Funciones de una variable real I

Bibliografía:

- Análisis Matemático I, J. M. Mira & S. Sánchez-Pedreño.
- Funciones reales de una variable real: Notas de clase, Bernardo Cascales, Luis Oncina & Salvador Sánchez-Pedreño (Curso 2017–18).

Capítulo 1

Números reales y complejos

1.1. Definición axiomática de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ es el cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo.

1.1.1. Cuerpo conmutativo

Conjunto con dos operaciones internas: suma ($\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ con $(x, y) \mapsto x + y$) y producto ($\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ con $(x, y) \mapsto x \cdot y$), con las siguientes propiedades: $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$:

1. **Asociativa de la suma:** $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2. **Conmutativa de la suma:** $a + b = b + a$.

3. **Elemento neutro para la suma** o **nulo:** $\exists! 0 \in \mathbb{K} : \forall a \in \mathbb{K}, 0 + a = a$.
   Pongamos que existe otro 0 ($0'$), entonces $0 = 0 + 0' = 0'$.

4. **Inverso para la suma** u **opuesto:** $\exists! a' : a + a' = 0$. $a' := -a$.
   Pongamos que existe otro opuesto a'', entonces $a' = 0 + a' = (a'' + a) + a' = a'' + (a + a') = a'' + 0 = a''$.

5. **Asociativa del producto:** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

6. **Conmutativa del producto:** $a \cdot b = b \cdot a$.

7. **Elemento neutro para el producto** o **unidad:** $\exists! 1 \in \mathbb{K} : \forall a \in K, 1 \cdot a = a$.
   Pongamos que existe otro 1 ($1'$), entonces $1 = 1 \cdot 1' = 1'$.

8. **Inverso para el producto:** $\forall a \in \mathbb{K} \backslash \{0\}, \exists! a'' : a \cdot a'' = 1$; $a'' := \frac{1}{a} := a^{-1}$.
   Pongamos que existe otro a'' (a'), entonces $a'' = 1 \cdot a'' = (a' \cdot a) \cdot a'' = a' \cdot (a \cdot a'') = a' \cdot 1 = a'$.

9. **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

De aquí podemos deducir que:

1. $a = b \iff a - b = 0$; $b \neq 0 \implies (a = b \iff a \cdot b^{-1} = 1)$.

2. $a \cdot 0 = 0$.

3. $(-a) \cdot b = -(ab)$; $(-1) \cdot a = -a$.

1.1.2. Totalmente ordenado

Aquel con relación binaria $\leq$ con las siguientes propiedades: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:

1. **Reflexiva:** $x \leq x$.

2. **Antisimétrica:** $x \leq y \wedge y \leq x \iff x = y$.

3. **Transitiva:** $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$.

4. **Orden total:** $x \leq y \vee y \leq x$.

5. $x \leq y \implies x + z \leq y + z$.

6. $x \leq y \wedge 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z$.

Una relación binaria que cumple las propiedades 1–3 se denomina de **orden.** Si también cumple (4), de **orden total.** El conjunto de todas definen un **cuerpo totalmente ordenado.**

Notación: $x < y \iff y > x \iff x \leq y \wedge x \neq y$; $x \geq y \iff y \leq x$.

Podemos deducir que:

1. $c < 0 \iff -c > 0$.

2. $a \leq b \wedge c \leq d \implies a + c \leq b + d$.

3. $a \leq b \iff -a \geq -b$.

4. $c < 0 \implies (a \leq b \iff ca \geq cb)$.

5. $a \neq 0 \implies a \cdot a > 0$; $1 \neq 0 \implies 1 \geq 0$.

6. $a > 0 \iff a^{-1} > 0$.

7. $b > 0 \implies (a \leq b \implies a^{-1} \leq b^{-1})$.

1.1.3. Completo

Aquel que cumple el **axioma del supremo:** todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo. Un conjunto $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado superiormente si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq M$, entonces M es cota superior de A. $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de A ($\alpha = \sup A$) si es su menor cota superior, y cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$. Cuando $\alpha \in A$, se le llama también máximo.

Igualmente, un subconjunto $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado inferiormente si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, M \leq a$, entonces M es cota inferior de A. $\alpha \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de A ($\alpha = \text{ínf} A$) si es su mayor cota inferior. Todo cuerpo que verifica el axioma del supremo también cumple que todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo. **Demostración:** si A está acotado inferiormente por α, $-A = \{-a\}_{a \in A}$ está acotado superiormente por $-\alpha$, y si β es su supremo, entonces $-\beta$ será el ínfimo de A.

