a $\ker(T - \lambda 1_X)$ y **valores propios** de T correspondientes al valor propio λ a los elementos no nulos de este subespacio. Llamamos **resolvente** de T al conjunto de sus valores regulares, **espectro** de T, $\sigma(T)$, al conjunto de sus valores espectrales y **espectro puntual** de T, $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subseteq \sigma(T)$, al conjunto de sus valores propios.

Si X es de dimensión finita, $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T)$. Sin embargo, $0 \in \sigma(S_{\mathrm{r}})$ pero $\sigma_{\mathrm{p}}(S_{\mathrm{r}}) = \emptyset$.

Como **teorema**, si X es un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$ cumple $\|T\| < 1$, $1_X - T$ es invertible con inverso $\sum_{n \in \mathbb{N}} T^n$ y $\|(1_X - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$. **Demostración:** Para $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^n \|T\|^k \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}$, con lo que $\sum_n \|T^n\|$ converge y, por ser X de Banach, $S := \sum_n T^n$ también, pero $S(1_X - T) = S - ST = T^0 = 1_X$ y análogamente $(1_X - T)S = 1_X$, luego $S = (1_X - T)^{-1}$, y finalmente

$$\|(1_X - T)^{-1}\| = \left\| \sum_n T^n \right\| \leq \sum_n \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Teorema de von Neumann: Sean X es un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ invertible y $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, entonces S es invertible con

$$S^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (T^{-1}(T - S))^n T^{-1}, \qquad \left\| T^{-1} - S^{-1} \right\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|T - S\|}{1 - \|T^{-1}\| \|T - S\|}.$$

Demostración: $\|T^{-1}(T - S)\| = \|T - S\| \|T^{-1}\| < 1$, luego por el teorema anterior $1_X - T^{-1}(T - S) = T^{-1}S$ es invertible con

$$(T^{-1}S)^{-1} = \sum_n (T^{-1}(T - S))^n,$$

luego $S = T(T^{-1}S)$ es invertible con inversa $(T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$ y

$$\begin{aligned} \|T^{-1} - S^{-1}\| &= \|T^{-1} - (T^{-1}S)^{-1}T^{-1}\| = \|(1_X - (T^{-1}S)^{-1})T^{-1}\| \leq \\ &\leq \left\| \left(1_X - \sum_n (T^{-1}(T - S))^n \right) T^{-1} \right\| = \left\| \sum_{n \geq 1} (T^{-1}(T - S))^n T^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \|(T^{-1}(T - S))^n\| \|T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|T - S\|}{1 - \|T^{-1}\| \|T - S\|}. \end{aligned}$$

Así, si X es un espacio de Banach, $\mathrm{Isom} X$ es un abierto de $\mathcal{L}(X)$ y $\cdot^{-1} : \mathrm{Isom} X \to \mathrm{Isom} X$ es continua con la norma de $\mathcal{L}(X)$.

Teorema de Liouville: Toda función [...][compleja holomorfa y] acotada es constante.

Teorema de Gelfand: Si ${}_{\mathbb{C}}X$ es de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(T)$ es compacto no vacío contenido en $B(0, \|T\|)$. **Demostración:** Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus B[0, \|T\|]$, $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$, luego $\lambda 1_X - T = \lambda(1_X - \frac{T}{\lambda})$ es invertible y $\lambda \notin \sigma(T)$. La función $\psi : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X)$ dada por $\psi(\lambda) := \lambda 1_X - T$ es continua y por tanto $\mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \psi^{-1}(\text{Isom}X)$ es abierto, con lo que $\sigma(T)$ es cerrado acotado y por tanto compacto. Si fuera vacío, podemos definir $\phi : \mathbb{C} \to \text{Isom}X$ como $\phi(\lambda) := (\lambda 1_X - T)^{-1}$, que es continua, pero para $\lambda, h \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\phi(\lambda+h) - \phi(\lambda)}{h} = \frac{((\lambda+h)1_X - T)^{-1}(\lambda 1_X - T)^{-1}((\lambda 1_X - T) - ((\lambda+h)1_X - T))}{h} = \\ = -((\lambda+h)1_X - T)^{-1}(\lambda 1_X - T)^{-1},$$

de donde

$$\dot{\phi}(\lambda) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(\lambda+h) - \phi(\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0} (-((\lambda+h)1_X - T)^{-1}(\lambda 1_X - T)^{-1}) = -((\lambda 1_X - T)^{-1})^2,$$

con lo que ϕ es holomorfa y $\dot{\phi} \neq 0$, pero

$$\|\phi(\lambda)\| = \|(\lambda 1_X - T)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(1_X - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{T^n}{\lambda^n}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|},$$

con lo que $\lim_{|\lambda|\to\infty} \|\phi(\lambda)\| = \infty$ y por tanto, como ϕ es continua, es acotada y, por el teorema de Liouville[1], ϕ es constante y $\dot{\phi} = 0\#$.

Dados $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ con $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < 1$ e $y \in \ell^2$, el sistema

$$x_k - \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{kj}x_j = y_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

tiene solución única $z \in \ell^2$, y para $n \in \mathbb{N}$, el sistema truncado

$$x_k - \sum_{j\in\mathbb{N}_n} a_{kj}x_j = y_k, \qquad k \in \mathbb{N}_n$$

tiene una única solución $z_n \in \mathbb{K}^n$ de modo que, si $J_n : \mathbb{K}^n \to \ell^2$ es la inclusión canónica de $\mathbb{K}^n$ en las n primeras coordenadas, $\lim_n J_n(z_n) = z$.

Sean $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ con $\|k\|_2 < 1$ y $g \in L^2([a,b])$, la ecuación

$$f(t) - \int_a^b k(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s = g(t), \qquad t \in [a,b],$$

tiene solución única que es de la forma

$$g(t) + \int_a^b \tilde{k}(t,s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

[1]Que todavía no hemos visto que se de para espacios vectoriales infinitos pero suponemos que se cumple.

para cierto $\tilde{k} \in L^2([a,b] \times [a,b])$.

Si K es el operador integral con núcleo $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, $\|k\|_2 < 1$ y

$$\forall t \in [a,b], \int_a^b |k(t,s)|^2 \,\mathrm{d}s \leq C,$$

para $g \in L^2([a,b])$, la serie $\sum_n K^n g$ converge en $L^2([a,b])$ y converge absoluta y uniformemente en $[a,b]$.

Con todo esto, para $g \in L^2([0,1])$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la ecuación integral

$$f(t) - \lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{t-s} f(s) \,\mathrm{d}s = g(t)$$

tiene solución única

$$f(t) = g(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 \mathrm{e}^{t-s} g(s) \,\mathrm{d}s.$$

3.2. Operador adjunto

Si G y H son espacios de Hilbert y $T \in L(G,H)$:

1. $$\|T\| = \sup_{x,y \in \overline{B_G}} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{x,y \in B_G} |\langle Tx, y\rangle|.$$

2. Existe un único $T^* \in L(H,G)$ tal que $\forall x \in G, \forall y \in H, \langle Tx, y\rangle \equiv \langle x, T^* y\rangle$, el **adjunto** de T.

3. $\|T\| = \|T^*\|$.

Sean G, H y J $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert, $A, B \in L(G,H)$, $C \in L(H,J)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.
3. $A^{**} = A$.
4. $(AC)^* = C^* A^*$.
5. Si A es invertible, también lo es A^* y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
6. $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.
7. $\ker A = (\mathrm{Im} A^*)^\perp$ y $\ker A^* = (\mathrm{Im} A)^\perp$.
8. $(\ker A)^\perp = \overline{\mathrm{Im} A^*}$ y $(\ker A^*)^\perp = \overline{\mathrm{Im} A}$.

Ejemplos:

1. En ℓ^2, el adjunto de S_r es S_l y viceversa.

2. Si H es un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de rango finito dado por $K(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle v_i$, su adjunto es de rango finito dado por $K^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle u_i$.

3. Si H es un espacio de Hilbert con base $(e_i)_{i \in I}$ y $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador diagonal con $A(e_i) \coloneqq \lambda_i e_i$ para ciertos λ_i, entonces A^* es un operador diagonal con $A^*(e_i) = \overline{\lambda_i} e_i$.

4. Si $K \in \mathcal{L}(L^2([a,b]))$ es el operador multiplicación por $g \in L^\infty([a,b])$, K^* es el operador multiplicación por $\overline{g}$.

5. Si H es un espacio de Hilbert separable con base hilbertiana $(e_n)_{n \in I}$ y $A \in \mathcal{L}(H)$ se expresa en dicha base como $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{I \times I}$, A^* se expresa en dicha base como $(\overline{a_{ji}}) \in \mathbb{K}^{I \times I}$.

6. Si $K \in \mathcal{L}(L^2([a,b]))$ es el operador integral con núcleo $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, K^* es el operador integral con núcleo $k^*(t,s) \coloneqq \overline{k(s,t)}$.

7. Si H es un espacio de Hilbert, $M \leq H$ es cerrado e $\iota : M \hookrightarrow H$ es la inclusión, $\iota^* : H \to M$ es la proyección ortogonal.

En general el adjunto no existe en espacios prehilbertianos. Por ejemplo, $T : c_{00} \to c_{00}$ dado por $T(x) \coloneqq \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}(1, 0, \dots)$ no tiene adjunto en $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ es **autoadjunto** o **hermitiano** si $A^* = A$. Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ son autoadjuntos:

1. $\|A\| = \sup_{x \in \overline{B_H}} |\langle Ax, x \rangle| = \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x \rangle|$.

2. Los valores propios de A son reales.

3. $\forall x \in H, \langle Ax, x \rangle = 0 \implies A = 0$.

4. $H = \ker A \oplus \overline{\mathrm{Im} A}$.

5. $A + B$ es autoadjunto, y AB lo es si y sólo si $AB = BA$.

Si ${}_{\mathbb{C}}H$ es un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$:

1. A es autoadjunto si y sólo si $\forall x \in H, \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

2. \Existen únicos $\mathrm{Re} A, \mathrm{Im} A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjuntos, la **parte real** y la **imaginaria** de A, con $A = \mathrm{Re} A + \mathrm{i} \mathrm{Im} A$.

3. $[\![A]\!] \coloneqq \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x \rangle|$ es una norma en $\mathcal{L}(H)$ equivalente a la usual.

Si H es un espacio de Hilbert con base $(e_i)_{i \in I}$:

1. El operador diagonal $T \in \mathcal{L}(H)$ con $T(e_i) \eqqcolon \lambda_i e_i$ es autoadjunto si y sólo si $\{\lambda_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$.

2. Si H es separable y $A \in \mathcal{L}(H)$ se representa respecto a la base como la matriz $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{I \times I}$, A es autoadjunto si y sólo si $\forall i, j \in I, a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

3. El operador multiplicación por $g \in L^\infty([a,b])$ en $L^2([a,b])$ es autoadjunto si y sólo si $g(t)$ es real para casi todo $t \in [a,b]$.

