Funciones de variable compleja

Bibliografía:

- Curso de Análisis Complejo, Francisco Javier Pérez González (2004), Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada.

Capítulo 1

Teoría de Cauchy elemental

1.1. Teorema de Cauchy en dominios estrellados

Teorema de Cauchy-Goursat: Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\Delta(a,b,c) := \{\mu a + \lambda b + \gamma c \mid \mu + \lambda + \gamma = 1; \mu, \lambda, \gamma \geq 0\} \subseteq \Omega$, entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f = 0.$$

Demostración: Sean $\gamma := [a,b,c,a]$, $\Delta := \Delta(a,b,c)$, $a' := \frac{b+c}{2}$, $b' := \frac{a+c}{2}$, $c' := \frac{a+b}{2}$ e

$$I := \int_\gamma f = \int_{[a,c',b',a]} f + \int_{[c',b,a',c']} f + \int_{[a',c,b',a']} f + \int_{[b',c',a',b']} f.$$

Sean $J_1, \dots, J_4$ las cuatro integrales a la derecha, $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ las correspondientes curvas y $T_1, \dots, T_4$ los triángulos definidos por estas curvas. Entonces:

- Si $|J_k| := \text{máx}_i |J_i|$, $|I| \leq 4|J_k|$.
- $\ell(\sigma_1) = \cdots = \ell(\sigma_4) = \frac{1}{2}\ell(\gamma)$.

  $\ell(\sigma_1) = |a - c'| + |c' - b'| + |b' - a| = \left|a - \frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a+b}{2} - \frac{a+c}{2}\right| + \left|\frac{a+c}{2} - a\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right| + \left|\frac{b-c}{2}\right| + \left|\frac{c-a}{2}\right| = \frac{1}{2}(|a-b| + |b-c| + |c-a|) = \frac{1}{2}\ell(\gamma)$. Para el resto de curvas se hace algo análogo.
- Sea $d.(S)$ el diámetro de $S \subseteq \Omega$, $D(T_1) = \cdots = D(T_4) = \frac{1}{2}D(\Delta)$.

  Para T_1, $F(x) := \frac{x+a}{2}$ es una biyección de Δ a T_1, pues si $x := ra + sb + tc$, $F(x) := \frac{ra+sb+tc+a}{2} = \frac{ra+sb+tc+(r+s+t)a}{2} = ra + s\frac{a+b}{2} + t\frac{a+c}{2} = ra + sc' + tb'$. Entonces $D(T_1) = \sup_{x,y \in T_1} |x - y| = \sup_{x,y \in \Delta} |F(x) - F(y)| = \sup_{x,y\in\Delta} \left|\frac{x+a}{2} - \frac{y+a}{2}\right| = \sup_{x,y\in\Delta} \frac{|x+y|}{2} = \frac{1}{2}D(\Delta)$. Para los otros triángulos se hace de forma análoga, usando para T_4 la biyección $F(x) := \frac{a+b+c-x}{2}$.

Sean entonces $I_1 := \text{máx}_i |J_i|$, $\gamma_1 := [a_1, b_1, c_1, a_1]$ la curva correspondiente a I_1 y $\Delta_1 := \Delta(a_1, b_1, c_1)$, con lo que $|I| \leq 4|I_1|$, $\ell(\gamma_1) = \frac{1}{2}\ell(\gamma)$ y $D(\Delta_1) = \frac{1}{2}\Delta$. Repitiendo este proceso se obtienen sucesiones donde $|I| \leq 4^n|I_n|$, $\ell(\gamma_n) = \frac{1}{2^n}\ell(\gamma)$ y $D(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}D(\Delta)$. Al ser $(\Delta_n)_n$

una sucesión decreciente de cerrados no vacíos donde el diámetro tiende a 0, existe un único $\alpha \in \bigcap_n \Delta_n$. Sea $p(z) := f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha)$ una función polinómica y por tanto con primitiva, entonces

$$I_n = \int_{\gamma_n} f = \int_{\gamma_n} f - \int_{\gamma_n} p = \int_{\gamma_n} (f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z-\alpha))dz.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como f es derivable en α existe $\delta > 0$ tal que $D(\alpha, \delta) \subseteq \Omega$ y $\forall z \in D(\alpha, \delta), |f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z-\alpha)| \leq \varepsilon |z-\alpha|$. Dado n con $D(\Delta_n) < \delta$, $\Delta_n \subseteq D(\alpha, \delta)$ y

$$\begin{aligned} |I| \leq 4^n |I_n| \leq 4^n \ell(\gamma_n) \max_{z\in\gamma_n^*} |f(z) - f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha)| \leq 4^n \ell(\gamma_n) \varepsilon \max_{z\in\gamma_n^*} |z-\alpha| \leq \\ \leq 4^n \ell(\gamma_n) \varepsilon D(\Delta_n) = 4^n \varepsilon \frac{1}{2^n} \ell(\gamma) \frac{1}{2^n} D(\Delta) = \varepsilon \ell(\gamma) D(\Delta), \end{aligned}$$

y haciendo tender $\varepsilon \to 0$ se obtiene el resultado.

