Funciones de una variable real II

Bibliografía:

- Análisis Matemático I, J. M. Mira & S. Sánchez-Pedreño.
- Funciones reales de una variable real: Notas de clase, B. Cascales, L. Oncina & S. Sánchez-Pedreño (Curso 2017–18).

Capítulo 1

Cálculo diferencial

Una función $f : I \to \mathbb{R}$, siendo I un intervalo abierto, es **derivable** en $c \in I$ si existe

$$f'(c) := \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

y se dice derivable en I si es derivable en cada punto de I. Al valor $f'(c)$ lo llamamos **derivada** de f en c, y llamamos **cociente incremental** a la expresión $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Otra definición de derivada es

$$f'(c) := \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Si f es derivable en I, llamamos **derivada de la función** f a la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in I$ le hace corresponder $f'(x)$. Podemos definir la **derivada por la izquierda** de f en c como $f'(c^-) := f'_-(c) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, y la **derivada por la derecha** de f en c como $f'(c^+) := f'_+(c) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$.

Si f es derivable en c, llamamos **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ a la función dada por $g(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$. Podemos formular que $f'(c) = m$ diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\phi(h)$$

donde $\phi : (-\delta, \delta) \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_{h \to 0} \phi(h) = 0$. Equivalentemente, podemos hacer uso de la **«o» pequeña de Landau**, que representa una función cualquiera definida en un entorno reducido o perforado del origen, $(-\delta, \delta) \backslash \{0\}$, y cumple que $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Así,

$$f(c+h) = f(c) + mh + o(h)$$

$f : I \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en $c \in I$ si existe una aplicación *lineal* $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ llamada **diferencial** de f en c, denotada $df(c)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$$

Se tiene que f es diferenciable en $c \in I$ si y sólo si es derivable en c, y entonces $df(c)(x) = f'(c)x$.

$\Longrightarrow$] Sea $\alpha(h) := \frac{f(c+h)-f(c)-L(h)}{h} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - L\left(\frac{h}{h}\right) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - L(1)$, entonces

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \alpha(h) + L(1) = L(1)$$

$\Longleftarrow$] Si f es derivable en c,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)-f'(c)h}{h} = 0$$

por lo que f es derivable en c y $f'(c) = L(1)$.

Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $c \in I$ entonces f es continua en c. **Demostración:** Se tiene que $f(c+h)-f(c) = (f'(c)+\phi(h))h$, luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que todo $|h| < \delta'$ cumple que $|\phi(h)| < 1$, y tomando $\delta := \min\{\delta', \frac{\varepsilon}{|f'(c)|+1}\}$, si $|h| < \delta$ entonces $|f(c+h)-f(c)| = |f'(c)+\phi(h)||h| \leq (|f'(c)+|\phi(h)|)|h| < \varepsilon$.

1.1. Cálculo de derivadas

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, siendo I un intervalo abierto, derivables en $c \in I$:

1. $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(c+h)-(f+g)(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)+g(c+h)-g(c)}{h} = f'(c)+g'(c)$$

2. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

$$(fg)'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h)-f(c)g(c)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h)-f(c)g(c+h)+f(c)g(c+h)-f(c)g(c)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} g(c+h)\frac{f(c+h)-f(c)}{h} + \lim_{h\to 0} f(c)\frac{g(c+h)-g(c)}{h} = g(c)f'(c)+f(c)g'(c)$$

3. $g(x) \neq 0 \forall x \in I \implies \left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g(c)^2}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(c+h)}{g(c+h)} - \frac{f(c)}{g(c)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c)-f(c)g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-f(c)g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} g(c)\frac{f(c+h)-f(c)}{hg(c)g(c+h)} + f(c)\frac{g(c)-g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} = \frac{f'(c)g(c)}{g(c)^2} - \frac{f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

4. $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c) \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
   Sea $g(x) = \alpha$ para todo $x \in I$,

$$g'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha-\alpha}{h} = 0$$

luego
$$(\alpha f)'(c)=(fg)'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)=f'(c)g(c)=\alpha f'(c)$$

5. **Regla de la cadena:** Sean I, J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: J \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Im} f \subseteq J$, si f es derivable en $c \in I$ y g lo es en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es derivable en c y
$$(g \circ f)'(c)=g'(f(c))f'(c)$$
Para demostrarlo usamos que $f(c+h)=f(c)+hf'(c)+h\phi(h)$ y $g(f(c)+k)=g(f(c))+kg'(f(c))+k\psi(k)$. Así,
$$\begin{aligned} g(f(c+h)) &= g(f(c)+hf'(c)+h\phi(h)) \\ &= g(f(c))+(hf'(c)+h\phi(h))g'(f(c))+(hf'(c)+h\phi(h))\psi(hf'(c)+h\phi(h)) \\ &= g(f(c))+hf'(c)g'(f(c))+ \\ &\quad +h(\phi(h)g'(f(c))+(f'(c)+\phi(h))\psi(hf'(c)+h\phi(h))) \end{aligned}$$
Si llamamos $\gamma(h)$ al último sumando, vemos que $(g\circ f)(c+h)=(g\circ f)(c)+hf'(c)g'(f(c))+h\gamma(h)$ con $\lim_{h\to 0}\gamma(h)=0$, lo que prueba el teorema.

6. Si $f: I \to J$ es una biyección derivable entre los intervalos I y J con f^{-1} continua y $f'(x)\neq 0 \forall x \in I$, entonces f^{-1} es derivable y
$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$
Sean $y=f(x), y_0=f(x_0)$,
$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Veamos algunas derivadas importantes.

1. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sin x$, entonces $f'(x)=\cos x$. Si es $g(x)=\cos x$, entonces $g'(x)=-\sin x$.
Se tiene que
$$\begin{array}{c} \sin x=\sin\left(\frac{x+c}{2}+\frac{x-c}{2}\right)=\cos\frac{x+c}{2}\sin\frac{x-c}{2}+\sin\frac{x+c}{2}\cos\frac{x-c}{2} \\ \sin c=\sin\left(\frac{x+c}{2}-\frac{x-c}{2}\right)=-\cos\frac{x+c}{2}\sin\frac{x-c}{2}+\sin\frac{x+c}{2}\cos\frac{x-c}{2} \end{array}$$
Por tanto,
$$\lim_{x\to c}\frac{\sin x-\sin c}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\cos\frac{x+c}{2}\sin\frac{x-c}{2}}{\frac{x-c}{2}}=\lim_{x\to c}\cos\frac{x+c}{2}\cdot 1=\cos c$$
La derivada del coseno se obtiene de forma análoga.

2. Si $f(x)=\tan x$ entonces $f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$.
Como $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$, partiendo de la derivada del seno y del coseno,
$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

3. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

4. Sea $f : I \subseteq (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.
El logaritmo es la inversa de $g(x) = e^x$, con $g'(x) = e^x$, luego

$$f'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

5. Sea $f : I \subseteq (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dada por $f(x) = \arcsin x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Sea $g : I \subseteq (-1, 1) \to (0, \pi)$ dada por $g(x) = \arccos x$, $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Al ser f la inversa del seno y $\sin'(x) = \cos x$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La derivada del arcocoseno se hace de forma análoga.

6. Sea $f : I \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dada por $f(x) = \arctan x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Esta función es la inversa de la tangente, y como $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

7. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, la derivada de $f(x) = x^\alpha$ es $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Para demostrarlo usamos **derivación logarítmica**: Tomamos logaritmos en la definición de f y derivamos la expresión resultante.

$$\log(f(x)) = \log(x^\alpha) = \alpha \log x \implies \log(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x} \implies f'(x) = f(x)\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

1.2. Derivabilidad en un intervalo

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I es **creciente**, **estrictamente creciente**, **decreciente** o **estrictamente decreciente** en I si para cualesquiera $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene, respectivamente, que $f(x) \leq f(y)$, $f(x) < f(y)$, $f(x) \geq f(y)$ o $f(x) > f(y)$. Es creciente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente en un punto $c \in I$ si existe un entorno perforado V de c tal que para $x \in I \cap V$, si $m := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ es, respectivamente, $m \geq 0$, $m > 0$, $m \leq 0$ o $m < 0$. Se tiene que f es creciente o decreciente en I si y sólo si lo es en cada punto de I.

$\Longrightarrow$] Trivial.