4. El operador integral con núcleo $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ en $L^2([a,b])$ es autoadjunto si y sólo si $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ para casi todo $(s,t) \in [a,b] \times [a,b]$.

5. Una proyección ortogonal $P : H \to H$ sobre un subespacio cerrado es autoadjunto.

Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ es **normal** si $AA^* = A^*A$, si y sólo si $\forall x, y \in H, \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle$, si y sólo si $\forall x \in H, \|Ax\| = \|A^*x\|$.

1. Si H es un espacio de Hilbert complejo, $A \in \mathcal{L}(H)$ es normal si y sólo si $\mathrm{Re}A \circ \mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A \circ \mathrm{Re}A$.

2. Todo operador diagonal es normal.

3. El operador integral sobre $L^2([a,b])$ con núcleo $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ es normal si y sólo si

$$\int_a^b \overline{k(s,t)} k(s,x) \, \mathrm{d}s = \int_a^b k(t,s) \overline{k(x,s)} \, \mathrm{d}s$$

para casi todo $(t,x) \in [a,b] \times [a,b]$.

Una **proyección** en un espacio normado X es un operador $X \to X$ idempotente. Si H es un espacio de Hilbert y P es una proyección continua no nula en X, P es una proyección ortogonal si y sólo si $\|P\| = 1$, si y sólo si $\mathrm{Im}P = (\ker P)^\perp$, si y sólo si $\ker P = (\mathrm{Im}P)^\perp$, si y sólo si P es autoadjunto, si y sólo si es normal, si y sólo si $\forall x \in H, \langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$, si y sólo si $\forall x \in H, \langle Px, x \rangle \geq 0$.

Existen proyecciones no ortogonales, como $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $p(x,y) := (x+y, 0)$.

Si H es un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \sigma(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es normal:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ker(T - \lambda 1_H) = \ker(T^* - \overline{\lambda} 1_H)$.

2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, (\lambda \neq \mu \implies \ker(T - \lambda 1_H) \perp \ker(T - \mu 1_H))$.

3. $\ker(T - \lambda 1_H)$ y $\ker(T - \lambda 1_H)^\perp$ son T-invariantes.

3.3. Operadores compactos

Dado un espacio topológico X, $Y \subseteq X$ es **relativamente compacto** en X si su clausura en X es compacta. Sean X e Y espacios normados, una función lineal $T : X \to Y$ es **compacta** si $T(B_X)$ es relativamente compacta en Y, si y sólo si para cada sucesión acotada $\{x_n\}_n \subseteq X$, $(Tx_n)_n$ posee una subsucesión convergente, si y sólo si esto se cumple cuando cada $\|x_n\| = 1$.

1. Los operadores de rango finito son compactos.

2. El operador identidad en un espacio de dimensión infinita nunca es compacto.

Llamamos $\mathcal{K}(X,Y)$ al subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X,Y)$ de los operadores compactos, que es cerrado si Y es de Banach.

Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T \in \mathcal{K}(Y,Z)$ y $B \in \mathcal{L}(Z,W)$, $BTA \in \mathcal{K}(X,W)$, y en particular $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X,X)$ es un ideal de $\mathcal{L}(X)$.

Si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$:

1. $\mathrm{Im}T$ es un subespacio separable de Y.

2. Si Y es de Hilbert, $\overline{\text{Im}T}$ es de dimensión infinita con base hilbertiana $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, para $n\in\mathbb{N}$, $P_n\in\mathcal{L}(Y)$ es la proyección ortogonal sobre $\text{span}\{e_i\}_{i\leq n}$, entonces $T=\lim_n P_nT\in\mathcal{L}(X,Y)$.

Así, si Y es de Hilbert, $\mathcal{K}(X,Y)$ es la clausura en $\mathcal{L}(X,Y)$ del conjunto de operadores acotados de rango finito. Esto no es cierto cuando Y es un espacio de Banach arbitrario.

Si G y H son espacios de Hilbert, $T\in\mathcal{L}(G,H)$ es compacto si y sólo si lo es T^*.

Con esto:

1. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son bases hilbertianas respectivas de G y H y $T:G\to H$ es un operador diagonal dado por $Te_n:=\lambda_n f_n$, T es compacto si y sólo si $\lim_n\lambda_n=0$.

2. El operador multiplicación por $g\in L^\infty([a,b])$ es compacto si y sólo si $g=0$.

3. Si G y H son espacios de Hilbert de dimensión $\aleph_0$ y $T\in\mathcal{L}(G,H)$ se representa en ciertas bases de G y H como $(a_{ij})\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, si $\sum_{i,j}|a_{ij}|^2<\infty$, T es compacto.

4. El operador integral $K\in\mathcal{L}(L^2([a,b]))$ con núcleo $k\in L^2([a,b]\times[a,b])$ es compacto, $\mathcal{C}([a,b])$ es K-invariante y $K|_{\mathcal{C}([a,b])}:(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)\to(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ es compacto.

3.4. Teorema espectral

Como **teorema**, si H es un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert de dimensión finita y $T\in\mathcal{L}(H)$ es autoadjunto:

1. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ son los distintos valores propios de T, $H=\bigoplus_{k=1}^m\ker(T-\lambda_k I_H)$.

2. Existe una base ortonormal $(e_k)_k$ de H formada por vectores propios de T.

3. Para $x\in X$, $Tx=\sum_k\mu_k\langle x,e_k\rangle e_k$, donde μ_k es el valor propio asociado a e_k.

Si T es un operador compacto autoadjunto en el espacio de Hilbert H, $\|T\|$ o $-\|T\|$ es valor propio de T.

Todo operador normal compacto en un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert tiene algún valor propio.

Si $T\in\mathcal{L}(H)$ es compacto en el $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert H y $\lambda\in\mathbb{K}\setminus 0$, $\ker(T-\lambda 1_H)$ es de dimensión finita.

Sean X e Y espacios de Banach y $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ compacto, $\sigma_{\text{p}}(T)$ es contable, contiene a $\sigma(T)\setminus\{0\}$ y, si es infinito, es una sucesión acotada con a lo sumo un punto de acumulación, el 0, y si T es normal el 0 es punto de acumulación.

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos: Sean H un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $T\in\mathcal{L}(H)$ compacto normal:

1. $\sigma_{\text{p}}(T)\setminus\{0\}$ es contable.

2. Si $P_\lambda\in\mathcal{L}(H)$ es la proyección ortogonal sobre $\ker(T-\lambda 1_H)$, $T=\sum_{\lambda\in\sigma_{\text{p}}(T)}\lambda P_\lambda$.

3. $\overline{\text{Im}T}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\text{p}}(T)\setminus\{0\}}\ker(T-\lambda 1_H)$.

4. $H=\ker T\oplus\overline{\text{Im}T}$.

5. Existe una base ortonormal $(e_n)_{n\in J}$ de $\overline{\text{Im}T}$ y $\{\mu_n\}_{n\in J}\subseteq\mathbb{C}$ tales que, para $x\in H$, $(\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n)_{n\in J}$ es sumable con suma Tx, y entonces $\{\mu_n\}_{n\in J}\subseteq\sigma_{\text{p}}(T)\setminus\{0\}$ y $\forall\lambda\in\sigma_{\text{p}}(T)\setminus\{0\},|\{n\in J\mid\mu_n=\lambda\}|=\dim\ker(T-\lambda 1_H)$.

6. Si P_0 es la proyección ortogonal sobre $\ker T$, $\forall x\in H,x=P_0x+\sum_{n\in J}\langle x,e_n\rangle e_n$.

Si H es un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert, $T\in\mathcal{L}(H)$ es compacto autoadjunto si y sólo si hay una familia ortonormal contable $\{e_n\}_{n\in J}\subseteq H$ y $\{\mu_n\}_{n\in J}\subseteq\mathbb{R}$ de modo que $\forall x\in H,Tx=\sum_{n\in J}\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n$ y 0 es el único punto de acumulación de $(\mu_n)_n$.

Teorema de alternativa de Fredholm: Sean H un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert, $T\in\mathcal{L}(H)$ compacto autoadjunto, $(e_n)_{n\in J}$ una base ortonormal de $\overline{\text{Im}T}$ de modo que $Tx=:\sum_{n\in J}\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n$ para ciertos $\mu_n\in\mathbb{K}$ e $y\in H$:

1. Para $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{\sigma_{\text{p}}(T)\cup\{0\}\}$, la ecuación $(\lambda 1_H-T)x=y$ tiene como única solución

$$x=\frac{1}{\lambda}\left(y+\sum_{n\in J}\frac{\mu_n}{\lambda-\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n\right).$$

   Si existe solución $x\in H$,

$$(\lambda 1_H-T)x=y\iff\lambda x=Tx+y\iff x=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{n\in J}\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n+y\right),$$

   pero entonces $\langle x,e_n\rangle=\frac{1}{\lambda}(\mu_n\langle x,e_n\rangle+\langle y,e_n\rangle)$ y $(\lambda-\mu_n)\langle x,e_n\rangle=\langle y,e_n\rangle$, y como $\lambda-\mu_n\neq 0$, podemos sustituir $\langle x,e_n\rangle=\frac{1}{\lambda-\mu_n}\langle y,e_n\rangle$ en lo anterior y queda la solución del enunciado. Queda ver que la serie converge, pero si $\sigma_{\text{p}}(T)$ es infinito, $\{\mu_n\}_n\subseteq\sigma_{\text{p}}(T)$ es acotado y por tanto lo es $\left|\frac{\mu_n}{\lambda-\mu_n}\right|$ y

$$\sum_{n\in J}\left|\frac{\mu_n}{\lambda-\mu_n}\right|^2|\langle y,e_n\rangle|^2\leq\sup_{n\in J}\left|\frac{\mu_n}{\lambda-\mu_n}\right|^2\sum_{n\in J}|\langle y,e_n\rangle|^2<\infty.$$

2. Para $\lambda\in\sigma_{\text{p}}(T)\setminus\{0\}$, la ecuación $(\lambda 1_H-T)x=y$ tiene solución si y sólo si $y\perp\ker(\lambda 1_H-T)$, en cuyo caso las soluciones son

$$x=\frac{1}{\lambda}\left(y+\sum_{\substack{n\in J\\\mu_n\neq\lambda}}\frac{\mu_n}{\lambda-\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n\right)+z,\qquad z\in\ker(\lambda 1_H-T).$$

   Si la ecuación tiene solución x, entonces $y=(\lambda 1_H-T)x\in\text{Im}(\lambda 1_H-T)\subseteq\overline{\text{Im}(\lambda 1_H-T)}=\ker((\lambda 1_H-T)^*)^\perp=\ker(\lambda 1_H-T)^\perp$ por ser 1_H y T autoadjuntos, y claramente dos soluciones difieren en un vector de $\ker(\lambda 1_H-T)$. Queda ver que, si $y\in\ker(\lambda 1_H-T)^\perp$, la x del enunciado es solución, para lo cual hacemos la misma sustitución que al principio del primer apartado pero, cuando $\lambda=\mu_n$, en su lugar vemos que $(\lambda-\mu_n)\langle x,e_n\rangle=\langle y,e_n\rangle$ y por tanto $\langle y,e_n\rangle=0$, por lo que excluimos dicho factor de la serie, la cual converge por el mismo motivo que en el primer apartado y resulta en la solución del enunciado.