1.2. Otras propiedades de los números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$)

Un subconjunto $I \subseteq \mathbb{K}$ es **inductivo** si $1 \in I$ y $n \in I \implies n+1 \in I$. Todo cuerpo o intersección de conjuntos inductivos es un conjunto inductivo. Ahora tomemos el «bicho» $\bigcap\{I \mid I \text{ es un conjunto inductivo de } \mathbb{R}\}$, la intersección de todos los conjuntos inductivos y por tanto el más pequeño de ellos. Así, el conjunto de **números naturales** $\mathbb{N} :=$ bicho.

Podemos definir $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, etc. Propiedades «obvias» de los naturales:

1. $\forall n < 1, n \notin \mathbb{N}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \nexists x \in \mathbb{N} : n < x < n+1$.
3. $\forall n, m \in \mathbb{N}, n+m \in \mathbb{N} \wedge n \cdot m \in \mathbb{N}$.
4. $\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \implies \exists k \in \mathbb{N} : m = n+k$.

Definimos $\mathbb{Z} := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \text{ o } -n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{Q} := \{m \cdot n^{-1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

1.2.1. Método de inducción

Método de demostración basado en definir un conjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ que cumpla la propiedad $P(n)$ a demostrar en $\mathbb{N}$ y demostrar que es inductivo. Como $\mathbb{N}$ es el conjunto inductivo más pequeño, tenemos $S = \mathbb{N}$. Para demostrar esto:

1. Comprobamos que $P(1)$ es verdad.
2. Demostramos que $P(n) \implies P(n+1)$. Para ello, demostramos $P(n+1)$ tomando como propiedad $P(n)$ (la **hipótesis de inducción**).

Dado un número natural N, un conjunto $S \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N\} \subseteq \mathbb{N}$ nos sirve para realizar demostraciones para los naturales a partir de un número arbitrario. Por último, la **versión fuerte** del método de inducción nos permite definir S tal que $1 \in S$ y $1, 2, \ldots, n \in S \implies n+1 \in S$, y entonces $S = \mathbb{N}$.

1.2.2. Propiedad arquimediana

$\mathbb{R}$ cumple la **propiedad arquimediana:** $\forall 0 < y, x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$. **Demostración:** De no ser así, $A := \{ny \mid n \in \mathbb{N}\}$ estaría acotado superiormente por x. Sea $\alpha := \sup A$; tendríamos que $\forall n \in \mathbb{N}, ny \leq \alpha$. Por otro lado, $\alpha - y$ no sería cota superior de A, por lo que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \alpha - y < n_0 y$. Por tanto $\alpha < (n_0+1)y$, lo que contradice el hecho de que A esté acotado superiormente por α.

Por tanto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, y $\mathbb{Z}$ no está acotado superior ni inferiormente.

Principio de la buena ordenación: Todo subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene **primer elemento**. **Demostración:** supongamos que A no tuviera primer elemento y sea $B := \mathbb{N} \backslash A$ el complementario de A. Entonces $1 \notin A$, pues de lo contrario tendría primer elemento; por tanto $1 \in B$. Además, si $1, \ldots, n \in B$ entonces $n+1 \in B$, pues de lo contrario tendríamos que $n+1 \in A$ sería el primer elemento. Por tanto $B = \mathbb{N}$ y $A = \emptyset$.#

Sea $x \in \mathbb{R}$, llamamos **parte entera** de x o $[x]$ al único $m \in \mathbb{Z}$ que verifica $m \leq x < m+1$.

De aquí podemos obtener que $\mathbb{Q}$ es **denso** en $\mathbb{R}$, es decir, que si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, entonces $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$. **Demostración:** Por la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N} : 1 < n(y-x)$, por lo que $\frac{1}{n} < y - x$. Si $m := [nx]$, entonces $m \leq nx < m+1$, por lo que

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y$$

Tomamos $r = \frac{m+1}{n}$ para obtener el resultado buscado.

1.2.3. Raíces cuadradas

Si $x = y^2$, entonces y es una **raíz cuadrada** de x. Entonces $-y$ también lo es, y x no puede tener más raíces cuadradas. Definimos

$$\sqrt{x} := \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < x\}$$

No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

$\exists \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : (\alpha^2 = 2 \wedge \alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\})$.

Llamamos **números irracionales** a los elementos de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Se tiene que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $\exists z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x < z < y$.