$\Longleftarrow$] Sea f creciente en cada $x \in I$, es menester demostrar que, dados $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Sea $A := \{z \in (x, y] \mid f(x) \leq f(z)\}$, como $A \neq \emptyset$ porque f es creciente en x

y A es acotado superiormente, podemos definir $\alpha := \sup A$, y basta probar que $\alpha = y$ y $f(x) \leq f(\alpha)$. Como f es creciente en α, existe $\delta > 0$ con $f(z) \leq f(\alpha)$ si $z \in (\alpha - \delta, \alpha)$. Pero por definición de α para alguno de esos valores es $f(x) \leq f(z)$, luego $f(x) \leq f(\alpha)$. Si fuera $\alpha < y$ existiría $z \in (\alpha, y]$ con $f(\alpha) \leq f(z)$ por el crecimiento de f en α, pero entonces se tendría que $f(x) \leq f(\alpha) \leq f(z)$, contradiciendo la definición de α.

f tiene un **máximo relativo** o **local** en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que $f(x) \leq f(c) \forall x \in I \cap V$, tiene un **mínimo relativo** o **local** en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que $f(x) \geq f(c) \forall x \in I \cap V$, y tiene un **extremo relativo** o **local** en c si tiene un máximo o mínimo relativo en c. Propiedades:

1. Si $f'(c) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en c.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

por lo que existe un entorno reducido V de c tal que $\forall x \in I \cap V$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$.

2. Si $f'(c) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en c.

3. Si c es un punto interior del intervalo I (no es un extremo) y f es derivable y tiene un extremo relativo en c, entonces $f'(c) = 0$.
Supongamos que el extremo es un máximo. Existe un entorno V de c tal que $\forall x \in I \cap V, f(x) \leq f(c)$, luego para $x \in I \cap V$,

$$\begin{cases} x < c & \implies & \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 & \implies & f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \\ x > c & \implies & \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 & \implies & f(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \end{cases}$$

Pero como f es derivable en c, $0 \leq f'(c^-) = f'(c) = f'(c^+) \leq 0$, luego $f'(c) = 0$.

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable, $c \in (a, b)$ es un **punto crítico** o **estacionario** de f si $f'(c) = 0$.

1.2.1. Teoremas del valor medio

Teorema de Rolle: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$. **Demostración:** Si f es constante, tomamos $c := \frac{a+b}{2}$. Si no, supongamos por ejemplo que existe $x_0 \in [a, b]$ con $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Por el teorema de Weierstrass, f alcanza su máximo absoluto en $[a, b]$, y por lo anterior debe alcanzarse en un punto interior $c \in (a, b)$. Pero por ser máximo absoluto es también máximo relativo y por tanto $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio de Cauchy: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ con $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$ (si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(c) \neq 0$ podemos expresar esto como $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$). **Demostración:** Aplicamos el teorema de Rolle a $h(x) := f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$, pues $h(a) = h(b)$.

Teorema del valor medio de Lagrange: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe $\theta \in (a, b)$ tal que $f'(\theta)(b - a) = f(b) - f(a)$. **Demostración:** Es un caso particular del teorema del valor medio de Cauchy tomando $g(x) := x$. El teorema de Rolle es un caso particular de este, por lo que estos tres teoremas son equivalentes.

Teorema de los incrementos finitos: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), si $|f'(x)|\leq M\forall x\in(a,b)$ entonces $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ para cualesquiera $x,y\in[a,b]$. A efectos prácticos, esto significa que si f' es acotada entonces f es uniformemente continua. **Demostración:** Basta aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a $f|_{[x,y]}$.

Para f y g continuas en $[a,b]$ y derivable en (a,b) se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall x\in(a,b),f'(x)=0\implies\exists k\in\mathbb{R}:\forall x\in(a,b),f(x)=k$.
   Aplicando el teorema de Lagrange en $[a,x]$, existe $c\in(a,x)$ con $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$, luego $f(x)=f(a)$.

2. $\forall x\in(a,b),f'(x)=g'(x)\implies\exists k\in\mathbb{R}:\forall x\in(a,b),f(x)=g(x)+k$.
   Sea $h(x):=f(x)-g(x)$, entonces $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ para $x\in[a,b]$, luego $h(x)$ es constante.

3. Si para todo $x\in(a,b)$ se tiene que $f'(x)\geq0$, $f'(x)>0$, $f'(x)\leq0$ o $f'(x)<0$ entonces f es, respectivamente, creciente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente.

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable y $c\in(a,b)$ con $f'(c)=0$. Si $\exists\delta>0:(\forall x\in(c-\delta,c)\subseteq(a,b),f'(x)\leq0\land\forall x\in(c,c+\delta)\subseteq(a,b),f'(x)\geq0)$ entonces f posee un mínimo relativo en c. Análogamente, si $\exists\delta>0:(\forall x\in(c-\delta,c)\subseteq(a,b),f'(x)\geq0\land\forall x\in(c,c+\delta)\subseteq(a,b),f'(x)\leq0)$ entonces f posee un máximo relativo en c. **Demostración:** Para el primer caso, si $y\in(c-\delta,c)$, existe $\eta\in(y,c)$ tal que $f(c)-f(y)=f'(\eta)(c-y)\leq0$ y entonces $f(c)\leq f(y)$, mientras que si $y\in(c,c+\delta)$, existe $\beta\in(c,y)$ tal que $f(y)-f(c)=f'(\beta)(y-c)\geq0$ y entonces $f(c)\leq f(y)$; luego si $y\in(c-\delta,c+\delta)$ entonces $f(y)\geq f(c)$, por lo que f tiene un mínimo relativo en c. El segundo caso se prueba de forma análoga.

Con esto podemos probar la **desigualdad de Bernouilli** de forma más general: dados $x>0$ y $\alpha>1$, $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$. **Demostración:** Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x$ para un cierto $\alpha>1$, como $f(0)=0$, basta probar que f es estrictamente creciente si $\alpha>1$, pero $f'(x)=\alpha((1+x)^{\alpha-1}-1)>0$, probando la desigualdad.

1.2.2. Teorema de la función inversa

La **propiedad de los valores intermedios** afirma que, sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable y $x,y\in(a,b)$ con $x<y$ y $f'(x)<\eta<f'(y)$, entonces $\exists z\in(x,y):f'(z)=\eta$. **Demostración:** Sea $g:[x,y]\to\mathbb{R}$ con $g(t)=f(t)-\eta t$ continua y derivable, que por el teorema de Weierstrass (que usamos en lugar del de Bolzano porque g' no tiene por qué ser continua), tiene un mínimo absoluto en un $z\in[x,y]$. Pero como $g'(x)<0$ y $g'(y)>0$, z no puede ser x ni y, luego $z\in(x,y)$ y por tanto $g'(z)=0$, o dicho de otra forma, $f'(z)=\eta$.

De aquí deducimos el **teorema de la función inversa:** Sea $f:I\to\mathbb{R}$ continua en el intervalo I y derivable en su interior con derivada no nula, entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J y $f^{-1}:J\to\mathbb{R}$ es continua y derivable en el interior de J con

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Demostración: Por la propiedad anterior, bien $f'(x)>0$ para todo x o $f'(x)<0$ para todo x, por lo que f es estrictamente monótona, de modo que es biyectiva de I sobre un intervalo

J siendo f^{-1} estrictamente monótona y continua. Sean entonces $y, y_0 \in J, x = f^{-1}(y), x_0 = f^{-1}(y_0)$:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

1.2.3. Regla de L'Hospital

Sean f y g derivables en $I=(a,b)$ con $-\infty \le a < b \le +\infty$, si g y g' no tienen ceros en I y se cumple que o bien $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ o $\lim_{x\to b^-} g(x) = \pm\infty$, entonces, si existe $L := \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$, es también $L = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Por supuesto, esto también se cumple para límites por la derecha y por tanto también para límites ordinarios.