3. Para $y = 0$, $Tx = y$ tiene solución si y sólo si $y \perp \ker T$ y $\sum_{n\in J}\left|\frac{\langle y,e_n\rangle}{\mu_n}\right|^2 < \infty$, en cuyo caso las soluciones son

$$x = \sum_{n\in J}\frac{1}{\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n + z, \qquad\qquad z \in \ker T.$$

   Si la ecuación tiene solución x, $y \in \mathrm{Im}T \subseteq (\ker T)^\perp$ y

$$\sum_{n\in J}\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n = Tx = y = \sum_{n\in J}\langle y,e_n\rangle e_n,$$

   con lo que $\langle x,e_n\rangle = \frac{1}{\mu_n}\langle y,e_n\rangle$ para cada n y por tanto $\sum_{n\in J}\left|\frac{\langle y,e_n\rangle}{\mu_n}\right|^2 = \|x\|^2 < \infty$, y como $(e_n)_n$ es base de $\overline{\mathrm{Im}T}$, $x \in \sum_{n\in J}\frac{1}{\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n + \overline{\mathrm{Im}T}^\perp$ con $\overline{\mathrm{Im}T}^\perp = \ker T$. Finalmente, si esta condición se cumple, $y \in \overline{\mathrm{Im}T}$, la serie del enunciado converge y

$$T\left(\sum_{n\in J}\frac{1}{\mu_n}\langle y,e_n\rangle e_n + z\right) = \sum_{n\in J}\langle y,e_n\rangle e_n + 0 = y.$$

Sea A un operador en un espacio de Hilbert H:

1. A es una isometría si y sólo si A^* es inverso por la izquierda de A, si y sólo si $\forall x,y \in H, \langle Ax,Ay\rangle = \langle x,y\rangle$.

2. A es un isomorfismo isométrico, si y sólo si es una isometría suprayectiva, si y sólo si A^* es inverso de A, y entonces decimos que A es **unitario**.

Sean H un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $S,T \in \mathcal{L}(H)$ compactos autoadjuntos, $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \dim\ker(T - \lambda 1_H) = \dim\ker(S - \lambda 1_H)$ si y sólo si existe $U \in \mathcal{L}(H)$ unitario con $U^*SU = T$.

$S,T \in \mathcal{L}(H)$ en el $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert H son **simultáneamente diagonalizables** si existe una familia ortonormal $\{e_n\}_{n\in J} \subseteq H$ y $\{\alpha_n\}_{n\in J}, \{\beta_n\}_{n\in J} \subseteq \mathbb{K}$ tal que

$$\forall x \in H, \left(Sx = \sum_{n\in J}\alpha_n\langle x,e_n\rangle e_n \wedge Tx = \sum_{n\in J}\beta_n\langle x,e_n\rangle e_n\right).$$

Si S y T son compactos y autoadjuntos esto equivale a que $ST = TS$.

Teorema espectral para operadores compactos normales: Si H es un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto normal, ocurre lo mismo que en el anterior teorema espectral.

Si H es un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ es compacto normal si y sólo si hay una familia ortonormal contable $\{e_n\}_{n\in J} \subseteq H$ y $\{\mu_n\}_{n\in J} \subseteq \mathbb{C}$ con 0 como único punto de acumulación de modo que $\forall x \in H, Tx = \sum_{n\in J}\mu_n\langle x,e_n\rangle e_n$.

Un operador entre $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert $T \in \mathcal{L}(G,H)$ es compacto si y sólo si hay una familia contable $\{\nu_n\}_{n\in J} \subseteq \mathbb{R}^+$ con 0 como punto de acumulación, $\{e_n\}_{n\in J} \subseteq G$ y $\{f_n\}_{n\in J} \subseteq H$ tales que $\forall x \in H, Tx = \sum_{n\in J}\nu_n\langle x,e_n\rangle f_n$.

3.5. Ecuaciones integrales de Fredholm

Una **ecuación integral de Fredholm** es una de la forma

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = g(t),$$

donde $x, g \in L^2([a,b])$, $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ y la incógnita es x.

Un núcleo $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ es **simétrico** si $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ para casi todo $s, t \in [a,b]$.

Teorema de alternativa de Fredholm: Sean $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ un núcleo simétrico, K el operador integral asociado y $g \in L^2([a,b])$, si $Kx = \sum_{n\in J} \mu_j \langle x, e_n\rangle e_n$ para cierta base hilbertiana contable $(e_n)_{n\in J}$ de $\overline{\mathrm{Im}K}$, ciertos $\{\mu_n\}_{n\in J} \subseteq \mathbb{R}$ y todo $x \in X$, considerando la ecuación integral de Fredholm de arriba, $x - Kx = g$:

1. Si $\mu = 0$, la ecuación tiene como única solución $x = g$.
2. Si $\frac{1}{\mu} \notin \{\mu_n\}_n$, la ecuación tiene como única solución

   $$x(t) = g(t) + \mu \left(\sum_n \frac{\mu_n}{1 - \mu\mu_n} \left(\int_a^b g\overline{e_n} \right) e_n(t) \right),$$

   y existe $\alpha > 0$ que depende solo de k tal que $\|x\|_2 \leq \alpha \|g\|_2$.
3. Si existe $n \in J$ con $\mu_n = \frac{1}{\mu}$, la ecuación tiene solución si y sólo si $g \perp \ker(\frac{1_{L^2([a,b])}}{\mu} - K)$, y entonces las soluciones son

   $$x(t) = g(t) + \mu \sum_{\substack{n\in J \\ \mu_n \neq \frac{1}{\mu}}} \frac{\mu_n}{1-\mu\mu_n} \left(\int g\overline{e_n} \right) e_j + u, \qquad u \in \ker(\frac{1_{L^2([a,b])}}{\mu} - K).$$

La convergencia de las series es de media cuadrática, pero en ciertos casos puede ser uniforme.

Si $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ es un núcleo simétrico con

$$\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|^2 \,\mathrm{d}s < \infty,$$

K es el operador integral asociado y hay una base hilbertiana $(e_n)_{n\in J}$ de $\overline{\mathrm{Im}K}$ y $\{\mu_n\}_{n\in J} \subseteq \mathbb{R}$ y tales que $Kx = \sum_n \mu_n \langle x, e_n\rangle e_n$:

1. **Teorema de Hilbert-Schmidt:** Para $x \in L^2([a,b])$,

   $$\int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{n\in J} \mu_n \left(\int_a^b x\overline{e_n} \right) e_n(t)$$

   para casi todo $t \in [a,b]$, y si J es numerable la serie converge absoluta y uniformemente en $[a,b]$.

Para la primera parte basta tomar en el teorema anterior un $\mu \neq 0$ tal que $\frac{1}{\mu}$ no sea valor propio y despejar. Para la segunda podemos suponer $J = (\mathbb{N}, \geq)$, y queremos ver que

$$\sum_n \left| \mu_n \left(\int_a^b x\overline{e_n} \right) e_n(t) \right| = \sum_n |\mu_n \langle x, e_n \rangle e_n(t)|$$

es uniformemente de Cauchy en $[a, b]$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\sum_{n=p}^{q} |\mu_n e_n(t)||\langle x, e_n \rangle| \leq \sqrt{\sum_{n=p}^{q} |\mu_n e_n(t)|^2 \sum_{n=p}^{q} |\langle x, e_n \rangle|^2},$$

pero para $n \in J$ y $t \in [a, b]$,

$$\mu_n e_n(t) = K(e_n)(t) = \int_a^b k(t, s) e_k(s) \,\mathrm{d}s = \langle e_k, \overline{k_t} \rangle,$$

donde $k_t(s) := k(t, s)$, luego

$$\sqrt{\sum_{n=p}^{q} |\mu_n e_n(t)|^2} = \sqrt{\sum_{n=p}^{q} |\langle e_n, \overline{k_t} \rangle|^2} \leq \|k_t\|_2 \leq \sup_{t \in [a,b]} \|k_t\|_2 < \infty,$$

con lo que esto está acotado superiormente por un valor independiente de t y el resultado sale de que $|\langle x, e_n \rangle|^2$ tampoco depende de t y $\lim_{p,q} \sum_{n=p}^{q} |\langle x, e_n \rangle|^2 = 0$.

2. Las series del teorema de alternativa de Fredholm convergen absoluta y uniformemente en $[a, b]$.

Si $k \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$ es un núcleo simétrico, existen una familia ortonormal contable $\{e_n\}_{n \in J} \subseteq (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_2)$ y $\{\mu_n\}_{n \in J} \subseteq \mathbb{R}$ tales que, si K es el operador integral asociado a k y $f \in \mathcal{C}([a, b])$,

$$Kf(t) = \sum_{n \in J} \mu_n \left(\int_a^b f\overline{e_n} \right) e_n(t)$$

para todo $t \in [a, b]$ y la convergencia de la serie es absoluta y uniforme.

3.6. Problemas de Sturm-Liouville

Un **problema regular de Sturm-Liouville**[2] es uno de la forma

$$-\ddot{x} + qx - \lambda x = y, \qquad \alpha x(a) + \beta \dot{x}(a) = 0, \qquad \gamma x(b) + \delta \dot{x}(b) = 0,$$

donde $q \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $y \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| + |\beta|, |\gamma| + |\delta| \neq 0$ y la incógnita $x \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$. Su **operador de Sturm-Liouville** asociado es $S \in \mathcal{L}(D_S, \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}))$ dado por $S(x) := -\ddot{x} + qx$, donde

$$D_S := \{x \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C}) \mid \alpha x(a) + \beta \dot{x}(a) = \gamma x(b) + \delta \dot{x}(b) = 0\},$$

[2] La forma general del problema tiene como ecuación $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\dot{x}) + qx + \lambda \sigma x + y = 0$ con p y σ continuas y estrictamente positivas. Aquí tomamos p y q constantes en 1.

y entonces el problema anterior es $(S-\mu 1_{D_S})x=y$.

Para $q\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ e $y_0,y_1\in\mathbb{R}$, el problema de Cauchy

$$-\ddot{x}+qx=0, \qquad x(a)=y_0, \qquad \dot{x}(a)=y_1$$

tiene una única solución real, y para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ con $|\alpha|+|\beta|\neq 0$, si $(y_0,y_1)\in\mathbb{R}^2$ recorre la recta $\alpha y_0+\beta y_1=0$, la correspondiente solución del problema recorre una recta (subespacio de dimensión 1) de $\mathcal{C}^2([a,b])$.

El **determinante wronskiano** de $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{C}^{n-1}([a,b],\mathbb{K})$ es $W(x_1,\dots,x_n):[a,b]\to\mathbb{K}$ dada por $t\mapsto\det(x_j^{(i)}(t))_{0\leq i<n}^{1\leq j\leq n}$.