1.2.4. Valor absoluto

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

1. $|x| = |-x| \geq 0$; $x \neq 0 \implies |x| > 0$.
2. $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$.
3. $|xy| = |x||y|$.
4. $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.
5. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
6. **Desigualdad triangular:** $|x+y| \leq |x| + |y|$.
7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
8. $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

Distancia de x a y: $d(x, y) := |x - y|$. Propiedades:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.2.5. Raíces n-ésimas

Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y sea $p \in \mathbb{N}$:

1. $\forall r \in \mathbb{Q}, r > 0, r^p < x, \exists t \in \mathbb{Q} : (r < t \wedge r^p < t^p < x)$.
2. $\forall s \in \mathbb{Q}, s > 0, s^p > x, \exists w \in \mathbb{Q} : (0 < w < s \wedge s^p > w^p > x)$.
3. $\exists! \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 : \alpha^p = x$; $\alpha = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r^p < x\}$.

Así, la **raíz p-ésima** de x se define como el único número real positivo α tal que $\alpha^p = x$. Lo escribimos como

$$x^{\frac{1}{p}} := \sqrt[p]{x} := \sup\{r \mid r \in \mathbb{Q}, r^p < x\}$$

Capítulo 2

Sucesiones numéricas

Resultados importantes:

1. **Ecuación ciclotómica:** $(x-y)^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$.
2. **Desigualdad de Bernoulli:** $\forall x > -1, x \neq 0, n \in \mathbb{N}, (1+x)^n > 1+nx$.

2.1. Convergencia

Una **sucesión** en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (K) es una aplicación $\phi : \mathbb{N} \to K$ que denotamos como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(a_n)_n$, con elementos $a_n := \phi(n)$. a_n es el **término general** de la sucesión, y puede venir dado, por ejemplo, mediante una fórmula explícita o por recurrencia (**sucesión recurrente**), como es el caso de la **sucesión de Fibonacci** ($a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \forall n \geq 3$).

$(a_n)_n$ tiene límite $a \in K$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}(n \geq n_\varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon)$. Escribimos

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n$$

y decimos que $(a_n)_n$ es convergente con límite a. Así:

1. $\lim_n a = a$.
2. $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.
3. $\lim_n |a_n| = |\lim_n a_n|$.
4. $\lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_n a_n}$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, llamamos **intervalo cerrado** de extremos a, b al conjunto $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, **intervalo abierto** a $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ e **intervalos semiabiertos** por la derecha e izquierda, respectivamente, a $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ y $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. La **longitud** del intervalo es $b-a$. Llamamos **bola cerrada** de centro x_0 y radio $r > 0$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in K \mid |x - x_0| \leq r\}$, y **bola abierta** a $B(x_0, r) := \{x \in K \mid |x - x_0| < r\}$.

El límite de una sucesión convergente es único.

Toda sucesión convergente es acotada, es decir $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado.

Si $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son convergentes:

1. $\lim_n a_n + b_n = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
2. $\lim_n (a_n b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.
3. Si $b_n \neq 0$ y $\lim_n b_n \neq 0$, entonces $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}$.
4. $a_n \leq b_n \forall n \implies \lim_n a_n \leq \lim_n b_n$.
5. $\lim_n a_n < \lim_n b_n \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, a_n < b_n$.
6. **Regla del sandwich:** $a_n \leq c_n \leq b_n \wedge \lim_n a_n = \lim_n b_n = \alpha \implies \lim_n c_n = \alpha$.

2.2. Sucesiones monótonas acotadas

$(a_n)_n$ es **creciente** o **monótona creciente** si $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, y es **decreciente** o **monótona decreciente** si $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Decimos que es **monótona** si es creciente o decreciente.

Si $(a_n)_n$ es creciente y acotada superiormente entonces converge a $\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y si es decreciente y acotada inferiormente, converge a $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. **Demostración:** Si $(a_n)_n$ es creciente y acotada superiormente, existe $\alpha := \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, fijado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$, y al ser creciente, $\alpha - \varepsilon < a_n$ para cada $n > n_0$. El segundo caso es análogo.

A continuación definimos el número e:

1. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada.
2. $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente y acotada.
3. $e := \lim_n a_n = \lim_n b_n$.
4. Si $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, entonces $\lim_n S_n = e$.
5. e es irracional.

2.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

El **principio de encaje de Cantor** dice que si $(I_n)_n$ es una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que $I_{n+1} \subseteq I_n$ y el límite de la longitud de I_n es 0, entonces $\exists! a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. **Demostración:** Sea $I_n := [a_n, b_n]$. Entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$, b_k es cota superior de $(a_n)_n$, pues para todo $n \geq k$, $a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_k$. Por tanto $(a_n)_n$ converge. Si $a := \lim_n a_n$ entonces $a \leq b_k$ para todo k, y como $a_k \leq a \leq b_k$, entonces $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Por otra parte, si suponemos que $\exists \alpha < \beta : \alpha, \beta \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, entonces $[\alpha, \beta] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Pero entonces la longitud de todos los I_n sería mayor o igual a $\beta - \alpha > 0\#$, de donde se desprende la unicidad.