1.3. Desarrollos de Taylor

Si f es derivable en el intervalo abierto Ω y f' también lo es, se dice que f es dos veces derivable en Ω y la derivada de f' se denota por $f^{(2)} := f''$, y por inducción, si f es $n-1$ veces derivable y $f^{(n-1)}$ es derivable, se dice que f es n veces derivable y llamamos $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$. f es de clase $\mathcal{C}^n$ en Ω si existe $f^{(n)}$ y es continua, y es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω si es de clase $\mathcal{C}^n$ para todo n. Por ejemplo, los polinomios son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, de modo que conociendo el valor de P y sus derivadas en un cierto punto es posible reconstruir el polinomio. **Demostración:** Dividiendo $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ por $(x-x_0)^n$, se tiene que $P(x) = b_n(x-x_0)^n + Q_{n-1}(x)$, donde $Q_{n-1}(x)$ es de grado $n-1$. Por inducción se obtiene $P(x) = b_n(x-x_0)^n + \cdots + b_0$, pero entonces $b_0 = P(x_0)$, y derivando sucesivamente:

$$\begin{array}{rclrcl}
P(x) &=& b_n(x-x_0)^n + \cdots + b_0 & P(x_0) = b_0 & & \\
P'(x) &=& nb_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots + b_1 & P'(x_0) = b_1 & b_1 =& \frac{P'(x_0)}{1!} \\
P''(x) &=& n(n-1)(x-x_0)^{n-2} + \cdots + 2b_2 & P''(x_0) = 2b_2 & b_2 =& \frac{P''(x_0)}{2!} \\
P'''(x) &=& n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3} + \cdots + 6b_3 & P'''(x_0) = 6b_3 & b_3 =& \frac{P'''(x_0)}{3!} \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots \\
P^{(n)}(x) &=& n!b_n & P^{(n)}(x_0) = n!b_n & b_n =& \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}
\end{array}$$

Con lo que $P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Llamamos **polinomio de Taylor** de f de grado n en x_0 a la siguiente expresión:

$$P_n(f,x;x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

El **resto del polinomio** es la diferencia entre la función y su polinomio de Taylor: $R_n(x;x_0) := f(x) - P_n(f,x;x_0)$. Una función $g : (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida en un entorno reducido de x_0 es una **«o» pequeña** de $|x-x_0|^n$, escrito $g(x) = o(|x-x_0|^n)$ o informalmente $o(x-x_0)^n$, si $\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|^n} = 0$. Así, si $g(x) = o(|x-x_0|^n)$ entonces $g(x) = o(|x-x_0|^k)$ para $1 \le k \le n$. **Demostración:** $\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|^n}|x-x_0|^{n-k} = 0 \cdot 0 = 0$.

1.3.1. Resto de Landau y desarrollos limitados

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es $n-1$ veces derivable en (a, b) y existe la derivada n-ésima en $x_0 \in (a, b)$ entonces $f(x) = P_n(f, x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$. **Demostración:** Aplicando la regla de L'Hospital $n-1$ veces y la definición de derivada n-ésima de f en x_0,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = \cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots 2(x - x_0)}$$

pero, al derivar $n-1$ veces $P_n(x)$, desaparecen todos los términos salvo los de grado n y $n-1$, por lo que $P_n^{(n-1)}(x) = (n-1)!\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + n!\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$. Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(n)}(x_0)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A una expresión como la de arriba la llamamos **desarrollo limitado** de f de grado n en x_0, y cuando existe es única. **Demostración:** Supongamos que una expresión admite dos desarrollos limitados de orden n en x_0: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o(|x - x_0|^n) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n + o(|x - x_0|^n)$. Igualando, $(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)(x - x_0) + \cdots + (b_n - a_n)(x - x_0)^n = o(|x - x_0|^n)$. Tomando límites cuando x tiende a x_0, $a_0 = b_0$. Eliminando este sumando, dividiendo por $(x - x_0)$ y tomando límites de nuevo, queda $a_1 = b_1$, y así sucesivamente.

Para calcular desarrollos limitados, muy útiles en el cálculo de límites de cocientes sustituyendo a la regla de L'Hospital, sean f y g funciones de clase $\mathcal{C}^n$ definidas en entornos de x_0 e y_0, respectivamente, y derivables n veces en dichos puntos:

1. Si $x_0 = y_0$, $(f + g)(x) = P_n(f, x; x_0) + P_n(g, x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$.
2. Si $x_0 = y_0$, $(fg)(x) = P_n(f, x; x_0)P_n(g, x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$. Aquí hay que agrupar los términos convenientemente teniendo en cuenta que los términos de grado mayor a n son $o(|x - x_0|^n)$.
3. Si $x_0 = y_0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{P_n(f,x;x_0)}{P_n(g,x;x_0)} + o(|x - x_0|^n)$. Aquí hay que considerar la *fracción continua* de polinomios, que es igual que la división normal de polinomios pero tomando los términos de menor grado del divisor y el dividendo en vez de los de mayor grado, y terminando cuando el grado del término resultante del cociente sea mayor que n, pues a partir de ahí el resto de términos son $o(|x - x_0|^n)$.
4. Si $f(x) = P_n(f, x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$, el desarrollo limitado de orden $n-1$ de f' es $f'(x) = (P_n(f, x; x_0))' + o(|x - x_0|^{n-1})$.
5. Si $f(x_0) = y_0$ y la función $g \circ f$ está definida en un entorno de x_0 en el que admite un desarrollo limitado en x_0, este se obtiene sustituyendo el desarrollo de f en el de g y agrupando los términos convenientemente tanto en la parte polinómica de grado menor o igual a n como en la del resto de Landau.

Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es n veces derivable en (a,b), siendo $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

1. Si n es par, f presenta un máximo relativo en x_0 si $f^{(n)}(x_0) < 0$ o un mínimo relativo si $f^{(n)}(x_0) > 0$.
Como todas las derivadas en x_0 hasta $n-1$ son 0,

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \implies \\ \implies \tfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \tfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \end{gathered}$$

Si $f^{(n)}(x_0) < 0$, existe un entorno de x_0 en el que el segundo miembro de la igualdad es estrictamente negativo y por tanto también el primero, pero como n es par, esto significa que $f(x) - f(x_0) < 0$, de modo que $f(x) < f(x_0)$ y hay un máximo relativo. El caso en que $f^{(n)}(x_0) > 0$ es análogo.

2. Si n es impar, f no tiene extremo relativo en x_0.
Llegamos a que existe un entorno de x_0 en el que el primer miembro de la igualdad es estrictamente positivo o estrictamente negativo, pero cualquiera de las situaciones significa que la función es estrictamente creciente a ambos lados o estrictamente decreciente a ambos lados.

1.3.2. Fórmula de Taylor con resto de Lagrange

Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es n veces derivable en (a,b) y sean $x_0, x \in (a,b)$, entonces existe c estrictamente entre x y x_0 tal que

$$R_{n-1}(x;x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Demostración: Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a

$$F(t) := f(x) - \left(f(t) + \frac{1}{1!} f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-1} \right)$$

y $G(t) := (x-t)^n$ entre x_0 y x, existe c estrictamente entre x_0 y x tal que $(F(x_0)-F(x))G'(c) = (G(x_0) - G(x))F'(c)$, pero $F(x) = 0$, $F(x_0) = R_{n-1}(x;x_0)$, $G(x) = 0$ y $G(x_0) = (x-x_0)^n$, luego $R_{n-1}(x;x_0)G'(c) = (x-x_0)^n F'(c)$. Ahora calculamos las derivadas de G y F. Se tiene que $G'(t) = -n(x-t)^{n-1}$, $G'(c) = -n(x-c)^{n-1}$ y

$$\begin{gathered} F'(t) = -\left(f'(t) + \tfrac{1}{1!} f''(t)(x-t) + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \right) + \\ + \left(\tfrac{1}{1!} f'(t) + \cdots + \tfrac{n-1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} \right) = -\tfrac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \end{gathered}$$

luego $F'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}$, y sustituyendo,

$$R_{n-1}(x;x_0) = \frac{F'(c)}{G'(c)}(x-x_0)^n = \frac{-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}}{-n(x-c)^{n-1}}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Esta forma de expresar el resto se llama **forma de Lagrange**, y a veces se escribe $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ para $0 < \theta < 1$, de modo que si $x_0 = 0$ entonces $c = \theta x$.

Las funciones **analíticas** son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en las que f coincide con su polinomio de Taylor «infinito». No todas las de clase $\mathcal{C}^\infty$ cumplen esta propiedad, pues, por ejemplo, la función $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ cumple que $g^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto su **polinomio de Mac-Laurin** (polinomio de Taylor en $x_0 = 0$, $P_n(g, x; 0)$) es nulo.

Desarrollos de Taylor importantes:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n$.
   Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$, luego $f^{(n)}(0) = 1$.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) + \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n$.

$$\begin{array}{rclcl@{\qquad}rcl}
f(x) & = & \sin x & & & f(0) & = & 0 \\
f'(x) & = & \cos x & = & \sin(x + \pi/2) & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & -\sin x & = & \sin(x + \pi) & f''(0) & = & 0 \\
f'''(x) & = & -\cos x & = & \sin(x + 3\pi/2) & f'''(0) & = & -1 \\
f^{(4)}(x) & = & \sin x & = & \sin(x + 2\pi) & f^{(4)}(0) & = & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
f^{(n)}(x) & & & = & \sin(x + n\pi/2) & f^{(n)}(0) & = & \sin(n\pi/2)
\end{array}$$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right) + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!} x^n$.