Si $S:D_S\to\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ es un operador de Sturm-Liouville asociado al problema con parámetros $q,y,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta$, existen $u,v\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ con $-\ddot{u}+qu=0$, $\alpha x(a)+\beta\dot{x}(a)=0$, $-\ddot{v}+qv=0$ y $\gamma x(b)+\delta\dot{x}(b)=0$, y entonces $W(u,v)(t)$ es constante en t y, si S es inyectivo, $W(u,v)(t)\neq 0$ y u y v son linealmente independientes, y llamamos **función de Green** asociada a S al núcleo simétrico $k\in\mathcal{C}([a,b]\times[a,b])$ dado por

$$k(t,s):=-\frac{u(\min\{t,s\})v(\max\{t,s\})}{W(u,v)(a)},$$

que no depende de u y v.

Si $S:D_S\to\mathcal{C}([a,b])$ es un operador de Sturm-Liouville inyectivo con función de Green k, llamamos **operador de Green** asociado a S al operador integral $G:L^2([a,b])\to L^2([a,b])$ asociado al núcleo k, y entonces $G|_{\mathcal{C}([a,b])}$ es el inverso de S.

Así, $(S-\mu 1_{D_S})x=y$ tiene solución única $x\in D_S$ si y sólo si $(1_{\mathcal{C}([a,b])}-\mu G)x=Gy$ tiene solución única $x\in\mathcal{C}([a,b])$.

Como **teorema**, si $S:D_S\to\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ es el operador de Sturm-Liouville asociado al problema con parámetros $q,y,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta$, existe una sucesión $(\nu_n)_n$ de reales distintos con $\sum_n\frac{1}{\nu_n^2}<\infty$ y una base hilbertiana numerable $(u_n)_n$ de $L^2([a,b])$ tales que:

1. $\forall n\in\mathbb{N}, Su_n=\nu_n u_n$.
2. $$\forall x\in D_S,\forall t\in[a,b], x(t)=\sum_n\left(\int_a^b xu_n\right)u_n(t),$$
   donde la serie converge absoluta y uniformemente para $t\in[a,b]$.
3. Si $\lambda\notin\{\nu_n\}_n$, el problema tiene como única solución
   $$x(t)=\sum_n\frac{1}{\nu_n-\lambda}\left(\int_a^b yu_n\right)u_n(t),$$
   donde la serie converge absoluta y uniformemente para $t\in[a,b]$.
4. Si $\lambda=\nu_k$ para algún k, el problema tiene solución si y sólo si $y\perp u_k$, y entonces las soluciones son
   $$x(t)=\alpha u_k+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{k\}}\frac{1}{\nu_n-\lambda}\left(\int_a^b yu_n\right)u_n(t), \qquad \alpha\in\mathbb{C},$$
   donde la serie converge absoluta y uniformemente para $t\in[a,b]$.

Capítulo 4

Principios fundamentales

Los **principios fundamentales del análisis funcional** son el teorema de Hahn-Banach, el teorema de la acotación uniforme y el teorema de la gráfica cerrada.

4.1. Teorema de Hahn-Banach

Teorema de Tychonoff: Si $(X_i)_{i\in I}$ son espacios topológicos compactos, $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto con la topología producto.

Teorema de extensión de Hann-Banach: Sean $Y \leq_{\mathbb{K}} X$, $p : X \to \mathbb{R}$ subaditiva y positivamente homogénea y $f : Y \to \mathbb{K}$ lineal con $f \leq p|_Y$, f se extiende a $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ lineal con $\hat{f} \leq p$. **Demostración** para Y de codimensión 1**:** Sea $x_0 \in X \setminus Y$, entonces $X = Y \oplus \text{span}\{x_0\}$ y toda extensión lineal $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ se escribe como $\hat{f}(y + ax_0) = f(y) + a\hat{f}(x_0)$ para cada $y + ax_0 \in X$ con $y \in Y$ y $a \in \mathbb{R}$, y queremos ver que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que si $\hat{f}(x_0) = \alpha$ entonces $\hat{f} \leq p$. Para $a = 0$ esto siempre se cumple; para $a > 0$

$$\forall y \in Y, \hat{f}(y + ax_0) = f(y) + a\alpha \leq p(y + ax_0) \iff \forall y \in Y, f\left(\frac{y}{a}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{y}{a} + x_0\right) \iff \\ \iff \forall z \in Y, \alpha \leq -f(z) + p(z + x_0),$$

y para $a < 0$,

$$\forall y \in Y, \hat{f}(y+ax_0) = f(y)+a\alpha \leq p(y+ax_0) \iff \forall y \in Y, f\left(-\frac{y}{a}\right)-\alpha \leq p\left(-\frac{y}{a} - x_0\right) \iff \\ \iff \forall w \in Y, \alpha \geq f(w) - p(w - x_0),$$

con lo que la condición equivale a que $\forall z, w \in Y, f(w) - p(w - x_0) \leq \alpha \leq -f(z) + p(z + x_0)$, pero siempre existe tal α ya que, para $z, w \in Y$,

$$f(z) + f(w) = f(z + w) \leq p(z + w) = p(z + x_0 + w - x_0) \leq p(z + x_0) + p(w - x_0).$$

El teorema de Tychonoff equivale al axioma de elección y es estrictamente más fuerte que el teorema de Tychonoff para espacios compactos separados, el cual implica el teorema de extensión de Hann-Banach.

Teorema de Hann-Banach ($\mathbb{R}$) y Sobczyk ($\mathbb{C}$): Sean $Y \leq_{\mathbb{K}} X$, $p : X \to \mathbb{K}$ una seminorma y $f : Y \to \mathbb{K}$ lineal con $|f| \leq p|_Y$, f se extiende a una $\hat{f} : X \to \mathbb{K}$ lineal con $|\hat{f}| \leq p$.

Como **teorema**, si $(X, \|\cdot\|)$ es un $\mathbb{K}$-espacio normado e $Y \leq X$, toda $f \in Y^*$ se extiende a una $\hat{f} \in X^*$ con $\|\hat{f}\| = \|f\|$. **Demostración:** $p : X \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) := \|f\|\|x\|$ es subaditiva y positivamente homogénea con $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| = p(x)$, luego f se extiende a $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ lineal con $|\hat{f}| \leq p$ y, para $x \in S_X$, $\|\hat{f}(x)\| \leq \|f\|$, de modo que $\|f\| \leq \|\hat{f}\| \leq \|f\|$.

El **teorema de Hann-Banach** es el anterior cuando X es real y separable. **Demostración sin usar cosas de esta sección no probadas:** Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso en X y, para $n \in \mathbb{N}$, $X_n := \text{span}\{Y \cup \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}\}$, o $X_n = X_{n+1}$ o es un subespacio de X_{n+1} de codimensión 1, y por inducción en lo anterior para $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in X_n^*$ con $\|f_n\| = \|f\|$ y $f_n = f_{n+1}|_{X_n^*}$, de modo que si $Z := \bigcup_n X_n$, existe $F \in Z^*$ con $f = F|_Y$ y $\|F\| = \|f\|$, pero para $y \in X$ existe $\{z_n\}_n \subseteq Z$ convergente a y y, por continuidad de F, existe $\hat{f}(y) := \text{lím}_n F(y_n)$, con $\hat{f}(y)$ independiente de la sucesión elegida, con lo que podemos definir $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ de esta forma y claramente es lineal y continua con $\|\hat{f}\| = \|F\| = \|f\|$.

Sea entonces $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado:

1. $\forall x \in X \setminus 0, \exists f \in X^* : (\|f\| = 1 \wedge f(x) = \|x\|)$.
2. $\forall x \in X, \|x\| = \text{máx}_{f\in B_{X^*}} |f(x)|$.
3. Para $Y \leq X$ y $x \in X$ con $\delta := d(x, Y) > 0$, $\exists f \in X^* : (f(Y) = 0 \wedge f(x) = 1 \wedge \|f\| = \delta^{-1})$.
4. $$\forall Y \leq X, \overline{Y} = \bigcap_{\substack{f\in X^*\\ Y\subseteq\ker f}} \ker f.$$
5. $$\forall S \subseteq X, \overline{\text{span} S} := \bigcap_{\substack{f\in X^*\\ S\subseteq\ker f}} \ker f.$$
6. $S \subseteq X$ es total si y sólo si $\forall f \in X^*, (f(S) = 0 \implies f = 0)$.
7. Si $x_1, \dots, x_n \in X$ son linealmente independientes, existen $f_1, \dots, f_n \in X^*$ con cada $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.
8. Todo subespacio de X de dimensión finita posee un complementario topológico.
9. Si $Y \leq X$, la **restricción** $\psi : X^* \to Y^*$, $f \mapsto f|_Y$, es lineal, continua, suprayectiva y abierta.
10. Si $Y \leq X$ y X^* es separable, Y^* también.

4.1.1. Versión geométrica

Como **teorema**, sean E un e.l.c. y $F \leq E$, toda $u \in F'$ se extiende a una $f \in E'$.

Así E es un e.l.c.:

1. Para $F \leq E$, la restricción $E' \to F'$, $f \mapsto f|_F$, es suprayectiva.

2. Para $x \in E \setminus 0$ existe $f \in E'$ con $f(x) \neq 0$.

3. Si $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E$ linealmente independiente, existen $f_1, \dots, f_n \in E'$ con cada $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Si E es un $\mathbb{R}$-e.v.t., $f \in E' \setminus 0$ y $A \subseteq E$ es un abierto convexo no vacío, $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. **Demostración:** Si fuera $f(A) = \{p\}$ para cierto $p \in \mathbb{R}$, entonces $A \subseteq \ker(f - p)$, pero como $f \neq 0$, $\ker(f-p) < E$ y por tanto tiene interior vacío, luego $A = \emptyset\#$. Para ver que es un intervalo, sean $x, y \in A$ con $f(x) < f(y)$, por convexidad, si $\psi : \mathbb{R} \to E$ viene dada por $\psi(t) := (1-t)x + ty$, $\psi([0,1]) \subseteq A$, pero ψ es continua y por tanto también lo es $f \circ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y para $z \in [f(x), f(y)]$, por el teorema de Bolzano existe $t \in [0,1]$ con $z = f(\psi(t)) \in f(A)$. Ahora bien, como A es abierto, $A - x$ es entorno del 0 y por tanto absorbente, y dada la función lineal $\phi(t) := \psi(t) - x = t(y-x)$, existe $\rho_0 > 0$ tal que, para $\rho > \rho_0$, $\phi(-1) \in \rho(A - x)$, luego $\phi(-\frac{1}{\rho}), \phi(\frac{2}{\rho}) \in A - x$ y $\psi((-\frac{1}{\rho}, 1)) = \phi((-\frac{1}{\rho}, 1)) + x \subseteq A$ y, como $f \circ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es afín no degenerada y por tanto un homeomorfismo, $f(\psi((-\frac{1}{\rho}, 1))) \subseteq f(A)$ es un entorno abierto de x, pero análogamente hay un entorno abierto de y, y como $f(A)$ tiene al menos dos puntos distintos, queda que $f(A)$ es abierta.