Teorema de Cauchy para dominios estrellados: Sea Ω un dominio estrellado en z_0 y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f$$

es una primitiva de f en Ω. **Demostración:** Sean $a \in \Omega$, $\rho > 0$ y $z \in D(a, \rho)$, como $[a, z] \subseteq \Omega$, $[z_0, b] \subseteq \Omega$ para todo $b \in [a, z]$ y $\Delta(z_0, a, z) \subseteq \Omega$. Por el teorema de Cauchy-Goursat,

$$0 = \int_{[z_0, z, a, z_0]} f = \int_{[z_0, z]} f + \int_{[z, a]} f + \int_{[a, z_0]} f = F(z) - F(a) - \int_{[z,a]} f,$$

luego si $z \neq a$,

$$\frac{F(z) - F(a) - f(a)(z-a)}{z-a} = \frac{\int_{[z,a]} f - f(a)(z-a)}{z-a} = \frac{\int_{[z,a]} (f(w) - f(a))dw}{z-a},$$

con lo que

$$\left| \frac{F(z) - F(a)}{z-a} - f(a) \right| = \left| \frac{\int_{[z,a]} (f(w) - f(a))dw}{z-a} \right| \leq \max_{w\in[a,z]^*} |f(w) - f(a)|.$$

Como f es continua en a, haciendo $z \to a$ este máximo tiende a 0 y se obtiene $F'(a) = f(a)$.

Teorema de Cauchy-Goursat «light»: Sean Ω un abierto, $\alpha \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}(\Omega), \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$, y $\Delta(a, b, c) \subseteq \Omega$, entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f = 0.$$

Demostración:

1. Si $\alpha \notin \Delta(a, b, c)$, podemos tomar como abierto $\Omega \setminus \{\alpha\}$ y aplicar Cauchy-Goursat.

2. Si α es un vértice, por ejemplo, $\alpha = a$, sean $c_\rho := (1-\rho)a + \rho b$ y $b_\rho := (1-\rho)a + \rho c$ para $\rho \in [0, 1]$, entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f = \int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f + \int_{[c_\rho,b,c,c_\rho]} + \int_{[c,b_\rho,c_\rho,c]} f = \int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f,$$

dado que los otros dos sumandos se anulan por el caso anterior. Entonces

$$\left|\int_{[a,b,c,a]} f\right| = \left|\int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f\right| \leq \max_{z\in\Delta(a,b,c)} |f(z)|\rho(|a-b|+|b-c|+|c-a|),$$

y haciendo tender $\rho \to 0$ se obtiene el resultado.

3. Si α está en un lado del triángulo, por ejemplo $\alpha \subseteq [a,b]$, entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f = \int_{[a,\alpha,c,a]} f + \int_{[c,\alpha,b,c]} f,$$

y cada sumando se anula por el caso anterior.

4. Si α está en el interior del triángulo, sea p el punto en la intersección de la recta $a\alpha$ con $[b,c]$, entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f = \int_{[a,b,p,a]} f + \int_{[a,p,c,a]} f$$

y cada sumando se anula por el caso anterior.

De aquí se obtiene el **teorema de Cauchy para dominios estrellados «light»**, que afirma que si Ω es un dominio estrellado en z_0, $\alpha \in \Omega$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega), \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$ entonces

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f$$

es una primitiva de f en Ω.

1.2. Funciones holomorfas y analíticas

Fórmula de Cauchy para una circunferencia: Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D}(a,R) \subseteq \Omega$, para $z \in D(a,R)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Demostración: Sean $\rho > R$ con $D(a,\rho) \subseteq \Omega$, $z \in D(a,R)$ y

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Como f es derivable en z, g es continua en $D(a,\rho)$, y es derivable en $D(a,\rho) \setminus \{z\}$, luego por el teorema de Cauchy para dominios estrellados «light»,

$$0 = \int_{C(a,R)} g = \int_{C(a,R)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_{C(a,R)} \frac{1}{w-z}dw.$$

Ahora bien, para $w \in C(a,R)^*$, como $|z-a| < R$, $\frac{|z-a|}{|w-a|} < 1$ y

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_n \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_n \frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}}.$$