4. $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n} x^n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n} x^n$.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
f(x) & = & \log(1 + x) & f(0) & = & 0 \\
f'(x) & = & (1 + x)^{-1} & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & (-1)(1 + x)^{-2} & f''(0) & = & -1 = -1! \\
f'''(x) & = & (-1)(-2)(1 + x)^{-3} & f'''(0) & = & (-1)(-2) = 2! \\
\vdots & & & & & \\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n} & f^{(n)} & = & (-1)^{n-1}(n - 1)!
\end{array}$$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n-1} x^{n-1} + \binom{\alpha}{n} \frac{(1+\theta x)^\alpha}{(1+\theta x)^n} x^n = 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k\right) + \binom{\alpha}{n} \frac{(1+\theta x)^\alpha}{(1+\theta x)^n} x^n$, donde $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
f(x) & = & (1 + x)^\alpha & f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & \alpha(1 + x)^{\alpha-1} & f'(0) & = & \alpha \\
f''(x) & = & \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2} & f''(0) & = & \alpha(\alpha - 1) \\
\vdots & & & & & \\
f^{(n)}(x) & = & \alpha \cdots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) & = & \alpha \cdots (\alpha - n + 1)
\end{array}$$

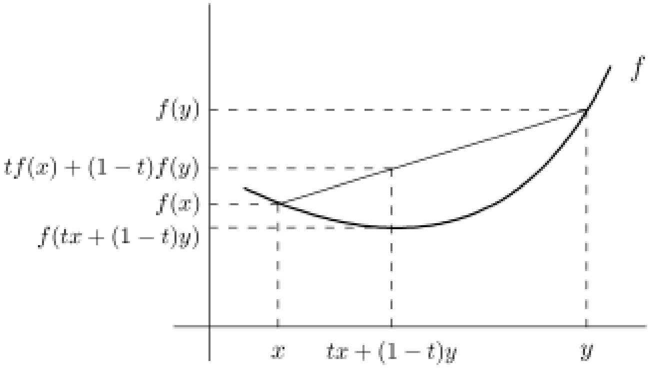

Figura 1.1: Interpretación geométrica de la convexidad.

1.4. Funciones convexas

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **convexa** en el intervalo I si $\forall x, y \in I, t \in [0,1], f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$, y es **cóncava** en I si $\forall x, y \in I, t \in [0,1], f((1-t)x+ty) \geq (1-t)f(x)+tf(y)$. Geométricamente, f es convexa en I si para cualesquiera $x, y \in I$, la secante que une los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de la función en el intervalo $[x, y]$, y cóncava si está por debajo.

La pendiente de la recta secante que pasa por $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ se denota $p_x(y) := \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Así, f es convexa en I si y sólo si para cualesquiera $a, x, b \in I$ con $a < x < b$ se verifica $p_a(x) \leq p_b(x)$. **Demostración:** Sea $x = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$ con $t \in (0,1)$, entonces $x - a = t(b-a)$ y $x - b = (1-t)(a-b)$, y se tiene que

$$\begin{aligned}
p_a(x) \leq p_b(x) \quad &\iff \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \\
&\iff \quad (f(x)-f(a))(x-b) \geq (f(x)-f(b))(x-a) \\
&\iff \quad f(x)(a-b) \geq f(a)(x-b) - f(b)(x-a) \\
&\iff \quad f(x)(a-b) \geq f(a)(1-t)(a-b) - f(b)t(b-a) \\
&\iff \quad f(x) \leq f(a)(1-t) + f(b)t
\end{aligned}$$

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa en un intervalo I, entonces:

1. Para cada $a \in I$, $p_a : I \to \mathbb{R}$ es creciente.
   Sean $a < x < y \in I$,

   $$p_a(x) \leq p_a(y) \iff \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \tfrac{f(y)-f(a)}{y-a} \iff$$
   $$\iff f(x) - f(a) \leq \tfrac{f(y)-f(a)}{y-a}(x-a) \iff f(x) \leq f(a) + \tfrac{f(y)-f(a)}{y-a}(x-a)$$

   lo cual es cierto por ser f convexa.

2. **Lema de las tres pendientes:** $\forall a, x, b \in I, (a < x < b \implies p_a(x) \leq p_a(b) \leq p_b(x)$.
   Como p_a y p_b son crecientes, $p_a(x) \leq p_a(b) = p_b(a) \leq p_b(x)$.

3. f es continua en los puntos del interior del intervalo.
Sea x_0 un punto interior de I y $x', x \in I$ con $x' < x_0 < x$. Por lo anterior, $p_{x_0}(x') = p_{x'}(x_0) \leq p_x(x_0) = p_{x_0}(x)$, luego p_{x_0} es creciente y por tanto existe $\alpha := \lim_{x \to x_0^+} p_{x_0}(x)$. Por otra parte, $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0)$, y tomando límites,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0^+} (x - x_0) = f(x_0) + \alpha \cdot 0 = f(x_0)$$

lo que prueba la continuidad por la derecha de f en x_0. Podemos probar la continuidad por la izquierda de manera análoga.

Como **teorema**, sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto I, entonces

$$f \text{ es convexa en } I \iff f' \text{ es creciente en } I \iff \forall x_0, x \in I, f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

La última condición significa que para cada punto de I, la gráfica de f está por encima de la tangente en dicho punto.

Convexidad local: $f : I \to \mathbb{R}$ y derivable en $x_0 \in I$ es **convexa** en x_0 si $\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \cap I, f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, y es **cóncava** en x_0 si $\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \cap I, f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Decimos que x_0 es un **punto de inflexión** si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces $x < x_0$ implica $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ mientras que $x > x_0$ implica $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (o al revés). Puede no darse ninguna de las tres situaciones como en el punto $x_0 = 0$ en $f(x) = x^2 \sin(1/x)$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto I es convexa en I si y sólo si es convexa para cada $x \in I$.

Como $f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava si y sólo si $-f$ es convexa, todas las proposiciones sobre funciones convexas se pueden aplicar a funciones cóncavas adaptándolas convenientemente.

1.5. Representación gráfica de funciones

Sea $y = f(x)$. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de $f(x)$ si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, sea el límite por la izquierda o por la derecha. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de $f(x)$ si $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, sea cuando x tiende a $-\infty$ o a $+\infty$. Finalmente, la recta $y = mx + b$ es una **asíntota oblicua** de $f(x)$ si $\lim_{x \to \infty}(f(x) - (mx + b)) = 0$, y entonces podemos calcular m y b como $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - mx)$.

Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **par** o **simétrica respecto del eje de coordenadas** si $f(-x) = f(x) \forall x \in D$, y es **impar** o **simétrica respecto del origen de coordenadas** si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$.

Capítulo 2

Cálculo integral

Una **partición** de $[a,b]$ es una colección de puntos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, y llamamos $\mathcal{P}([a,b])$ al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$. Dada $\pi \equiv (t_0 < \ldots < t_n) \in \mathcal{P}([a,b])$, escribimos $M_i := \sup\{f(t)\}_{t\in[t_{i-1},t_i]}$ y $m_i := \inf\{f(t)\}_{t\in[t_{i-1},t_i]}$, y llamamos **suma superior** y **suma inferior** de f correspondiente a π, respectivamente, a

$$S(f,\pi) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{y} \quad s(f,\pi) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

Obviamente $s(f,\pi) \leq S(f,\pi)$ para cualquier $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$. Dadas $\pi, \pi' \in \mathcal{P}([a,b])$, decimos que π' es **más fina** que π ($\pi' \succ \pi$) si $\pi' \supseteq \pi$, y denotamos $\pi \vee \pi' := \pi \cup \pi'$.

Si $\pi \preceq \pi'$ entonces $s(f,\pi) \leq s(f,\pi')$ y $S(f,\pi) \geq S(f,\pi')$. **Demostración:** Supongamos que π' tiene un punto más que π, con $\pi \equiv t_0 < \ldots < t_n$ y $\pi' \equiv t_0 < \ldots < t_{k-1} < p < t_k < \ldots < t_n$. Entonces $s(f,\pi) = \sum_{i\neq k} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{i\neq k} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k((t_k - p) + (p - t_{k-1})) \leq \sum_{i\neq k} m_i(t_i - t_{i-1}) + \inf\{f(t)\}_{t\in[t_{k-1},p]}(p - t_{k-1}) + \inf\{f(t)\}_{t\in[p,t_k]}(t_k - p) = s(f,\pi')$. La segunda afirmación se hace de forma análoga.