$\psi([0,1]) \subseteq A$ y $\psi|_{[0,1]} : [0,1] \to \psi([0,1])$ es un homeomorfismo, luego $f \circ \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y, para $z \in (f(x), f(y))$, por el teorema de Bolzano existe $t \in [0,1]$ con $z = f(\psi(t)) \in f(A)$. Como A es abierto, $A - x$ es un entorno del 0, luego es absorbente y existe $\rho_0 > 0$ tal que, para $\rho > \rho_0$, $\psi(-1) \in \rho(A - x)$, con lo que $\psi(-\frac{1}{\rho}) \in A$, de modo que $(-\frac{1}{\rho_0}, 1) \subseteq A$

Si E es un espacio vectorial, un **hiperplano** de E es un subespacio propio de E y una **variedad afín** de E es un conjunto $x_0 + F$ con $x_0 \in E$ y $F \leq E$, que se llama **hiperplano afín** de E si F es un hiperplano de E. Si E es un e.v.t., $M \subseteq E$ es un hiperplano afín si y sólo si existen $f : E \to \mathbb{K}$ lineal y $a \in \mathbb{K}$ con $M = \{x \in X \mid f(x) = a\}$, y entonces M es cerrado si y sólo si f es continua.

Teorema de Mazur: Sean E un e.v.t., $M \subseteq E$ una variedad afín y $A \subseteq E$ un abierto convexo no vacío disjunto de M, existe un hiperplano afín cerrado de E disjunto de A que contiene a M. **Demostración:** Podemos suponer por traslación que $0 \in A$, de modo que A es absorbente y tiene asociado un funcional de Minkowski p tal que $A = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ y, como A es abierto, p es continua. Sean entonces $x_0 \in E$ y $F \leq E$ con $M = x_0 + F$, $x_0 \notin F$ ya que de serlo sería $M = F \ni 0$, luego $F \cap \text{span}\{x_0\} = 0$ y podemos definir $u : F \oplus \text{span}\{x_0\} \to \mathbb{K}$ como $u(y + \lambda x_0) := \lambda$ para $y \in F$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, que es lineal. Ahora bien, para $\lambda \neq 0$ es $|u(y + \lambda x_0)| = |\lambda| \leq |\lambda| p(\frac{y}{\lambda} + x_0) \leq p(y + \lambda x_0)$, donde en la primera desigualdad usamos que $\frac{y}{\lambda} + x_0 \in M \subseteq A^{\complement}$ y por tanto $p(\frac{y}{\lambda} + x_0) \geq 1$, y para $\lambda = 0$, $|u(y)| = 0 \leq p(y)$, de modo que $|u| \leq p|_{F \oplus \text{span}\{x_0\}}$ y, por el teorema de Sobczyk, u se extiende a una $f : E \to \mathbb{K}$ lineal con $|f| \leq p$, con lo que f es continua y, si $H := \{x \in E \mid f(x) = 1\}$, $f(E) = 1$ y por tanto $E \subseteq H$ y, para $x \in H$, $f(x) = 1 \leq p(x)$ y por tanto $x \notin A$.

Sean E un $\mathbb{R}$-e.v.t., $f \in E'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, llamamos **semiespacios abiertos** determinados por f y α a $\{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$, y **semiespacios cerrados** determinados por f y α a $\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ y $\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$, y $H := \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ **separa** $A, B \subseteq E$ si cada uno está en un semiespacio cerrado distinto de f y α, en cuyo caso A y B están **separados**, y **separa estrictamente** A y B si cada uno está en un semiespacio abierto distinto de f y α, en cuyo caso A y B están estrictamente separados.

Teoremas de separación:

1. En un $\mathbb{R}$-e.v.t. todo par de abiertos convexos disjuntos no vacíos está separado.

Sean E el $\mathbb{R}$-e.v.t. y $A, B \subseteq E$ tales conjuntos, $A - B$ es un abierto no vacío que no contiene al 0, con lo que el teorema de Mizur nos da un hiperplano cerrado $H = \{x \in E \mid f(x) = \beta\}$, con $f \in E'$ y $\beta \in \mathbb{R}$, que contiene al 0 y es disjunto de $A - B$. $f(A - B) \subseteq \mathbb{R}$ es convexo. Como $\beta = f(0) = 0$, $0 \notin f(A - B)$, pero $f(A - B)$ es un intervalo, luego $f(A - B) \subseteq \mathbb{R}^+$ o $f(A - B) \subseteq \mathbb{R}^-$. Si, por ejemplo, $f(A - B) \subseteq \mathbb{R}^-$, para $a \in A$ y $b \in B$, $f(a) < f(b)$, luego existe $\alpha \in [\sup_{a \in A} f(a), \inf_{b \in B} f(b)]$, y como $f(A)$ y $f(B)$ son intervalos abiertos, para $a \in A$ y $b \in B$, $f(a) < \alpha < f(b)$.

2. Si E es un $\mathbb{R}$-e.l.c. y $K, F \subseteq E$ son convexos disjuntos no vacíos con K compacto y F cerrado, existen $f \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ con $f(y) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < f(z)$ para todo $y \in K$ y $z \in F$ y tales que $f|_K$ alcanza $\alpha - \varepsilon$, y en particular K y F están estrictamente separados.

   Como $K - F$ es cerrado y no contiene al 0, $E \setminus (K - F) \in \mathcal{E}(0)$, luego existe $W \in \mathcal{E}(0)$ con $W + W \subseteq E \setminus (K - F)$ que podemos tomar absolutamente conexo y, si $k \in K$, $f \in F$ y $u, v \in W$, $k - f \in K - F$ y $u - v \in W + W \subseteq E \setminus (K - F)$, luego $k - f \neq u - v$ y $k + v \neq f + u$, y $K + W$ y $F + W$ son abiertos disjuntos. Es fácil ver que la suma de conexos es conexa, luego $K + W$ y $F + W$ son conexos y, por el primer teorema de separación, existen $f \in E'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $f(k) < \alpha < f(z)$ para $k \in K$ y $z \in F$, pero como $f(K)$ es compacto, $\max f(K) < \alpha$ y basta tomar $\varepsilon := \alpha - \max f(K)$.

Con esto, si E es un $\mathbb{K}$-e.l.c. y $K, F \subseteq E$ son convexos disjuntos, A es compacto, B es cerrado y uno de los dos es absolutamente convexo, existe $u \in E'$ tal que $\sup_{x \in A} |u(x)| < \inf_{y \in B} |u(y)|$.

Si E es un e.l.c. y $A \subseteq E$, $\overline{\text{co}(A)}$ es la intersección de todos los semiespacios cerrados de E que contienen a A, y en particular todo conjunto convexo y cerrado es la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen.

Así, si E es un espacio vectorial con topologías $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ localmente convexas Hausdorff y $(E, \mathcal{S})' = (E, \mathcal{T})'$, $(E, \mathcal{S})$ y $(E, \mathcal{T})$ tienen los mismos convexos cerrados. Si E es un e.l.c. entonces $(E, \mathcal{T})' = (E, \sigma(E, E'))'$.

Si E es un e.l.c.:

1. Si $F \leq E$, $\overline{F} = \{x \in E \mid \forall f \in E', (f|_F = 0 \implies f(x) = 0)\}$.
2. $S \subseteq E$ es total si y sólo si $\{f \in E' \mid f|_S = 0\} = 0$.

4.1.2. Normas convexas

Llamamos **bidual** del espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ al dual del dual de X, X^{**}, con la norma dual, que es un espacio de Banach.

La función $\hat{}: X \to X^{**}$ dada por $\hat{x}(f) := f(x)$ es una isometría, con lo que $\overline{\text{Im}\,\hat{}}$ es un modelo para la compleción de X identificando cada x con $\hat{x}$.

Sean $Y \leq X$ cerrado, $Q : X \to \frac{X}{Y}$ la aplicación cociente e $Y' := \{f \in X^* \mid f(Y) = 0\}$:

1. $\alpha : \frac{X^*}{Y'} \to Y^*$ dada por $\alpha(\overline{f}) := f|_Y$ es un isomorfismo isométrico.
2. $\beta : \left(\frac{X}{Y}\right)^* \to Y'$ dada por $\beta(\overline{g}) := g \circ Q$ es un isomorfismo isométrico.

Una norma $\|\cdot\|$ en X es **estrictamente convexa** si $\forall x, y \in S_X, \left(x \neq y \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1\right)$.

Teorema de Taylor-Foguel: Si X es un espacio normado, X^* es estrictamente convexo si y sólo si para $Y \leq X$ e $f \in Y^*$ existe una única extensión $\hat{f} \in X^*$ de f con $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

Para $p \in (1,\infty)$ y $n \in \mathbb{N}$, en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ y $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ las normas duales son estrictamente convexas, mientras que esto no ocurre cuando $p = 1$ o $p = \infty$.

Las extensiones de Hann-Banach pueden ser infinitas; por ejemplo, si Y es el subespacio de $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ de las funciones constantes y $g \in Y^*$ viene dada por $g(y) \coloneqq y(0)$, para $t \in [0,1]$, $f_t \in X^*$ dada por $f_t(x) \coloneqq x(t)$ es una extensión lineal de g que conserva la norma.

4.1.3. Límites de Banach

Como **teorema**, si c es el espacio de las sucesiones convergentes, existe $L \in (\ell^\infty)^*$ con $\|L\| = 1$ y $L(x) = \lim_n x_n$ para $x \in c$ tal que, para $x \in X$, $L(x) = L((x_2, x_3, \dots, x_n, \dots))$ y, si cada $x_n \geq 0$, $L(x) \geq 0$.

4.1.4. Espacios vectoriales ordenados

Un **espacio vectorial ordenado** es un conjunto preordenado $(X, \lesssim)$ donde X es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y, para $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ y $x, y, z \in X$ con $x \leq y$, $x + z \leq y + z$ y $\alpha x \leq \alpha y$. Un **cono** en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial X es un $P \subseteq X$ tal que, para $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ y $x, y \in P$, $x + y \in P$, $\alpha x \in P$ y $P \cap (-P) = 0$.

Si $(X, \lesssim)$ es un espacio vectorial ordenado, $\{x \in X \mid x \geq 0\}$ es un cono si y sólo si $\lesssim$ es antisimétrica, y si $P \subseteq_{\mathbb{R}} X$ es un cono, $x \leq y \iff y - x \in P$ define un orden parcial en P tal que $(X, \leq)$ es un espacio vectorial ordenado.

Si $(X, \lesssim)$ es un espacio vectorial ordenado, $A \subseteq X$ es **cofinal** si $\forall x \geq 0, \exists a \in A : a \gtrsim x$, y $e \in X$ es **unidad de orden** si $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N} : -ne \lesssim x \lesssim ne$, en cuyo caso $\{ne\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cofinal.