Pero tomando

$$\alpha_n := \frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} = \frac{1}{R}\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n,$$

como $\frac{|z-a|}{R} < 1$, la serie $\sum_n \alpha_n$ converge y, por el criterio de Weierstrass, la serie anterior converge uniformemente con $w \in C(a,R)^*$. Por tanto

$$\int_{C(a,R)} \frac{1}{w-z}dw = \int_{C(a,R)} \sum_n \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}dw = \sum_n (z-a)^n \int_{C(a,R)} \frac{1}{(w-a)^{n+1}}dw,$$

pero $w \mapsto \frac{1}{(w-a)^{n+1}}$ tiene primitiva $\frac{1}{-n}(w-a)^{-n}$ para $n \neq 0$, luego se anula en $n > 0$ y

$$\int_{C(a,R)} \frac{1}{w-z}dw = \int_{C(a,R)} \frac{1}{w-a}dw = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a+Re^{it}-a}Rie^{it}dt = \int_{-\pi}^{\pi} idt = 2\pi i.$$

Sustituyendo,

$$\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i f(z) = 0,$$

y despejando se obtiene el resultado.

Teorema de Taylor: Sean $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D}(a,R) \subsetneq \Omega$ y

$$c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$f(z) := \sum_n c_n(z-a)^n$$

para todo $z \in D(a,R)$. En particular, f es analítica en Ω, $f^{(n)}(a) = n!c_n$ para $n \in \mathbb{N}$ y los c_n no dependen del radio escogido. **Demostración:** Sea $z \in D(a,R)$,

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a-(z-a)} = \frac{f(w)}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{f(w)}{w-a}\sum_n\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_n \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n.$$

Como

$$\frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}}|z-a|^n \leq \alpha_n := \frac{\max_{w\in C(a,R)^*}|f(w)|}{R}\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n$$

y $\sum_n \alpha_n$ es convergente por ser una serie geométrica de razón menor que 1, por el criterio de Weierstrass, la serie converge uniformemente en $C(a,R)^*$ y, por la fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \sum_n \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n dw =$$

$$= \sum_n \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n.$$

Teorema de Morera: Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si y sólo si

$$\int_{[a,b,c,a]} f = 0$$

para todo $\Delta(a,b,c) \subseteq \Omega$.

$\Longrightarrow$] Teorema de Cauchy-Goursat.

$\Longleftarrow$] Sea $D(z_0, R) \subseteq \Omega$ un dominio estrellado, como la integral de f sobre cualquier triángulo contenido en el disco es 0, por la demostración del teorema de Cauchy para dominios estrellados,

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f$$

es una primitiva de f en $D(z_0, R)$, esto es, $\forall z \in D(z_0, R), F'(z) = f(z)$, luego f es la derivada de una función holomorfa en $D(z_0, R)$ y en particular f es derivable en z_0, pero como $z_0 \in \Omega$ es arbitrario, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

1.3. Propiedades de funciones holomorfas

Desigualdad de Cauchy: Sean $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D}(a, R) \subseteq \Omega$, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!} \leq \frac{\max_{w \in C(a,R)^*} |f(w)|}{R^k}.$$

En efecto, tomando módulos sobre la fórmula de la derivada del teorema de Taylor,

$$\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!} = \frac{1}{2\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in C(a,R)^*} \left| \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} \right| 2\pi R = \frac{1}{R^k} \max_{w \in C(a,R)^*} |f(w)|.$$

Teorema de Liouville: Toda función entera acotada es constante. **Demostración:** Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ para la que existe $M > 0$ con $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema de Taylor, para $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

pero por la desigualdad de Cauchy, para todo $R > 0$,

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{\max_{w \in C(a,R)^*} |f(w)|}{R^n} \leq \frac{M}{R^n},$$

y tomando límites cuando $R \to +\infty$ tenemos que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$ y por tanto $f(z) = f(0)$ para todo z.

Teorema fundamental del álgebra: $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, esto es, todo polinomio complejo de grado n es la forma $p(x) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$ con $\alpha, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. **Demostración:** Basta ver que todo polinomio complejo no constante tiene alguna raíz, pues el resto se obtiene por inducción. Sea p un polinomio de este tipo y supongamos que $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) \neq 0$. Sea $f(z) := \frac{1}{p(z)}$, f es entera por serlo p y, como $\lim_{z \to +\infty} f(z) = 0$, f es acotada y, por el teorema de Liouville, constante, y por tanto p es constante.#

La imagen de una función entera no constante es densa en el plano. **Demostración:** Supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$, con lo que existe $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(\alpha, \rho) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$, esto es, $|f(z) - \alpha| > \rho$ para $z \in \mathbb{C}$. Sea entonces $g(z) := \frac{1}{f(z)-\alpha}$ una función entera, como $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-\alpha|} < \frac{1}{\rho}$, g es acotada, luego g es constante y por tanto f también.#

Teorema de extensión de Riemann: Sean Ω un abierto, $\alpha \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$, f tiene una extensión holomorfa a Ω si y sólo si tiene una extensión continua a Ω, si y sólo si está acotada en un entorno reducido de α, si y sólo si $\lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = 0$.