Dadas $\pi, \pi' \in \mathcal{P}([a,b])$, $s(f,\pi) \leq S(f,\pi')$. **Demostración:** Como $\pi, \pi' \prec \pi \vee \pi'$, entonces $s(f,\pi) \leq s(f,\pi \vee \pi') \leq S(f,\pi \vee \pi') \leq S(f,\pi')$.

Llamamos pues **integral inferior** e **integral superior** (**de Darboux**), respectivamente, a

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\{s(f,\pi)\}_{\pi\in\mathcal{P}([a,b])} \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f := \inf\{S(f,\pi)\}_{\pi\in\mathcal{P}([a,b])}$$

Decimos que f es **integrable Riemann** en $[a,b]$, escrito $f \in \mathcal{R}[a,b]$, si las integrales superior e inferior coinciden y llamamos **integral Riemann** de f en $[a,b]$, escrito $\int_a^b f$, a este valor. Definimos, para $a < b$, $\int_b^a f := -\int_a^b f$, e $\int_a^a f = 0$.

2.1. Caracterización

Como **teorema**, dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\pi \in \mathcal{P}([a,b]) : S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$.

$\Longrightarrow$] Dado $\varepsilon > 0$, como $\int_a^b f = \text{ínf}\{S(f,\pi)\}_{\pi\in\mathcal{P}([a,b])}$, existe $\pi_1 \in \mathcal{P}([a,b])$ con $0 \leq S(f,\pi_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$, y análogamente existe $\pi_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ con $0 \leq \int_a^b f - s(f,\pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $\pi \coloneqq \pi_1 \vee \pi_2$ cumple ambas desigualdades, pues $S(f,\pi) \leq S(f,\pi_1)$ y $s(f,\pi) \geq s(f,\pi_2)$, y sumándolas obtenemos $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$.

$\Longleftarrow$] Dado $\varepsilon > 0$ y $\pi_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ con $S(f,\pi_\varepsilon) - s(f,\pi_\varepsilon) < \varepsilon$, por la definición de integral superior e inferior, $0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,\pi_\varepsilon) - s(f,\pi_\varepsilon) \leq \varepsilon$, lo que para ε arbitrario implica que las integrales superior e inferior coinciden.

$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \exists! \alpha \in \mathbb{R} : \forall \pi \in \mathcal{P}([a,b]), s(f,\pi) \leq \alpha \leq S(f,\pi)$.

$\Longrightarrow$] Sea $\alpha \coloneqq \int_a^b f$, para toda $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$, $s(f,\pi) \leq \alpha \leq S(f,\pi)$. Si existiera $\beta \neq \alpha$ que cumpliera la condición, como $\alpha = \sup\{s(f,\pi)\}_{\pi\in\mathcal{P}([a,b])}$ se tendría $\beta > \alpha$, pero análogamente que $\beta < \alpha$.#

$\Longleftarrow$] Supongamos que existe un α que verifica la condición pero $f \notin \mathcal{R}[a,b]$. Entonces para cualquier $\pi \in \mathcal{R}[a,b]$ se tiene $s(f,\pi) \leq \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f \leq S(f,\pi)$, por lo que existen infinitos números reales que verifican la condición y por tanto α no es único.#

Otro **teorema** importante es que las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas son integrables en $[a,b]$, y además, dados $z_{k,n} \in [a + \frac{b-a}{n}(k-1), a + \frac{b-a}{n}k]$ cualesquiera,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(z_{k,n}) = \int_a^b f$$

Demostración: Dado $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$, $S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$. Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, como f es continua en $[a,b]$ también es uniformemente continua, luego existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\frac{b-a}{n_0} < \delta$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $\pi_n = (a < a + \frac{b-a}{n} < \ldots < a + n\frac{b-a}{n} = b) \in \mathcal{P}([a,b])$ y $t_{k,n} = a + k\frac{b-a}{n}$, y tenemos que para $n \geq n_0$ es $t_{k,n} - t_{k-1,n} < \delta$ y por tanto $M_{k,n} - m_{k,n} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Entonces

$$S(f,\pi_{n_0}) - s(f,\pi_{n_0}) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_{i,n_0} - t_{i-1,n_0}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

De aquí que f es integrable. Pero entonces existe un único $\alpha = \int_a^b f$ tal que para $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$ es $s(f,\pi) \leq \alpha \leq S(f,\pi)$, y en particular, $s(f,\pi_n) \leq \alpha \leq S(f,\pi_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea ahora $z_{k,n} \in [a + \frac{b-a}{n}(k-1), a + \frac{b-a}{n}k]$ para $1 \leq k \leq n$ arbitrario y $a_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(z_{k,n})$. Por definición, $s(f,\pi_n) \leq a_n \leq S(f,\pi_n)$, y dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, de modo que $S(f,\pi_n) - \alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $S(f,\pi_n) - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$, y entonces $|a_n - \alpha| \leq |a_n - S(f,\pi_n)| + |S(f,\pi_n) - \alpha| < \varepsilon$.

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona y acotada entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$. **Demostración:** Dada $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$, $S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$, y dado $\varepsilon > 0$, si por ejemplo f es monótona creciente y $f(a) < f(b)$, dada $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$ con $t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, se tiene que $M_i = f(t_i)$, $m_i = f(t_{i-1})$ y $S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \varepsilon$.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es acotada y $f\in\mathcal{R}[c,b]\forall c>a$ entonces $f\in\mathcal{R}[a,b]$. **Demostración:** Sea $A>0$ con $|f(x)|\leq A\forall x\in[a,b]$, entonces $-A\leq\inf\{f(x)\}_{x\in[a,b]}\leq\sup\{f(x)\}_{x\in[a,b]}\leq A$. Dado $\varepsilon>0$, sea $c\in(a,b]$ con $c-a<\frac{\varepsilon}{4A}$ y $\pi\in\mathcal{P}([c,b])$ con $S(f,\pi)-s(f,\pi)<\frac{\varepsilon}{2}$, si tomamos $\pi'\in\mathcal{P}([a,b])$ resultado de añadir a π el intervalo $[a,c]$ con $M_1=\sup\{f(x)\}_{x\in[a,c]}$ y $m_1=\inf\{f(x)\}_{x\in[a,c]}$, entonces $S(f,\pi')-s(f,\pi')=M_1(c-a)+S(f,\pi)-m_1(c-a)-s(f,\pi)\leq 2A(c-a)+S(f,\pi)-s(f,\pi)\leq 2A(c-a)+\frac{\varepsilon}{2}<2A\frac{\varepsilon}{4A}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

2.2. Sumas de Riemann

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $\pi\equiv(t_0<\ldots<t_n)\in\mathcal{P}([a,b])$, llamamos **suma de Riemann** asociada a la partición π y los puntos $z_i\in[t_{i-1},t_i]$ a

$$S(f,\pi,z_i):=\sum_{i=1}^{n}f(z_i)(t_i-t_{i-1})$$

f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si existe $A\in\mathbb{R}$ tal que para $\varepsilon>0$ existe $\pi_0\in\mathcal{P}([a,b])$ tal que si $\pi_0\prec\pi$, para cualesquiera $z_i\in[t_{i-1},t_i]$ se cumple $|A-S(f,\pi,z_i)|<\varepsilon$, y entonces $A=\int_a^b f$.

Un conjunto $A\subseteq\mathbb{R}$ tiene **medida cero** si para cada $\varepsilon>0$ existe una sucesión I_n de intervalos cerrados y acotados con $A\subseteq\bigcup_n I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\text{long}(I_n)\leq\varepsilon$, donde $\text{long}([a,b]):=b-a$. Si A tiene medida cero y $B\subseteq A$ entonces B tiene medida cero, y si A es numerable tiene medida cero tomando, para cada $\varepsilon>0$, la sucesión con $I_n=\{x_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},x_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\}$, pues $\sum_n\text{long}(I_n)=\sum_n\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$.

El **teorema de Lebesgue** afirma que dada una función acotada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, si $D(f)\subseteq[a,b]$ es el conjunto de puntos en los que f no es continua, entonces $f\in\mathcal{R}[a,b]$ si y sólo si $D(f)$ tiene medida cero.

Sea $\pi=(t_0<\ldots<t_n)\in\mathcal{P}([a,b])$, llamamos **norma** de π a $\|\pi\|:=\text{máx}\{t_i-t_{i-1}\}_{1\leq i\leq n}$. Como **teorema**, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es acotada, son equivalentes:

1. $f\in\mathcal{R}[a,b]$ y $A=\int_a^b f$.
2. $\exists A\in\mathbb{R}:\forall\varepsilon>0,\exists\pi_0\in\mathcal{P}([a,b]):\forall\pi\succ\pi_0,|A-S(f,\pi,z_i)|<\varepsilon$ para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.
3. $\exists A\in\mathbb{R}:\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall\pi:\|\pi\|<\delta,|A-S(f,\pi,z_i)|<\varepsilon$ para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.