1. Si K es un espacio compacto, en el espacio vectorial ordenado $(C(K), \leq)$ de funciones continuas $K \to \mathbb{R}$ con el orden $f \leq g \iff \forall x \in K, f(x) \leq f(x)$, todas las funciones que no se anulan son unidades de orden.

2. $(C(\mathbb{R}), \leq)$ no tiene unidades de orden.

Si $(X, \lesssim)$ e $(Y, \lessapprox)$ son espacios vectoriales ordenados, $T : X \to Y$ lineal es **positiva** si $\forall x \gtrsim 0, Tx \gtrapprox 0$. Como **teorema**, si $(X, \lesssim)$ es un espacio vectorial ordenado, $Y \leq X$ cofinal y $f : Y \to \mathbb{R}$ lineal positiva, f se extiende a una $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ lineal positiva.

Con esto, si e es una unidad de orden de $(X, \leq)$ e $Y \leq X$ con $e \in Y$, toda función lineal positiva $Y \to \mathbb{R}$ se extiende a una función $X \to \mathbb{R}$ lineal positiva.

4.2. Propiedad de extensión

Teorema de Helly: En $\mathbb{R}^n$, la intersección de $m > n$ conjuntos convexos es no vacía si y sólo si la intersección de cada $n+1$ de ellos es no vacía.

Dados un $\mathbb{K}$-espacio normado X y familias $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ y $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^+$, la familia de bolas cerradas $(\overline{B(x_i, r_i)})_{i\in I}$ tiene la **propiedad de intersección débil** si $\forall f \in B_{X^*}, \bigcap_{i\in I} B(f(x_i), r_i$ $\emptyset$, si y sólo si para $J \subseteq I$ finito y $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{K}$ con $\sum_{j\in J} a_j = 0$ es

$$\left\| \sum_{j\in J} a_j x_j \right\| \leq \sum_{j\in J} |a_j| r_j.$$

1. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, esto equivale a que las bolas se corten dos a dos.

2. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, la segunda definición se puede restringir sólo a los $J\subseteq I$ con $|J|=3$.

Un $\mathbb{K}$-espacio normado $(X,\|\cdot\|)$ cumple:

1. La **propiedad de extensión**, si para cada $\mathbb{K}$-espacio normado Y, $Y_0\leq Y$ y $T_0\in\mathcal{L}(Y_0,X)$, T_0 se extiende a una $T\in\mathcal{L}(Y,X)$ con $\|T\|=\|T_0\|$.

2. La **propiedad de extensión «inmediata»**, si cumple la de extensión pero considerando sólo el caso en que Y_0 es de codimensión 1 en Y.

3. La **propiedad de intersección** si toda familia de bolas cerradas de X que cumple la propiedad de intersección débil tiene intersección no vacía.

4. La **propiedad de intersección binaria** si toda familia de bolas cerradas de X que se cortan dos a dos tiene intersección no vacía.

5. La **propiedad de proyección** si para todo $\mathbb{K}$-espacio normado que contiene a X como subespacio existe $P\in\mathcal{L}(Y,X)$ con $\|P\|=1$ suprayectiva e idempotente, que llamamos una **proyección** de Y sobre X.

X cumple la propiedad de extensión si y sólo si cumple la propiedad de extensión inmediata, en cuyo caso X es de Banach.

Un espacio compacto K es **stoniano** si la clausura de cada abierto de K es un abierto.

Dado un $\mathbb{K}$-espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$:

1. Las propiedades de extensión, intersección y proyección son equivalentes.

2. **Teorema de Nachbin-Goodner-Kelly-Hasumi:** Estas propiedades equivalen a que $(X,\|\cdot\|)$ sea isométricamente isomorfo a $(\mathcal{C}(K,\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$ para algún compacto stoniano K.

3. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, estas equivalen a la propiedad de intersección binaria.

4. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, estas equivalen a la propiedad de intersección pero limitando las subfamilias de las familias de bolas a que sean de cardinal 3.

4.3. Teorema de la acotación uniforme

Sea X un espacio topológico, $S\subseteq X$ es **denso en ninguna parte** o **raro** si su clausura tiene interior vacío, $\mathring{\overline{S}}=\emptyset$, **de primera categoría** si es unión numerable de conjuntos raros, **de segunda categoría** en otro caso y G_δ si es intersección numerable de abiertos. T es de segunda categoría en sí mismo si y sólo si la intersección numerable de abiertos densos en no vacía.

Un espacio topológico es **de Baire** si la intersección numerable de abiertos densos es densa, en cuyo caso es de segunda categoría en sí mismo. **Teorema de Baire:** Todo espacio métrico completo es de Baire. **Demostración:** Sean (X,d) un espacio métrico, $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos y $V\subseteq M$ abierto arbitrario, queremos definir una sucesión de bolas $(\overline{B(x_n,r_n)})_n$ cada una contenida en $V\cap G_n\cap\overline{B(x_{n-1},r_{n-1})}$ y con $r_n<\frac{1}{2^n}$. Como G_0 es denso,

$V \cap G_0 \neq \emptyset$ y existen $x_0 \in M$ y $r_0 \in (0,1)$ con $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq V \cap G_0$, y para $n > 0$, como G_n es denso, por inducción existen $x_n \in M$ y $r_n \in (0, \frac{1}{2^n})$ con $\overline{B(x_n, r_n)} \subseteq V \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n$. Entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy por ser $x_m \in B(x_n, r_n)$ para $m \geq n$ y $\lim_n r_n = 0$, luego existe $L := \lim_n x_n \in V \cap \bigcap_n G_n$ y $\bigcap_n G_n$ es denso.

Si (X, d) no es completo esto no se cumple; por ejemplo, en $\mathbb{Q}$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$, para cada $q \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \setminus \{q\}$ es denso, pero la intersección numerable $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{Q} \setminus \{q\} = \emptyset$.

Con esto, si X es de Banach, su dimensión algebraica es finita o no numerable.

Teorema de la acotación uniforme: Sean X e Y espacios normados, $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ y $B := \{x \in X \mid \sup_{i \in I} \|A_i(x)\| < \infty\}$:

1. Si B es de segunda categoría, $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$ y $B = \emptyset$.

2. Si X es de Banach, bien $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$ o $B^{\complement}$ es G_δ denso en X, de modo que o $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$ o B es de primera categoría en X, pero no ambas.

La completitud es necesaria para la segunda parte del teorema, pues $\{f_n\}_n \subseteq (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)^*$ dada por $f_n(x) := \sum_{i=1}^n x_i$ es puntualmente acotada pero cada $\|f_n\| = n$.

Si X es un espacio de Banach, Y un espacio completo y $\{T_n\}_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tal que para $x \in X$ existe $T(x) := \lim_n T_n(x)$:

1. **Teorema de Banach-Steinhaus:** T es lineal y continua con

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty.$$

   Es lineal por serlo el límite. $(T_n x)_n$ es acotada para $x \in X$ y, por el teorema de la acotación uniforme, $\sup_n \|T_n\| < \infty$, y si $x \in B_X$, $\|Tx\| = \lim_n \|T_n x\| \leq \liminf_n \|T_n\| \leq \sup_n \|T_n\|$.

2. $(T_n)_n$ converge uniformemente a T en los subconjuntos compactos de X.

Sean X e Y espacios normados:

1. $A \subseteq X$ es acotado si y sólo si para $f \in X^*$, $f(A)$ es acotado.

2. Si X es de Banach, $A \subseteq X^*$ es acotado si y sólo si $\{f(x)\}_{f \in A}$ es acotado.

3. Si $T : X \to Y$ es lineal, T es continua si y sólo si $\forall g \in Y^*, g \circ T \in X^*$.

4.3.1. Funciones holomorfas vectoriales

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $({}_{\mathbb{C}}X, \|\cdot\|)$ de Banach, $f : \Omega \to X$ es **débilmente holomorfa** en Ω si para $g \in X^*$, $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, y es **holomorfa** en Ω si

$$\forall a \in \Omega, \exists f'(a) := \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Teorema de Dunford: f es holomorfa si y sólo si es débilmente holomorfa.

Teorema de Liouville: Si $({}_{\mathbb{C}}X, \|\cdot\|)$ es de Banach y $f : \mathbb{C} \to X$ es holomorfa con $g \circ f$ acotada para cada $g \in X^*$, entonces f es constante.

FVC

Toda curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ tiene argumentos continuos, y si θ y θ' son argumentos continuos de γ, entonces $\theta(b)-\theta(a) = \theta'(b)-\theta'(a)$. [...] Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva, $z \notin \gamma^*[:= \text{Im}\gamma]$ y θ un argumento de $\gamma - z$, llamamos [...] **índice** de γ respecto de z a

$$\text{Ind}_\gamma(z) := \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}.$$

[...] Una **cadena** es una expresión de la forma $\Gamma := m_1\gamma_1 + \cdots + m_q\gamma_q$ donde los m_i son enteros y los γ_i son caminos. Llamamos **soporte** de Γ a $\Gamma^* := \bigcup_k \gamma_k^*$ [...]. Un **ciclo** es una cadena formada por caminos cerrados, y llamamos **índice** de $z \notin \Gamma^*$ respecto al ciclo Γ a $\text{Ind}_\Gamma(z) := \sum_k m_k \text{Ind}_{\gamma_k}(z)$. [...] Dado un abierto Ω, un ciclo Γ en Ω es **nulhomólogo** respecto de Ω si $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \text{Ind}_\Gamma(z) = 0$.

Como **teorema**, sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, ${}_{\mathbb{C}}X$ de Banach y $f : \Omega \to X$ holomorfa:

1. **Teorema de Cauchy:** Sea Γ un ciclo Ω-nulhomólogo,

$$\int_\Gamma f = 0.$$

2. **Fórmula de Cauchy:** Para $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}\Gamma$,

$$f(z)\text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi\text{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\text{d}w.$$

3. Para $a \in \Omega$, existe

4. Para $a \in \Omega$, si $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ viene dado por $\Gamma(\theta) = a + \rho e^{\text{i}\theta}$ y, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi\text{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\text{d}w \in X,$$

existe $\rho > 0$ con $\overline{B(a,\rho)} \subseteq \Omega$ tal que $f(z) = \sum_n a_n(z-a)^n$, y la serie converge uniforme y absolutamente en compactos de $B(a,\rho)$.

4.3.2. Métodos de sumabilidad

Si $A \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, la sucesión $(x_m)_m$ en $\mathbb{K}$ es A-**convergente** a $z \in \mathbb{K}$ si para $n \in \mathbb{N}$, $\sum_m A_{nm}x_m$ converge a un cierto y_n e $(y_n)_n$ converge a z, y A es un **método de sumabilidad permanente** si para $\{x_m\}_m \subseteq \mathbb{K}$ convergente, $(\sum_m A_{nm}x_m)_n$ es convergente y $\text{lím}_n y_n = \text{lím}_m x_m$.