Dadas las sucesiones $\phi : \mathbb{N} \to K$ y $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, la sucesión $\phi \circ \tau : \mathbb{N} \to K$ es una **subsucesión** de ϕ. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (\phi \circ \tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$. Si $(a_n)_n$ es convergente, cualquier subsucesión suya converge al mismo límite. **Demostración:** Sea $a = \lim_n (a_n)_n$. Entonces, fijado ε, $\exists p \in \mathbb{N} : \forall n > p, |a_n - a| < \varepsilon$. Entonces, si $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(a_n)_n$, necesariamente $k \leq n_k$ para cualquier k, por lo que si $k > p$ entonces $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ y $\lim_k a_{n_k} = a$.

El **teorema de Bolzano-Weierstrass** afirma que cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente. **Demostración:** Sea $(a_n)_n$ acotada y $c_0, d_0 \in \mathbb{R}$ tales que $c_0 \leq a_n \leq d_0 \forall n$. Sea entonces $I_0 \coloneqq [c_0, d_0]$ y $m_0 \coloneqq \frac{c_0+d_0}{2}$. Entonces uno de los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [c_0, m_0]\}$ o $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [m_0, d_0]\}$ es infinito. Llamamos a este $I_1 \coloneqq [c_1, d_1]$ y tomamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} \in I_1$. Entonces dividimos I_1 por $m_1 \coloneqq \frac{c_1+d_1}{2}$ y obtenemos, del mismo modo que antes, $I_2 = [c_2, d_2]$. Como es infinito podemos elegir $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in I_2$. Por inducción obtenemos una serie de intervalos $(I_k)_k$ y una subsucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $I_{k+1} \subsetneq I_k$ con $L(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} L(I_0) = 0$, y $a_{n_k} \in I_k$. Por el principio de encaje de Cantor, se tiene que $\exists! z \in \bigcap_k I_k$ y por tanto $z = \lim_k a_{n_k}$.

De aquí obtenemos que si $(a_n)_n$ es una sucesión acotada y todas sus subsucesiones convergen a a, entonces $a = \lim_n a_n$.

2.4. Sucesiones de Cauchy: completitud

Una sucesión $(a_n)_n$ es **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}(n, m \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon)$.

Teorema de completitud de $\mathbb{R}$: $(a_n)_n$ en $\mathbb{R}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.

$\implies$] Sea $a \coloneqq \lim_n a_n$. Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, si $n, m > n_0$, entonces $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\impliedby$] Primero probamos que una sucesión de Cauchy es acotada: Dado $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon = 1$, de donde

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$$

y si llamamos $M \coloneqq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ entonces $a_1 \leq |a_n| \leq M \forall n$. Ahora, aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass, sabemos que existe una subsucesión $(a_{n_k})_k$ convergente, digamos, a b. Como $(a_n)_n$ es de Cauchy, fijado ε, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$ entonces $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, como $\lim_k a_{n_k} = b$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$ entonces $|a_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, si $p > \max\{n_0, k_0\}$ y $n > p$, entonces

$$|a_n - b| = |a_n - a_{n_p} + a_{n_p} - b| \leq |a_n - a_{n_p}| + |a_{n_p} - b| \overset{(n_p > p)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2.5. Funciones elementales

Para $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definimos $a^n \coloneqq a \cdots a$ (n veces). Esta definición puede extenderse a $\mathbb{Z}$ definiendo $a^0 \coloneqq 1$ y $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ para $n \in \mathbb{Z}^-$. Con exponentes racionales, se define $a^{\frac{m}{n}} \coloneqq \sqrt[n]{a^m}$, y podemos probar fácilmente que si $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ entonces $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$, para lo cual necesitamos las propiedades de la exponencial:

1. $a^{r+s} = a^r a^s$.
2. $(ab)^r = a^r b^r$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.

4. $r < s \implies (a > 1 \implies a^r < a^s) \wedge (0 < a < 1 \implies a^r > a^s)$.

5. $0 < a < b \implies (r > 0 \implies a^r < b^r) \wedge (r < 0 \implies a^r > b^r)$.

Podemos demostrar estas propiedades de forma sencilla demostrándolas primero para exponentes naturales y luego generalizando en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Para exponentes reales, definimos

$$a^x = \lim_n a^{r_n}$$

donde $(r_n)_n$ es una sucesión de racionales que converge a x. Este límite existe y es independiente de la sucesión $(r_n)_n$ escogida.

A continuación vemos las propiedades de la exponencial para exponentes reales:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$.

2. $(ab)^x = a^x b^x$.