2.3. Propiedades

Linealidad $\mathcal{R}[a,b]$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y el operador $\int_a^b$ es lineal.

Sean $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$, dado $\varepsilon>0$ existe $\pi_0\in\mathcal{P}([a,b])$ tal que para $\pi_0\prec\pi$ se tienen $\left|\int_a^b f-S(f,\pi,z_i)\right|,\left|\int_a^b g-S(g,\pi,z_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, por lo que

$$\left|\int_a^b f+\int_a^b g-S(f+g,\pi,z_i)\right|<\varepsilon$$

con lo que $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. Sea ahora $k \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$ y $\pi_0 \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que para $\pi_0 \prec \pi$ se cumple $\left|\int_a^b f - S(f,\pi,z_i)\right| < \frac{\varepsilon}{1+|k|}$, entonces

$$\left|k\int_a^b f - S(kf,\pi,z_i)\right| = |k|\left|\int_a^b f - S(f,\pi,z_i)\right| < |k|\frac{\varepsilon}{1+|k|} < \varepsilon$$

luego $\int_a^b kf = k\int_a^b f$.

Producto Si $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann, también lo es fg.
Por el teorema de Lebesgue, si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, tendrá medida cero, pero $D(f^2) \subseteq D(f)$, pues si f es continua en un punto también lo es f^2. Entonces $D(f^2)$ tiene medida cero, lo que nos da la integrabilidad de f^2. El caso general se sigue de que $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$ por la linealidad.

Monotonía Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, y en particular si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.
Para $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$ se tiene $s(f,\pi) \leq s(g,\pi)$, y tomando supremos, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Valor medio Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
Por el teorema de Weierstrass, existen $c_1, c_2 \in [a,b]$ con $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a,b]$, y por la monotonía de la integral, $f(c_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq f(c_2)$. Entonces, aplicando la propiedad de los valores intermedios, existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Valor absoluto Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
Dado $\varepsilon > 0$, sea $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$ con $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$, si M_i' y m_i' son el supremo y el ínfimo, respectivamente, de $|f|$ en $[t_{i-1}, t_i]$, y M_i y m_i son los de f, entonces para $z, w \in [t_{i-1}, t_i]$ se tiene que $||f(z)| - |f(w)|| \leq |f(z) - f(w)| \leq M_i - m_i$, por lo que $\sup\{|f(z)| - |f(w)|\}_{z,w \in [t_{i-1},t_i]} = M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$ y entonces $S(|f|,\pi) - s(|f|,\pi) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$, con lo que $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Ahora bien, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, con lo que $\int_a^b -|f| = -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$.

Aditividad respecto de intervalo Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $c \in [a,b]$, $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c], \mathcal{R}[c,b]$, y además $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
Basta refinar una partición $\pi \in \mathcal{P}([a,b])$ añadiéndole el punto c.

Discontinuidades Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ coincide con f salvo en un número finito de puntos, entonces $g \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\int_a^b f = \int_a^b g$.
Supongamos que cambian en un punto $c \in [a,b]$, y basta probar que $h \coloneqq g - f$ es integrable. Ahora bien, h es nula en todos los puntos salvo en c, por lo que dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\pi \in \mathcal{P}[a,b]$ con $t_i - t_{i-1} \leq \frac{\varepsilon}{h(c)}$ y entonces $S(f,\pi,z_i) \leq \varepsilon$.

2.4. El Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$, llamamos **integral indefinida** de f a la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $F(x) \coloneqq \int_a^x f$. El **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO** afirma que, si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y F

es su integral indefinida, entonces F es continua en $[a,b]$ y si f es continua en $c\in(a,b)$ entonces F es derivable en c y $F'(c)=f(c)$, y esto también ocurre con los extremos del intervalo y las correspondientes derivadas laterales.

Demostración: Sea $M:=\sup\{|f(x)|\}_{x\in[a,b]}$, por las propiedades de la integral, $|F(x)-F(y)|=\left|\int_x^y f\right|\leq M|x-y|$, por lo que F es uniformemente continua en $[a,b]$, pues dado $\varepsilon>0$ y $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$, si $|x-y|\leq\delta$ entonces $|F(x)-F(y)|\leq\varepsilon$. Supongamos ahora que f es continua en $c\in(a,b)$. Sea $h>0$ con $c+h\in[a,b]$,

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)\right|=\left|\frac{\int_a^{c+h}f-\int_a^c f}{h}-\frac{1}{h}\int_c^{c+h}f(c)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h}(f-f(c))\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{h}\sup\{|f(t)-f(c)|\}_{t\in[c,c+h]}|h|=\sup\{|f(t)-f(c)|\}_{t\in[c,c+h]}$$

y como f es continua en c, el último miembro de la desigualdad tiende a 0 cuando h tiende a 0, y lo mismo ocurre para $h<0$. Por tanto $F'(c)=\lim_{h\to0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}=f(c)$.

Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, decimos que $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una **primitiva** de f en $[a,b]$ si g es derivable en (a,b) y para todo $x\in(a,b)$ se tiene $g'(x)=f(x)$. Por el teorema fundamental del cálculo, toda f continua en $[a,b]$ tiene primitivas en $[a,b]$, donde la integral indefinida es una de ellas y el resto se obtienen sumando a esta una constante. **Demostración:** Si F es la integral indefinida de f y g es otra primitiva de f en $[a,b]$, entonces $(F-g)'(x)=F'(x)-g'(x)=f(x)-f(x)=0$ para $x\in(a,b)$, y por el teorema del valor medio, $F-g$ es constante.

Como **teorema**, la **fórmula de Barrow** afirma que si $f\in\mathcal{R}[a,b]$ admite una primitiva g en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f=g(b)-g(a)$. **Demostración:** Dado $\varepsilon>0$ existe $\pi\equiv(t_0<\dots<t_n)\in\mathcal{P}([a,b])$ tal que para cualesquiera $z_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\left|\int_a^b f-S(f,\pi,z_i)\right|<\varepsilon$. Por el teorema del valor medio aplicado a g en $[t_{i-1},t_i]$, existe $z_i\in[t_{i-1},t_i]$ con $g(t_i)-g(t_{i-1})=g'(z_i)(t_i-t_{i-1})=f(z_i)(t_i-t_{i-1})$, luego $g(b)-g(a)=\sum_{i=1}^n(g(t_i)-g(t_{i-1}))=\sum_{i=1}^n g'(z_i)(t_i-t_{i-1})=S(f,\pi,z_i)$. Por tanto $\left|\int_a^b f-(g(b)-g(a))\right|<\varepsilon$.

2.5. Cálculo de primitivas

- $\int u^n u'\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\forall n\neq-1$; $\int\frac{u'}{u}dx=\ln|u|+C\forall u\neq0$.
- $\int e^u u'\,dx=e^u+C$; $\int a^u u'\,dx=\frac{a^u}{\ln a}+C\forall a>0,a\neq1$.
- $\int\cos u\,u'\,dx=\sin u+C$; $\int\sin u\,u'\,dx=-\cos u+C$.
- $\int\cosh u\,u'\,dx=\sinh u+C$; $\int\sinh u\,u'\,dx=\cosh u+C$.
- $\int\frac{u'}{\sin^2u}dx=\int\frac{u'}{\sinh^2u}dx=-\cot u+C$; $\int\frac{u'}{\cos^2u}dx=\int\frac{u'}{\cosh^2u}dx=\tan u+C$.
- $\int\frac{u'}{1+u^2}dx=\arctan u+C$; $\int\frac{u'}{1-u^2}dx=\arg\tanh u+C$.
- $\int\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx=\arcsin u+C=-\arccos u+C'$.
- $\int\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}dx=\arg\sinh u+C$; $\int\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}dx=\arg\cosh u+C$.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\arg\cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \arg\tanh(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

2.5.1. Integración por partes

Sean $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ con primitivas respectivas F y G,

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG$$

lo que suele escribirse como $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. **Demostración:** $(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$, y por la fórmula de Barrow, $\int_a^b Fg + \int_a^b fG = \int_a^b (Fg + fG) = F(b)G(b) - F(a)G(a)$, luego $\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG$.

2.5.2. Cambio de variable

Como **teorema**, sea $\varphi : [c,d] \to [a,b] \in \mathcal{C}^1[c,d]$ con $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'$$

Demostración: Si F es una primitiva de f en $[a,b]$ entonces $F \circ \varphi$ lo es de $(f \circ \varphi)\varphi'$ en $[c,d]$, luego $\int_a^b f = F(b) - F(a) = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c) = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'$.