La **sucesión de medias de Césaro** de una sucesión $(x_n)_n$ es

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)_n,$$

y $(x_n)_n$ es **convergente Césaro** si su sucesión de medias de Césaro converge. Toda sucesión convergente es convergente Césaro, pero el recíproco no se cumple.

Así, la **matriz de Césaro**,

$$\left(\frac{1}{i}\chi_{\{j\leq i\}}\right)_{i,j\geq 1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}},$$

es un método de sumabilidad permanente.

Teorema de Toeplitsz: $A \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es un método de sumabilidad permanente si y sólo si $\sup_n \sum_m |A_{nm}| < \infty$, $\forall m \in \mathbb{N}, \text{lím}_n A_{nm} = 0$ y $\text{lím}_n \sum_m A_{nm} = 1$.

4.3.3. Convergencia puntual de series de Fourier de funciones continuas

Sean $X := \{f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \mid f(\pi) = f(-\pi)\}$; para $k \in \mathbb{Z}$ y $f \in L^2([-\pi,\pi])$,

$$\hat{f}(k) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

el k-ésimo coeficiente de Fourier de f y, para $n \in \mathbb{N}$, $s_n : L^2([-\pi,\pi]) \to \mathbb{R}$ dada por

$$s_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

entonces:

1. Como **teorema**, existe F G_δ denso en X tal que para $f \in F$, $\{x \in [-\pi,\pi] \mid \sup_n |s_n(f)(x)|\}$ es G_δ no numerable y denso en $[-\pi,\pi]$.
2. Para $f \in X$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $x \in [-\pi,\pi]$, $\text{lím}_n s_n(f)(x) = f(x)$.
3. Para todo $f \in L^2([-\pi,\pi])$ y casi todo $x \in [-\pi,\pi]$, $\text{lím}_n s_n(f)(x) = f(x)$.

4.4. Teorema de la aplicación abierta

Si X es un espacio normado, $A \subseteq X$ es **CS-compacto** si para $\{x_n\}_n \subseteq A$ y $\{\lambda_n\}_n \subseteq [0,1]$ con $\sum_n \lambda_n = 1$, $\sum_n \lambda_n x_n$ converge a un punto de A, y es **CS-cerrado** si para $\{x_n\}_n \subseteq A$ y $\{\lambda_n\}_n \subseteq [0,1]$ con $\sum_n \lambda_n = 1$, si $\sum_n \lambda_n x_n$ converge, lo hace un punto de A.

Si X es un espacio normado:

1. Si X es de Banach, B_X es CS-compacta.
2. Todo cerrado convexo es CS-cerrado.
3. Todo CS-compacto es CS-cerrado y acotado, y el recíproco se cumple si X es de Banach.
4. Si $A \subseteq X$ es CS-cerrado, $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$.

Sean X e Y espacios normados y $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, si $A\subseteq X$ es CS-compacto, $T(A)$ también.

Teorema de la aplicación abierta: Sean X un $\mathbb{K}$-espacio de Banach, Y un $\mathbb{K}$-espacio normado y $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, si $\text{Im}T$ es de segunda categoría en Y, T es suprayectiva y abierta e Y es un espacio de Banach. **Demostración:** Como B_X es CS-compacto, $T(B_X)$ también y por tanto es CS-cerrado, y si fuera raro, como el producto por un $n>0$ es un homeomorfismo, $nT(B_X)$ sería raro y $T(X)=T(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}nB_X)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}nT(B_X)$ sería de primera categoría#, por lo que $\overbrace{T(B_X)}^{\circ}=\overline{\overset{\circ}{T(B_X)}}\neq\emptyset$ y existen $y_0\in Y$ y $r>0$ con $B(y_0,r)\subseteq T(B_X)$, pero una bola cerrada en el origen es simétrica y T conserva simetrías, luego $B(-y_0,r)\subseteq T(B_X)$ y $B(0,r)\subseteq\frac{1}{2}B_Y(-y_0,r)+\frac{1}{2}B_Y(y_0,r)\subseteq\frac{1}{2}T(B_X)+\frac{1}{2}T(B_X)\subseteq T(B_X)$. Así, si $A\subseteq X$ es abierto, para $x\in X$ existe $\delta>0$ con $\overline{B(x,\delta)}=x+\delta B_X\subseteq A$ y $B(Tx,\delta r)=Tx+\delta B(0,r)\subseteq Tx+\delta T(B_X)=T(x+\delta B_X)\subseteq T(A)$, por lo que T es abierta, y para $y\in Y$, $y\in B(0,2\|y\|)=\frac{2\|y\|}{r}B(0,r)\subseteq T(\frac{2}{r}\|y\|B_X)\subseteq T(X)$ y T es suprayectiva. Finalmente, sea $\{y_n\}_n\subseteq Y$ con $\sum_n\|y_n\|<\infty$, existe $\{x_n\}_n\subseteq X$ con cada $Tx_n=y_n$ y $\|x_n\|\leq\frac{2}{r}\|y_n\|$, con lo que $\sum_n\|x_n\|<\infty$ y, por ser X completo, existe $x':=\sum_n x_n$, y por la continuidad de T, $Tx'=\sum_n y_n$.

Entonces, si X e Y son de Banach, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es suprayectiva si y sólo si es abierta.

Para esto último hace falta que Y sea completo; la identidad $I\in\mathcal{L}(\mathcal{C}^1([0,1]),|\cdot|),(\mathcal{C}^1([0,1]),\|\cdot\|_\infty))$ con $|x|:=\|x\|_\infty+\|x'\|_\infty$, el dominio es completo e I es suprayectiva pero no abierta.

También hace falta que X sea completo; si $(e_i)_{i\in I}$ es una base algebraica no numerable de ℓ^p y X es ℓ^p con la norma $\left|\sum_i a_ie_i\right|:=\sum_i|a_i|$, donde la suma es finita, la identidad $I\in\mathcal{L}(X,\ell^p)$ es suprayectiva pero no abierta.

Teorema del homomorfismo de Banach: Sean X un espacio de Banach e Y un espacio normado, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es un **homomorfismo topológico** si la restricción a la imagen $T:X\to\text{Im}T$ es abierta, si y sólo si $\text{Im}T$ es completo.

TS

$\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son **comparables** si $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$ o $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}$.

1. Si X e Y son espacios de Banach y $T:X\to Y$ es un isomorfismo algebraico continuo o abierto, T es un isomorfismo topológico.

2. Dos normas completas en X que definen topologías comparables son equivalentes.

3. Si un espacio de Banach X es suma directa interna $M\oplus N$ con M y N cerrados, entonces X es suma directa topológica de M y N.

4.4.1. Técnica de perturbaciones

El problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rl} a_n(t)x^{(n)}(t)+\cdots+a_1(t)\dot{x}(t)+a_0x(t) & =y(t),\\ x(a),\dot{x}(a),\dots,x^{(n-1)}(a) & =0\end{array}\right.$$

con $a_i,y\in\mathcal{C}([a,b])$ tiene solución única $x\in\mathcal{C}^{(n)}([a,b])$ y sus soluciones dependen continuamente del término independiente.

4.5. Teorema de la gráfica cerrada

Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos Hausdorff tiene **gráfica cerrada** si $\text{Graf}f := \{(x, f(x))\}_{x \in X}$ es cerrado en $X \times Y$. Si f es continua, tiene gráfica cerrada. El recíproco no es cierto; si X tiene dos topologías Hausdorff $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$, $1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ no es continua pero tiene gráfica cerrada.

Teorema de la gráfica cerrada: Sean X e Y espacios de Banach, $T : X \to Y$ lineal es continua si y sólo si tiene gráfica cerrada. **Demostración:** Como $x \mapsto (x, Tx)$ es lineal, $\text{Graf}T$ es un espacio vectorial, las proyecciones canónicas $P_1 : \text{Graf}T \to X$ y $P_2 : \text{Graf}T \to Y$ son lineales y continuas en $X \times Y$ con la topología producto generada por $\|\cdot\|_1$, y como P_1 es biyectiva y por tanto un isomorfismo algebraico, si $\text{Graf}T$ es cerrada, es completa al serlo $X \times Y$ y P_1 es un isomorfismo topológico, con lo que $T = P_2 \circ P_1^{-1}$ es continua.

Aquí hace falta que X sea completo; la derivada $T : (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es lineal con gráfica cerrada pero no continua.

También hace falta que Y sea completo; si $(e_i)_{i \in I}$ es una base algebraica no numerable de ℓ^p con cada $\|e_i\| = 1$ y X es ℓ^p con la norma $\left|\sum_i a_i e_i\right| := \sum_i |a_i|$ siendo la suma finita, la identidad $\ell^p \to X$ tiene gráfica cerrada pero no es continua.

4.5.1. Separación de puntos

Un conjunto de funciones $F \subseteq B^A$ **separa** los puntos de A si $\forall x, y \in A, (x \neq y \implies \exists f \in F : f(x) \neq f(y))$. Si X es de Banach con las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ y $F \subseteq (X, \|\cdot\|)^* \cap (X, \|\cdot\|')^*$ separa los puntos de X, entonces $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes, y en particular $(X, \|\cdot\|)^* = (X, \|\cdot\|')^*$.

Dos normas completas en el mismo espacio vectorial producen el mismo dual topológico si y sólo si son equivalentes.

4.5.2. Bases de Schauder

Una **base de Schauder** en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es una sucesión $\{x_n\}_n \subseteq S_X$ tal que $\forall x \in X, \exists! \{\lambda_n\}_n \subseteq \mathbb{K} : x = \sum_n \lambda_n x_n$. La sucesión $(e_n)_n$ de vectores que valen 1 en la coordenada n-ésima y 0 en el resto es base de Schauder de c_0 y ℓ^p para $p \in [1, \infty)$, y $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ y $(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$ también admiten bases de Schauder.

Todo espacio normado con base de Schauder es separable, pero el recíproco no se cumple.

Teorema de las bases de Schauder de Banach: Si X es un espacio de Banach con base de Schauder $(x_n)_n$, las **funciones coordenada** $f_n : X \to \mathbb{K}$ dadas por $f_n(\sum_n \lambda_n x_n) := \lambda_n$ son continuas, y de hecho existe $M > 0$ con $\|f_n\| \leq M$ para cada n.

4.6. Pares duales

Un **par dual** es un par $\langle F, G \rangle$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con una función bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times G \to \mathbb{K}$ tal que $\forall y \in G, (\langle \cdot, y \rangle = 0 \implies y = 0)$ y $\forall x \in G, (\langle x, \cdot \rangle = 0 \implies x = 0)$. Llamamos **topología débil de** F **inducida por** G, $\sigma(F, G)$, a la topología más gruesa en F para la que las $\{\langle \cdot, y \rangle\}_{y \in G}$ son continuas, generada por la familia de seminormas $\{|\langle \cdot, y \rangle|\}_{y \in G}$, y **topología débil de** G **inducida por** F, $\sigma(G, F)$, a la topología más gruesa en F para la que las $\{\langle x, \cdot \rangle\}_{x \in F}$ son continuas, generada por la familia de seminormas $\{|\langle f, \cdot \rangle|\}_{x \in F}$.