3. $(a^x)^y = a^{xy}$.

4. $x < y \implies (a > 1 \implies a^x < a^y) \wedge (0 < a < 1 \implies a^x > a^y)$.

5. $0 < a < b \implies (x > 0 \implies a^x < b^x) \wedge (x < 0 \implies a^x > b^x)$.

6. $\lim_n a^{x_n} = a^{\lim_n x_n}$.

7. a^x no está acotada superiormente para $a > 1$: $a > 1 \implies \forall k \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R} : (x > t \implies a^x > k)$.

8. $\inf\{a^x\}_{x\in\mathbb{R}} = 0$ para $a < 1$: $a < 1 \implies \forall \varepsilon > 0, \exists t \in \mathbb{R} : (x > t \implies a^x < \varepsilon)$.

Si $0 < a \neq 1$ y $x > 0$, $\exists! y \in \mathbb{R} : a^y = x$.

Llamamos **logaritmo** en **base** a de x ($\log_a x$) al único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$. Si $a = e$, lo llamamos **logaritmo neperiano**, escrito $\log x$ o $\ln x$. Propiedades:

1. $\log_a a^x = x$.

2. $a^{\log_a x} = x$.

3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

4. $\log_a x^y = y \log_a x$.

5. $a > 1 \wedge 0 < x < y \implies \log_a x < \log_a y$.

6. $0 < a < 1 \wedge 0 < x < y \implies \log_a x > \log_a y$.

7. $\lim_n x_n > 0 \wedge \forall n, x_n > 0 \implies \lim_n \log_a x_n = \log_a \lim_n x_n$.

$\lim_n \sin x_n = \sin \lim_n x_n$ y $\lim_n \cos x_n = \cos \lim_n x_n$.

2.6. Límites infinitos

La sucesión $(a_n)_n$ de números reales tiene límite «más infinito» ($\lim_n a_n = +\infty$) si $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, a_n > M$, y tiene límite «menos infinito» ($\lim_n a_n = -\infty$) si $\forall M < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, a_n < M$. Podemos generalizar el álgebra de límites con:

$$
\begin{array}{ccc}
a + (-\infty) = -\infty & a - (+\infty) = -\infty & a - (-\infty) = +\infty \\
\frac{a}{\pm\infty} = 0 & a > 0 \implies a(+\infty) = +\infty & a > 0 \implies a(-\infty) = -\infty \\
a < 0 \implies a(+\infty) = -\infty & a < 0 \implies a(-\infty) = +\infty & (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\
(-\infty) + (-\infty) = -\infty & (+\infty)(+\infty) = +\infty & (-\infty)(-\infty) = +\infty \\
(+\infty)(-\infty) = -\infty & (+\infty)^{+\infty} = +\infty & (+\infty)^{-\infty} = 0
\end{array}
$$

Además, si $\lim_n a_n = 0$, $a_n > 0 \forall n$ y $\lim_n b_n = +\infty$, entonces $\lim_n a_n^{b_n} = 0$. Sin embargo, nada puede decirse en general de:

$$
\begin{array}{llll}
(+\infty) + (-\infty) & (\pm\infty) \cdot 0 & \frac{\pm\infty}{\pm\infty} & \frac{0}{0} \\
\frac{a}{0} & 1^{\pm\infty} & (\pm\infty)^0 & 0^0
\end{array}
$$

Llamamos a estas situaciones **indeterminaciones**.

2.7. Algunas sucesiones notables. Jerarquía de sucesiones divergentes

1. Si $\lim_n x_n = \pm\infty$ entonces $\lim_n \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ y $\lim_n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e^{-1}$.
2. Si existe $\lim_n \frac{z_{n+1}}{z_n} = w \in \mathbb{R}$ con $|w| < 1$, entonces $\lim_n z_n = 0$.
   Se tendría que existe $0 < a < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < a < 1$. En particular, $|z_{n_0+1}| < |z_{n_0}|a$, $|z_{n_0+2}| < |z_{n_0+1}|a < |z_{n_0}|a^2$, y en general, $|z_{n_0+k}| < |z_{n_0}|a^k$. Pero $\lim_n a_n = 0$, luego $\lim_n |z_n| = 0$ y por tanto $\lim_n z_n = 0$.
3. $\lim_n \frac{a_k n^k + \dots + a_0}{b_r n^r + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_r} & \text{si } k = r \\ 0 & \text{si } k < r \\ \pm\infty & \text{si } k > r\text{, dependiendo del signo de } \frac{a_k}{b_r}. \end{cases}$

Si $\lim_n a_n = \infty$ y $\lim_n b_n = \infty$, entonces $(a_n)_n$ es un infinito **de orden superior** a $(b_n)_n$ y escribimos $b_n \ll a_n$ si $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Si existen α y β con $0 < \alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$ para $n > n_0$, se dice que ambas tienen el **mismo orden de infinitud**. Y si además $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$, se dice que son **equivalentes**. Así, si $b > 0$, $c > 1$ y $d > 0$, entonces

$$\log n \ll n^b \ll c^n \ll n^{dn}$$

Si además $d \geq 1$, entonces $c^n \ll n! \ll n^{dn}$.