Esto da sentido a la notación de $\int_a^b f(x)dx \coloneqq \int_a^b f$, porque entonces si $x = \varphi(t)$ es fácil recordar $dx = \varphi'(t)dt$ y entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

2.5.3. Funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y queremos resolver $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$. Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$ hacemos $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ para que el grado del numerador sea menor que el del denominador. Entonces descomponemos en fracciones simples.

Descomponemos $Q(x)$ como $Q(x) = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i} \prod_{i=1}^s (x^2 + p_i x + q_i)^{n_i}$, donde $q_i > \frac{p_i^2}{4}$ para que los factores sean irreducibles. Entonces (si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$) podemos expresar la fracción como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

Resolvemos los $A_{k,i}$, $M_{k,i}$, $N_{k,i}$ y nos queda hallar la integral de cada sumando como sigue:

- $\int \frac{A}{x-a}dx = A \ln|x - a| + C$.

- $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$, donde $n \in 2, 3, \ldots$.
- $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + c^2\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{c}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{c}\right) + C$, donde $c = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

2.5.4. Funciones que contienen $\cos x$ y $\sin x$

En general, haremos $t = \tan\frac{x}{2}$ y entonces

$$\cos x = \frac{\cos(2\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} \overset{\text{div. } \cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{\sin(2\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} \overset{\text{div. } \cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$x = 2\arctan t \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Si la función es de la forma $f(x) = g(\sin x)\cos x$, siendo g una función racional, hacemos $t = \sin x$, y si es $f(x) = g(\cos x)\sin x$ hacemos $t = \cos x$. Si es $f(x) = g(\tan x)$ hacemos $\tan x = t$, y podemos llegar a esta situación cuando al sustituir $\sin x$ por $\cos x \tan x$ quedan solo potencias pares de $\cos x$, y hacemos $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$.

En el caso $f(x) = \cos^n x \sin^m x$, si n es impar hacemos $t = \sin x$, si m es impar, $t = \cos x$, y si ambos son pares, usamos $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ y $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ para «reducir el grado».

2.5.5. Funciones de la forma $f(e^x)$

Hacemos el cambio $t = e^x$ y $dt = e^x dx$, y esto también sirve para el coseno y seno hiperbólicos (cosh y sinh).

2.5.6. Funciones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

Llamamos $d := \frac{ac-b^2}{a}$ y se tiene $ax^2+2bx+c = a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + d$. Hacemos entonces el cambio de variable $t = x + \frac{b}{a}$ y a continuación:

- Si $a > 0$ y $d > 0$ hacemos $at^2 = d\tan^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = \sqrt{d\tan^2 u + d} = \sqrt{d}\sqrt{1+\tan^2 u} = \sqrt{d}\sqrt{\sec^2 u} = \sqrt{d}\sec u$ y $dt = \sqrt{\frac{d}{a}}\sec^2 u\, du$. También podemos hacer $at^2 = d\sinh^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = \sqrt{d\sinh^2 u + d} = \sqrt{d}\sqrt{\sinh^2 u + 1} = \sqrt{d}\cosh u$ y $dt = \sqrt{\frac{d}{a}}\cosh u\, du$.
- Si $a > 0$ y $d < 0$ hacemos $at^2 = -d\sec^2 u$ y entonces $\sqrt{-d\sec^2 u + d} = \sqrt{-d}\sqrt{\sec^2 u + 1} = \sqrt{-d}\tan u$ y $dt = \sqrt{-\frac{d}{a}}\sec u \tan u\, du$. También podemos hacer $at^2 = -d\cosh^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = \sqrt{-d\cosh^2 u + d} = \sqrt{-d}\sqrt{\cosh^2 u - 1} = \sqrt{-d}\sinh u$ y $dt = \sqrt{-\frac{d}{a}}\sinh u\, du$.
- Si $a < 0$ y $d > 0$ hacemos $at^2 = -d\sin^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = \sqrt{-d\sin^2 u + d} = \sqrt{d}\sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{d}\cos u$ y $dt = \sqrt{-\frac{d}{a}}\cos u\, du$.

2.6. Aplicaciones

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, si $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se define el **área encerrada** por las gráficas de f y g como $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1[a, b]$, la **longitud de la curva** $C = \{(x, f(x))\}_{x\in[a,b]}$ viene dada por $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. **Interpretación:** Sea $\pi \equiv (a = x_0 < \ldots < x_n = b) \in \mathcal{P}([a, b])$, sea $P_i = (x_i, f(x_i))$, una aproximación a la curva es

$$\sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 + 1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}(x_i - x_{i-1})$$

con $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, que converge a $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ cuando $\|\pi\|$ tiende a 0.

Llamamos **sólido de revolución** al cuerpo obtenido al girar una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alrededor del eje horizontal. Su **volumen** viene dado por $V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$, y su **área** (lateral) por $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. **Interpretación:** Sea f continua y positiva. Para hallar el volumen tomamos $\pi \equiv (x_0 < \ldots < x_n) \in \mathcal{P}([a, b])$ y aproximamos el volumen por secciones cilíndricas con radio $f(x_i)$ y altura $x_i - x_{i-1}$, con lo que su radio viene dado por $\pi f(x_i)^2(x_i - x_{i-1})$. Sumando obtenemos $\sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2(x_i - x_{i-1})$, que converge a $\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$. El área se obtiene con un razonamiento similar al usado para la longitud de la curva.

El **volumen** del sólido resultante de girar alrededor del eje vertical la superficie encerrada por las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = f(x)$ es $2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$.

2.7. Integrales impropias

Una función $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ $(b \leq +\infty)$ es **localmente integrable** si $\forall u \in [a, b), f|_{[a,u]} \in \mathcal{R}[a, b]$. Si además existe $\lim_{u\to b^-} \int_a^u f(x)\, dx$ diremos que la **integral impropia** $\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente y su valor es este límite. Análogamente, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ $(a \geq -\infty)$ es localmente integrable si $\forall u \in (a, b], f|_{[u,b]} \in \mathcal{R}[a, b]$, y si además existe $\lim_{u\to a^+} \int_u^b f(x)\, dx$ diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente y su valor es este límite. En ambos casos, si el límite es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral **diverge**, y si no existe el límite diremos que no existe la integral impropia.

Como **teorema**, sea f localmente integrable en $[a, b)$, f es integrable en sentido impropio en $[a, b)$ si y sólo si lo es en $[c, b)$ y entonces $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$. **Demostración:** Si $a < c < t < b$, $\int_a^t f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^t f(x)\, dx$, por lo que existe $\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$ si y sólo si existe $\lim_{t\to b^-} \int_c^t f(x)\, dx$, lo que demuestra el teorema.

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a \geq -\infty, b \leq +\infty)$ es integrable Riemann en cada subintervalo cerrado de (a, b), diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente si para un $c \in (a, b)$ son convergentes $\int_a^c f(x)\, dx$ y $\int_c^b f(x)\, dx$, y definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

El valor de esta integral no depende de c. La **condición de Cauchy** afirma que, dada $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, existe $\lim_{x\to b^-} f(x)$ si y sólo si $\forall\varepsilon > 0, \exists b_0 \in (a,b) : \forall x_1, x_2 \in (b_0, b) : x_1 < x_2, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Como **teorema** y consecuencia de lo anterior, si f es localmente integrable en $[a,b)$, la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente si y sólo si $\forall\varepsilon > 0, \exists b_0 \in (a,b) : \forall x_1, x_2 \in (b_0,b) : x_1 < x_2, \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$. Más **teoremas**:

- Si f y g son integrables en sentido impropio en $[a,b)$, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ es integrable en sentido impropio con

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

  Basta tomar límites cuando x tiende a b por la izquierda en la linealidad de integrales propias.

- Si f y g son continuas en $[a,b)$ y g es derivable con derivada continua, sea F una primitiva de f, la siguiente igualdad se cumple si existen dos de los tres límites e integrales impropias en ella:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\,dt$$

  Basta tomar límites en la identidad dada por la regla de integración por partes.

2.7.1. Integrales no negativas

Como **teorema**, si f es localmente integrable en $[a,b)$ y no negativa, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si y sólo si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ está acotada.

$\Longrightarrow$] Como f es no negativa, F es creciente, y si no estuviese acotada sería $\lim_{x\to b^-} F(x) = +\infty$ y la integral impropia divergería.

$\Longleftarrow$] Si F está acotada existe $\lim_{x\to b^-} F(x) = \sup\{F(x)\}_{x\in[a,b)}$, luego la integral impropia converge.