1. Si E es un espacio vectorial y E^* su dual algebraico, $\langle E, E^* \rangle$ es un par dual con la **aplicación bilineal natural** $\langle x, f \rangle := f(x)$.

2. Si E es un e.l.c., $\langle E, E' \rangle$ es un par dual con la aplicación bilineal natural, el **par dual canónico**, y llamamos **topología débil de** E a $\sigma(E, E')$ y **topología débil* de** E' a $\sigma(E', E)$, que es Hausdorff e inducida por $\mathcal{T}_{\text{p}}(E)$.

3. Si I es un conjunto, $\langle \mathbb{K}^I, \mathbb{K}^{(I)} \rangle$ es un par dual con $\langle (\lambda_i)_{i \in I}, (\xi_i)_{i \in I} \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i$.

4. Si K es compacto, $E := (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ y $F := \operatorname{span}\{f \mapsto f(x)\}_{x \in K} \leq (C(K), \|\cdot\|_\infty)^*$, $\langle E, F \rangle$ es un par dual con la aplicación bilineal natural, y $\sigma(E, F) = \mathcal{T}_{\text{p}}(K)$.

Si $\langle F, G \rangle$ es un par dual, una forma lineal $f : F \to \mathbb{K}$ es $\sigma(F, G)$-continua si y sólo si existe $y \in G$, necesariamente único, con $f = \langle \cdot, y \rangle$.

Si E es un e.l.c., $(E, \sigma(E, E'))' = E'$ e, identificando $x \in E$ con $\hat{x} \in E''$ dada por $\hat{x}(f) := f(x)$, $(E', \sigma(E', E))' = E$.

Si $\langle F, G \rangle$ es un par dual con función bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $H \leq G$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce un par dual en $\langle F, H \rangle$ si y sólo si $G = \overline{H}$ en $\sigma(G, F)$.

Si E es un e.l.c., E' es $\sigma(E^*, E)$-denso en el dual algebraico E^*, con lo que las formas lineales se aproximan por formas lineales continuas.

Dado un par dual $\langle F, G \rangle$, llamamos **polar** (**absoluta**) de $A \subseteq F$ a $A^\circ := \{y \in G \mid \sup_{x \in A} |\langle x, y \rangle| \leq 1\}$ y **bipolar** de A a $A^{\circ\circ} \subseteq F$.

1. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, $B_X^\circ = B_{X^*}$ y $B_X^{\circ\circ} = B_X$.

2. Si $\langle F, G \rangle$ es un par dual y $M \leq F$, $M^\circ = \{y \in G \mid \langle M, y \rangle = 0\} =: M^\perp$.

Sean $\langle F, G \rangle$ un $\mathbb{K}$-par dual, $A, B, A_i \subseteq F$ para $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}^*$:

1. A° es absolutamente convexo y cerrado en $\sigma(G, F)$.

2. $B \subseteq A \implies A^\circ \subseteq B^\circ$.

3. $(\alpha A)^\circ = \alpha^{-1} A^\circ$.

4. $A \subseteq A^{\circ\circ}$.

5. $A^\circ \subseteq A^{\circ\circ\circ}$.

6. $(\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$.

Teorema del bipolar: Si $\langle F, G \rangle$ es un par dual y $A \subseteq F$, $A^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(A)}$ en $\sigma(F, G)$ (la envoltura absolutamente convexa cerrada).

Si E es un e.l.c., $M \subseteq E'$ es **equicontinuo** si $\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{E}(0_E) : \forall f \in M, \forall x \in U, |f(x)| < \varepsilon$, y una **familia fundamental de equicontinuos** es un $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(E')$ con los elementos equicontinuos tal que para $M \subseteq E'$ equicontinuo existe $N \in \mathcal{E}$ que contiene a M.

Si $(E, \mathcal{T})$ es un e.l.c.:

1. Si $U \in \mathcal{E}(0)$, $U^\circ \subseteq E'$ es equicontinuo, y si $M \subseteq E'$ es equicontinuo, $M^\circ \in \mathcal{E}(0)$.

2. Si $\mathcal{U}$ es base de entornos de 0 en E, $\{U^\circ\}_{U \in \mathcal{U}}$ es una familia fundamental de equicontinuos.

3. Si $\mathcal{E}$ es una familia fundamental de equicontinuos, $\{M^\circ\}_{M\in\mathcal{E}}$ es una base de entornos de 0.

4. $\mathcal{T}$ es la topología de convergencia uniforme sobre los equicontinuos de E'.

Sean $\langle F,G\rangle$ un par dual y $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(G)$ una familia de subconjuntos $\sigma(F,G)$-cerrados absolutamente convexos, en $\sigma(F,G)$,

$$\left(\bigcap\mathcal{S}\right)^\circ=\overline{\Gamma\left(\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S^\circ\right)}.$$

Teorema de Alaoglu-Bourbaki: Si E es un e.l.c., todo equicontinuo H de E' es relativamente compacto en $\sigma(E',E)$.

Así, si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio normado, B_{X^*} es compacta en $\sigma(X^*,X)$.

Lema de aproximación: Sean E es un e.l.c., $S\subseteq E$ cerrado y absolutamente convexo y $f:E\to\mathbb{K}$ lineal, $f|_S$ es continua si y sólo si $\forall\varepsilon>0,\exists g\in E':\sup_{x\in S}|g(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Teorema de completitud de Grothendieck: Sean E un e.l.c. y $\mathcal{E}$ el conjunto de los equicontinuos de E', $\hat{E}\coloneqq\{x\in(E')^*\mid\forall M\in\mathcal{E},x|_M\text{ continuo en }\sigma(E',E)\}$ con la topología de convergencia uniforme sobre $\mathcal{E}$ es un modelo para la compleción de E, es decir, E es denso en $\hat{E}$ y $\hat{E}$ es completo.

Así:

1. Un e.l.c. E es completo si y sólo si toda $y:E'\to\mathbb{K}$ lineal $\sigma(E',E)$-continua sobre los equicontinuos de E' es $\sigma(E',E)$-continua en E', si y sólo si está en E.

2. Un $(X,\|\cdot\|)$ normado es de Banach si y sólo si toda $x:X^*\to\mathbb{K}$ lineal $\sigma(X^*,X)$-continua en B_{X^*} es $\sigma(X^*,X)$-continua en X^*, si y sólo si está en E.

Si $(X,\|\cdot\|)$ es normado, $K\coloneqq(B_{X^*},\sigma(X^*,X))$ e $\iota:X\hookrightarrow C(K)$ es la identificación estándar en el bidual:

1. $\iota:(X,\|\cdot\|)\hookrightarrow(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ e $\iota:(X,\|\cdot\|)\hookrightarrow(C(K),\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(K))$ son isomorfismos isométricos sobre su imagen.

2. Si X es de Banach, $(X,\sigma(X,X^*))$ se identifica con un subespacio cerrado de $(C(K),\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(K))$.

4.7. Espacios reflexivos

Sean $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio normado y $\mathcal{T}$ la topología asociada a $\|\cdot\|$:

1. $\sigma(X,X^*)$ es más gruesa que $\mathcal{T}$ y $\sigma(X^*,X)$ es más gruesa que la asociada a la norma dual.

2. $\sigma(X,X^*)$ es metrizable si y sólo si X es dimensión finita, en cuyo caso es igual a $\mathcal{T}$.

3. $A\subseteq X$ convexo es cerrado en $\sigma(X,X^*)$ si y sólo si lo es en $\mathcal{T}$.

Un espacio de Banach es **reflexivo** si la identificación estándar $\hat{}:X\to X^{**}$ es suprayectiva.

1. Si $p\in(1,\infty)$ y (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida, $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ es reflexivo.

2. $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ no es reflexivo.

Teorema de Goldstine: Sea $(X, \|\cdot\|)$ normado, B_X es denso en $(B_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*))$.

Teorema de caracterización de la reflexividad: Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si B_X es compacta en $\sigma(X, X^*)$.

Si X es un espacio de Banach:

1. X es separable si y sólo si $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es metrizable.

2. X^* es separable si y solo si $(B_X, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

3. Si X^*es separable, X es separable.

Si X es un espacio reflexivo:

1. Todo subespacio cerrado es reflexivo.

2. X es separable si y sólo si lo es X^*.

Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si lo es X^* con la norma dual.

Ejemplos:

1. Todo espacio de dimensión finita es reflexivo.

2. ℓ^1 y ℓ^∞ son reflexivos.

3. Ni $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ni su dual son reflexivos.

4. Ni $L^1([a,b])$ ni $L^\infty([a,b])$ son reflexivos.

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **uniformemente convexo** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in B_X, \left(\|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \right),$$

si y sólo si

$$\forall \{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subseteq B_X, \left(\lim_n \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1 \implies \lim_n \|x_n - y_n\| = 0 \right),$$

en cuyo caso $\|\cdot\|$ es **uniformemente convexa**.

1. Toda norma uniformemente convexa es estrictamente convexa.

2. Todo espacio prehilbertiano es uniformemente convexo.

En un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, $f : X \to \mathbb{R}$ es **uniformemente diferenciable Fréchet** en $x \in X$ si existe $\lim_{t\to 0} \sup_{h \in B_X} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$. **Primer teorema de Šmulian:** Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es uniformemente convexo si y sólo si para $f \in B_{X^*}$, la norma dual es uniformemente diferenciable Fréchet en todo B_{X^*}.

Teorema de Milman: Todo espacio de Banach con norma uniformemente convexa es reflexivo.

Si X es un espacio de Banach y $\varepsilon > 0$, un ε-**árbol diádico** con **raíz** $x \in X$ de longitud $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es una familia $\{x_s\}_{s \in \bigcup_{i=0}^{n} \{\pm 1\}^n} \subseteq X$ tal que $x_\emptyset = x$ y, para $s \in \bigcup_{i=0}^{n-1} \{\pm 1\}^n$, $x_s = \frac{x_{s(-1)} + x_{s1}}{2}$ y $\|x_{s(-1)} - x_{s1}\| \geq \varepsilon$. Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es **superreflexivo** si para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que todo ε-árbol diádico contenido en B_X tiene longitud máxima N, si y sólo si X admite una norma uniformemente convexa equivalente a $\|\cdot\|$.

Si $p \in (1, \infty)$ y (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida, $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ es uniformemente convexo y reflexivo, y si $q \in (1, \infty)$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Phi : L^q(\mu) \to L^p(\mu)^*$ dado por

$$\Phi(g)(f) \coloneqq \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu$$

es un isomorfismo isométrico.

Propiedad de Schur: En ℓ^1, las sucesiones convergentes en la topología asociada a la norma y en $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ son las mismas, pese a que son topologías distintas.

Segundo teorema de Šmulian: Si $(X, \|\cdot\|)$ es normado, un subespacio de $(X, \sigma(X, X^*))$ es compacto si y sólo si es compacto por sucesiones.

Un subconjunto de $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ es débilmente compacto (compacto con la topología débil) si y sólo si es compacto.