2.8. Equivalencias

Si $\lim_n x_n = 0$ con $0 < |x_n| < 1$, entonces:

1. $\log(1 + x_n) \sim x_n$.
2. $e^{x_n} - 1 \sim x_n$.

Si $\lim_n x_n = 1$ con $x_n \neq 1$ y $\lim_n y_n = \pm\infty$, entonces

$$\lim_n x_n^{y_n} = e^{\lim_n y_n (x_n - 1)}$$

Si $\lim_n x_n = 0$ y $x_n \neq 0$, entonces $\sin x_n \sim x_n$.

Criterios de Stolz: Si $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones de reales tales que $(b_n)_n$ es estrictamente creciente o decreciente y bien $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$, bien $\lim_n b_n = \infty$, si existe $\lim_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L$.

Como consecuencia:

1. Si $(a_n)_n$ converge, entonces

$$\lim_n \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim_n a_n$$

2. Si $(a_n)_n$ converge y $a_n > 0$, entonces

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \lim_n a_n$$

3. Si $a_n > 0$ y existe $\lim_n \frac{a_n}{a_{n-1}}$, entonces

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

2.9. Series numéricas

Dada una sucesión $(a_n)_n$ de números reales, podemos formar una sucesión $(S_n)_n$ dada por $S_n = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i$, que llamamos **serie** asociada de $(a_n)_n$. Sus términos se denominan **sumas parciales** de la serie (S_n es la suma parcial n-ésima), y los de $(a_n)_n$, términos de la serie (el término genérico a_n se denomina **término general**). A $(S_n)_n$ la denotamos como $a_1 + \cdots + a_n + \ldots$ o $\sum_n a_n$. Si $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$, la serie es **convergente** y escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. De lo contrario es **divergente**.

La **condición de Cauchy** nos dice que $\sum_n a_n$ es convergente si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N}, (n_0 \leq p \leq q \implies |a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon)$.

De aquí, tomando $q = p + 1$, se tiene que si S_n converge, entonces $\lim_n a_n = 0$. También se tiene que la convergencia de una serie no se altera modificando un número finito de términos de esta.

Linealidad de la suma: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda A + \mu B$.

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos $a_n \geq 0$, esta es convergente si y sólo si la sucesión de sumas parciales es acotada, pues esta es monótona creciente.

Criterios de comparación:

1. Dadas $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ con $a_n, b_n \geq 0$, si existe $M > 0$ tal que $a_n \leq M b_n \forall n$, entonces la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pues significa que esta última es acotada.

2. Dadas $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ con $a_n, b_n > 0$ y existe $l := \lim_n \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

   a) Si $0 < l < \infty$, ambas series tienen el mismo carácter.
   Para $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| \leq \frac{l}{2}$, lo que equivale a que $\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2} l$ y $\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3l}{2} b_n$. Si $\sum_n a_n$ es convergente, tenemos que $\sum_n b_n$ también, y si $\sum_n b_n$ es convergente, también lo es $\sum_n a_n$.

   b) Si $l = 0$ entonces la convergencia de $\sum_n b_n$ implica la de $\sum_n a_n$.
   Para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, luego $a_n \leq b_n$.

   c) Si $l = +\infty$ entonces la convergencia de $\sum_n a_n$ implica la de $\sum_n b_n$.
   Para $k = 1 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, luego $a_n \geq b_n$.

Criterio de la raíz: Dada $\sum_n a_n$ con $a_n > 0$ y $a := \lim_n \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$:

- Si $a < 1$, la serie converge.
  Sea $r \in \mathbb{R}$ con $a < r < 1$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{a_n} < r$, es decir, $a_n < r^n$. Como $r < 1$, la serie geométrica $\sum_n r^n$ es convergente, y el criterio de comparación nos da la convergencia de $\sum_n a_n$.

- Si $a > 1$, la serie diverge.
  Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $a_n > 1$, luego $\lim_n a_n \neq 0$.

- Si $a = 1$ no se puede afirmar nada.

Criterio del cociente: Sea $\sum_n a_n$ con $a_n > 0$ y $a := \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}$. Entonces $a = \lim_n \sqrt[n]{a_n}$. Por tanto:

- Si $a < 1$, la serie converge.