Otro **teorema** es que si f y g son localmente integrables en $[a,b)$ y no negativas y existe $K \in \mathbb{R}$ y V entorno de b tal que $x \in V \implies f(x) \le Kg(x)$, entonces si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, también lo hace $\int_a^b f(t)\,dt$, por lo que si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge también lo hace $\int_a^b g(t)\,dt$ (y divergir también). **Demostración:** La convergencia depende sólo del comportamiento de las funciones en un entorno, y en este $\int_a^x f(t)\,dt \le K\int_a^x g(t)\,dt$.

De aquí que si f y g son localmente integrables en $[a,b)$ y no negativas con $A := \lim_{x\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)}$, entonces:

- Si $A \neq 0, \infty$, ambas integrales tienen el mismo carácter.
  Dado $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < A$, existe a_ε tal que si $a_\varepsilon \le x \le b$ se tiene $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \varepsilon$, con lo que $A - \varepsilon \le \frac{f(x)}{g(x)} \le A + \varepsilon$, luego para $x \in [a_\varepsilon, b)$ tenemos $(A-\varepsilon)g(x) \le f(x) \le (A+\varepsilon)g(x)$, y no hay más que aplicar el teorema anterior.

- Si $A = 0$, la convergencia de $\int_a^b g(t)\,dt$ implica la de $\int_a^b f(t)\,dt$.
  Como antes, obtenemos $f(x) \leq \varepsilon g(x)$ y aplicamos el teorema anterior.

- Si $A = \infty$, la convergencia de $\int_a^b f(t)\,dt$ implica la de $\int_a^b g(t)\,dt$.

Otro **teorema** es que si f es no negativa y localmente integrable en $(0,1]$ y existe $\alpha < 1$ con $\lim_{t\to 0^+} f(t)t^\alpha$ finito, $\int_0^1 f(t)\,dt$ es convergente, mientras que si existe $\alpha \geq 1$ con $\lim_{t\to 0^+} f(t)t^\alpha$ no nulo, la integral diverge. **Demostración:** $\lim_{t\to 0^+} f(t)t^\alpha = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)}$, y si $\alpha < 1$, la integral $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ es convergente y, por lo anterior, $\int_0^1 f(t)\,dt$ también. De que $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge si $t \geq 1$ se desprende la última afirmación.

Como **teorema**, si f es no negativa y localmente integrable en $[a, +\infty)$, si existe $\alpha > 1$ con $\lim_{t\to\infty} f(t)t^\alpha$ finito, $\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge, mientras que si existe $\alpha \leq 1$ con $\lim_{t\to\infty} f(t)t^\alpha$ no nulo, la integral diverge.

2.7.2. Convergencia absoluta

Sea f localmente integrable en $[a,b)$, decimos que la integral impropia de f en $[a,b)$ es **absolutamente convergente** si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ es convergente. La convergencia absoluta implica la convergencia. **Demostración:** Por el criterio de convergencia de Cauchy aplicado a $|f(t)|$, dado $\varepsilon > 0$ existe $b_0 \in (a,b)$ tal que si $b_0 < x_1 < x_2 < b$ entonces $\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt < \varepsilon$. Entonces $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$, lo que implica que $\int_a^b f(t)\,dt$ es convergente.

Como **teorema**, si f y g son funciones continuas en $[a,b)$ y g tiene derivada continua, si $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ está acotada superiormente por K, $\int_a^x |g'(t)|\,dt$ está acotada superiormente por k y $\lim_{t\to b^-} g(t) = 0$, entonces $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ es convergente. **Demostración:** Basta probar la existencia de $\lim_{x\to b^-} F(x)g(x)$ y de $\lim_{x\to b^-} \int_a^x F(t)g'(t)\,dt$. Las condiciones $F(x) \leq K$ y $\lim_{t\to b^-} g(t) = 0$ aseguran que el primer límite es 0, y las dos primeras ($F(x) \leq K$ y $\int_a^x |g'(t)|dt \leq k$) implican que $\int_a^x F(t)g'(t)\,dt$ es absolutamente convergente, pues

$$\int_a^x |F(t)||g'(t)|\,dt \leq Kk$$

El **criterio de Dirichlet** afirma que si f y g son continuas en $[a,b)$ y g tiene derivada continua, si existe $K \in \mathbb{R}$ con $\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leq K$ y g es monótona decreciente con $\lim_{t\to b^-} g(t) = 0$, la integral impropia $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ es convergente. **Demostración:** Como g es decreciente, $g'(t) \leq 0$, luego $\int_a^x |g'(t)|\,dt = -\int_a^x g'(t)\,dt = g(a) - g(x) \overset{g(x)\geq 0}{\leq} g(a)$, y se tienen entonces todas las condiciones del teorema anterior.

Capítulo 3

Series de potencias

En este capítulo, K representa indistintamente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una **serie de potencias** en torno a $z_0 \in K$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de K y $z \in K$. Llamamos **radio de convergencia** de la serie al valor

$$R := \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

donde $\limsup_n a_n$ es el supremo de las subsucesiones convergentes de (a_n). Se entiende que si $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ se toma $R = \infty$, y si $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ se toma $R = 0$. Por el criterio de la raíz, o el del cociente, la serie converge sólo en la bola abierta $B(z_0; R)$, llamada **disco de convergencia**.

La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente** en un conjunto A a una función f si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall z \in A, m \geq n_0; |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon$. El **criterio de Cauchy de convergencia uniforme** afirma que una serie de funciones es uniformemente convergente en A si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall z \in A, n_0 < p \leq q; \left|\sum_{n=p}^{q} f_n(z)\right| < \varepsilon$, y el **criterio de Weierstrass** afirma que si existe una serie de términos positivos $\sum_n b_n$ convergente con $|f_n(z)| \leq b_n \forall z \in A, n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A.

La serie de potencias $\sum_n a_n (z - z_0)^n$ con radio de convergencia R converge absoluta y uniformemente en la bola cerrada $B[z_0; r]$ para cada $r < R$. Si $\sum_n f_n$ converge uniformemente en A y las f_n son continuas en A, entonces f es continua en A.

El **criterio de Abel** afirma que, dada una serie de potencias $\sum_n a_n z^n$, si para $z = c$ la serie converge, también converge uniformemente en $[0, c]$.

Como **teorema**, si $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para $z \in B(0; R)$, siendo R el radio de convergencia de la serie, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, obtenida derivando formalmente la anterior, tiene radio de convergencia R, y de hecho esta serie converge a la derivada de f. Entonces f es infinitamente derivable en el disco de convergencia y $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para $n \geq 0$.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia R, entonces la función F dada por $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ tiene radio de convergencia R y es primitiva de f.

3.1. Funciones elementales

La **exponencial compleja** se define como

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Podemos ver que su radio de convergencia es infinito, $(e^z)' = e^z$ y $e^z e^w = e^{z+w}$. Además, $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y es estrictamente creciente con

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Definimos el **seno** y el **coseno**, respectivamente, como

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Vemos que $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, luego $\sin x = \mathrm{Im} e^{ix}$ y $\cos x = \mathrm{Re} e^{ix}$. Como $|e^{iy}|^2 = 1$, se tiene $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Además:

- $\sin' x = \cos x$ y $\cos' x = -\sin x$.
- $\sin(-x) = -\sin x$ y $\cos(-x) = \cos x$.
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ y $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

El conjunto $\{x > 0 \mid \cos x = 0\}$ es no vacío y de hecho tiene un primer elemento, que se denota $\frac{\pi}{2}$. Además, las funciones seno y coseno son 2π-periódicas, y $\psi : [0, 2\pi) \to S$ dada por $\psi(t) = e^{it}$ es una biyección de $[0, 2\pi)$ sobre la circunferencia unidad $S \subseteq \mathbb{C}$. Tenemos $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ y $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Por la biyección ψ, y como dado $z \in \mathbb{C}$, $\frac{z}{|z|} \in S$, existe un único $t \in [0, 2\pi)$, llamado **argumento principal** de z, tal que $z = |z|(\cos t + i \sin t) = |z|e^{it}$. Entonces:

- $z_1 z_2 = |z_1|e^{it_1}|z_2|e^{it_2} = |z_1||z_2|e^{i(t_1+t_2)}$.
- $\frac{1}{z} = z^{-1} = |z|^{-1}e^{-it}$.
- $z^n = |z|^n e^{int}$.
- Los n complejos de la forma $w = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{2k\pi+t}{n}}$ con $k = 0, \dots, n-1$ son los únicos con $w^n = z$ para $z = |z|e^{it}$.