- Si $a > 1$, la serie diverge.

Criterio de condensación: Dada una sucesión $(a_n)_n$ monótona decreciente con $a_n > 0$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \in \mathbb{R}$$

Una serie $\sum_n a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ es **absolutamente convergente** si $\sum_n |a_n|$ es convergente. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Una serie es **incondicionalmente convergente** si todas sus reordenadas son convergentes y tienen la misma suma. **Teorema:** Esta condición equivale a ser absolutamente convergente.

La **serie geométrica** $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente si $|r| < 1$ con suma $\frac{1}{1-r}$ y divergente si $|r| \geq 1$. La **serie armónica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ es convergente si $k > 1$ y divergente si $k \leq 1$.

Capítulo 3

Continuidad de funciones

3.1. Límite de una función en un punto

Una función es una terna (D, F, f), escrita como $f : D \to F$, donde f asigna a cada $x \in D$ un único valor $f(x) \in F$. Llamamos **recta real ampliada** al conjunto $\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. V es un **entorno** de $x \in K$ si $\exists r > 0 : B(x, r) \subseteq V$, y x es un **punto de acumulación** de $A \subseteq K$ si $\forall r > 0, \exists x' \neq x : x' \in B(x, r) \cap A$. Se tiene entonces que x es un punto de acumulación de $A \neq \emptyset$ si y sólo si existe $(x_n)_n \subseteq A$ con $x_n \neq x \forall n$ y $x = \lim_n x_n$.

Dados $f : D \subseteq K \to K$ y c un punto de acumulación de D, L es el límite de f en c,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D, (0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$. Dicho de otro modo, si $\forall B(L, \varepsilon), \exists B(c, \delta) : f((B(c, \delta) \cap D) \setminus \{c\}) \subseteq B(L, \varepsilon)$. Se tiene entonces que $L = \lim_{x \to c} f(x) \iff \forall (x_n)_n \subseteq D, (\lim_n x_n = c \land \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq c \implies L = \lim_n f(x_n))$. Si existe el límite de una función en un punto, este es único.

Condición de Cauchy: Dados $f : D \subseteq K \to K$ y c un punto de acumulación de D, entonces $\exists \lim_{x \to c} f(x) \in K \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in B(c, \delta) \setminus \{c\}, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Dados $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de D tales que $L_1 = \lim_{x \to c} f(x) \in K$ y $L_2 = \lim_{x \to c} g(x) \in K$, entonces:

1. $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$.
2. $\lim_{x \to c} f(x) g(x) = L_1 L_2$.
3. $L_2 \neq 0 \implies \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.
4. $f(x) \leq g(x) \implies L_1 \leq L_2$.
5. **Regla del sandwich:** Dada $h : D \to \mathbb{R}$ con $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ y $L_1 = L_2 = L$ entonces $L = \lim_{x \to c} h(x)$.

Equivalencias importantes:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Límites laterales: Dados $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de D, llamamos **límite por la derecha** de f en c a $f(c^+) = \lim_{x\to c^+} f(x) := \lim_{x\to c} g(x)$ con $g : D\cap(c, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g(x) = f(x)$, y **límite por la izquierda** de f en c a $f(c^-) = \lim_{x\to c^-} f(x) := \lim_{x\to c} g(x)$ con $g : D \cap (-\infty, c) \to \mathbb{R}$. Así,

- $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D, (c < x < c + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$.
- $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D, (c < x < c + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$.

Por tanto, el límite de una función en un punto existe si y sólo si existen los dos límites laterales y coinciden, en cuyo caso coinciden también con el límite de la función en dicho punto.

Límites infinitos y en el infinito: Sea $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si $\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in (a, +\infty), (x > M \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$, y $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall K > 0, \exists M > 0 : \forall x \in (a, +\infty), (x > M \implies f(x) > K)$. De igual modo, si $f : D \to \mathbb{R}$ y c es un punto de acumulación de D, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ si $\forall K > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D, (0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > K)$.

3.2. Funciones continuas

$f : D \subseteq K \to K$ es **continua** en c si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D, (|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$. Así, f es continua en c si y sólo si para cada $(x_n)_n \subseteq D$ con $c = \lim_n x_n$ se tiene que $f(c) = \lim_n f(x_n)$. En particular,

$$f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n)$$

Dadas $f, g : D \subseteq K \to K$ continuas en $c \in D$, entonces $f + g$ y fg también son continuas en c, y si $g(c) \neq 0$, también es continua $\frac{f}{g}$. Por otro lado, si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $c \in D$ y $f(c) \neq 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que para $x \in B(c, \delta) \cap D$, $f(x) \neq 0$ y tiene el mismo signo que $f(c)$.

Dadas $f_1 : D_1 \subseteq K \to D_2 \subseteq K$ continua en $c \in D_1$ y $f_2 : D_2 \to K$ continua en $f_1(c)$, entonces $f_2 \circ f_1 : D_1 \to K$ es continua en c.

$f : D \subseteq K \to K$ es **continua en** D si es continua en cada punto de D. Así, las funciones polinómicas, la exponencial, el seno y el coseno son funciones continuas en $\mathbb{R}$, mientras que el logaritmo es continuo en $(0, +\infty)$.

3.3. Funciones reales continuas en un intervalo

El **teorema de Weierstrass** afirma que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces:

1. f es acotada.
   Si no lo fuera, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ convergente a un $c \in [a, b]$. Pero entonces, como f es continua en c, $\lim_n f(x_{n_k})_k = f(c)$, luego la sucesión es acotada.#

2. Existen $c, d \in [a, b]$ con $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, es decir, f tiene máximo y mínimo.
   Si $\alpha := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, existe $(x_n)_n \subseteq [a, b]$ con $\alpha = \lim_n f(x_n)$, por lo que existe

una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ convergente a un $d \in [a,b]$. Pero por la continuidad de f, $f(d) = \lim_k f(x_{n_k}) = \alpha$, luego f alcanza su máximo absoluto en d. La demostración de que alcanza su mínimo absoluto es análoga.

El **teorema de Bolzano** afirma que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua con $f(a)f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$. **Demostración:** Supongamos $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ y sean $a_0 := a$, $b_0 := b$ y $m := \frac{a+b}{2}$. Si $f(m) = 0$, hemos terminado. Si $f(m) > 0$, llamamos $a_1 := a_0$ y $b_1 := m$, y si $f(m) < 0$ entonces $a_1 := m$ y $b_1 := b_0$. Procediendo recursivamente, o bien se encuentra un cero de f, o se obtiene una sucesión $[a_n, b_n]$ de intervalos en las condiciones del principio de encaje de Cantor, por lo que $\exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ y $c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$. La continuidad de f junto con que $f(a_n) < 0$ y $f(b_n) > 0$ implica que $0 \leq \lim_n f(b_n) = f(c) = \lim_n f(a_n) \leq 0$, por lo que $f(c) = 0$.

El **método de bisección** para resolución de ecuaciones es un algoritmo para aproximar raíces de una función continua, y consiste en localizar un intervalo $[a,b]$ con $f(a)f(b) < 0$ y proceder según la demostración del teorema de Bolzano.

La **propiedad de Darboux** o **de los valores intermedios** afirma que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $f(a) < z < f(b)$, entonces $\exists c \in [a,b] : f(c) = z$.

Si I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(I)$ es un intervalo, y si I es además cerrado y acotado, también lo es $f(I)$.

Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ es **monótona creciente** si $\forall x_1 < x_2 \in I, f(x_1) \leq f(x_2)$, **monótona decreciente** si $\forall x_1 < x_2 \in I, f(x_1) \geq f(x_2)$, **monótona** si es monótona creciente o decreciente; **estrictamente creciente** si $\forall x_1 < x_2 \in I, f(x_1) < f(x_2)$, **estrictamente decreciente** si $\forall x_1 < x_2 \in I, f(x_1) > f(x_2)$, y **estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o decreciente. Además, $f^{-1} : Y \to X$ es la inversa de $f : X \to Y$ si $f^{-1} \circ f = Id_X$ y $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

Teorema de la función inversa: Dada $f : I \to \mathbb{R}$ continua, entonces:

1. f es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.

2. Si f es estrictamente monótona, también lo es f^{-1} que, además, es continua.

Si $f : I \to J$ es biyectiva, entonces f es continua si y sólo si es estrictamente monótona.

3.4. Continuidad uniforme

$f : D \subseteq K \to K$ es **uniformemente continua** en D si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D, (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. El **teorema de Heine** afirma que toda $f : B[a,r] \to K$ continua es uniformemente continua. **Demostración:** Si no lo fuera, existiría $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0, \exists x, y \in D : (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon)$, por lo que existirían $(x_n)_n, (x'_n)_n \subseteq B[a,r]$ tales que $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Pero entonces existirían subsucesiones $(x_{n_k})_k$ y $(x'_{n_k})_k$ de estas que convergen al mismo $z \in B[a,r]$. Por la continuidad de f, $\lim_k f(x_{n_k}) = f(z) = \lim_k f(x'_{n_k})$, pero por otra parte $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$. Tomando límites, se tiene que $0 \geq \varepsilon > 0 \#$.