$1 \implies 2 \implies 3 \implies 4]$ Obvio.

$4 \implies 1]$ Sea

$$F(z) := \begin{cases} (z-\alpha)^2 f(z) & \text{si } z \neq \alpha, \\ 0 & \text{si } z = \alpha. \end{cases}$$

F es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$, pero

$$F'(\alpha) = \lim_{z \to \alpha} \frac{F(z) - F(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{z \to \alpha} (z-\alpha) f(z) = 0,$$

luego $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $D(\alpha, \rho) \subseteq \Omega$, por el teorema de Taylor, sea $c_n := \frac{F^{(n)}(\alpha)}{n!}$, como $c_0 = c_1 = 0$, para $z \in D(\alpha, \rho)$,

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n = (z-\alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-\alpha)^{n-2} = (z-\alpha)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-\alpha)^n,$$

luego si $z \in D(\alpha, \rho) \setminus \{\alpha\}$, $f(z) = \sum_n c_{n+2}(z-\alpha)^n$. Entonces

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq \alpha, \\ c_2 & \text{si } z = \alpha \end{cases}$$

es una extensión de f expresable como suma de potencias, y por tanto derivable, en $D(\alpha, \rho)$, por lo que es derivable en α y por tanto una extensión holomorfa de f en Ω.

Teorema de convergencia de Weierstrass: Sean $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$, si $(f_n)_n$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω y $f(z) := \lim_n f_n(z)$ para $z \in \Omega$, entonces f es holomorfa en Ω si y sólo si para cada $k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en subconjuntos compactos de Ω.

$\Longleftarrow]$ Como el límite uniforme de funciones continuas es continuo, f es continua en Ω. Sea $\Delta(a,b,c) \subseteq \Omega$, como $[a,b,c,a]^*$ es compacto y la integral respeta la convergencia uniforme,

$$\int_{[a,b,c,a]} f = \lim_n \int_{[a,b,c,a]} f_n = 0$$

por el teorema de Cauchy-Goursat, pues las f_n son holomorfas. Como el triángulo es arbitrario, por el teorema de Morera, f es holomorfa en Ω.

$\Longrightarrow]$ Sean $K \subseteq \Omega$ compacto, $0 < \rho < d(K, \partial\Omega)$ y $H := \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, K) \leq \rho\}$, con lo que H es compacto y $K \subseteq H \subseteq \Omega$. Sean $a \in K$ y $k \in \mathbb{N}$, aplicando la desigualdad de Cauchy a $f_n - f$ en $\overline{D}(a, \rho) \subseteq H$,

$$|f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{\rho^k} \max_{w \in C(a,\rho)^*} |f_n(w) - f(w)| \leq \frac{k!}{\rho^k} \max_{w \in H} |f_n(w) - f(w)|.$$

Por la convergencia uniforme de $(f_n)_n$ en H, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq 0$ es $\max_{w \in H} |f_n(w) - f(w)| \leq \varepsilon$, luego $|f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{\rho^k}\varepsilon$ para $n \geq n_0$ y $a \in K$ y por tanto $\max_{a \in K} |f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{\rho^k}\varepsilon$, de donde $(f_n^{(k)})_n \to f^{(k)}$.

Capítulo 2

Ceros de funciones holomorfas

Sean Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $Z(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$, $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω si y sólo si $\exists a \in \Omega : \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(a) = 0$, si y sólo si f es idénticamente nula.

$1 \implies 2]$ Sean $a \in Z(f)' \cap \Omega$ y $D(a, \rho) \subseteq \Omega$, existe $\{a_n\}_n \subseteq D(a, \rho) \setminus \{a\}$ con $a_n \to a$. Por el teorema de Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

para $c_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, y queremos ver que todos los c_n son nulos por inducción. Para $n = 0$, $c_0 = f(a) = \lim_n f(a_n) = 0$. Si $c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0$, tenemos

$$\frac{f(z)}{(z-a)^k} = c_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k}.$$

Sea $g_k(z) := \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k}$ una función holomorfa en $D(a, \rho)$ con $g_k(a) = 0$, entonces $\frac{f(z)}{(z-a)^k} = c_k + g_k(z)$, pero $c_k + g_k(a_n) = 0$ y, tomando límites, $0 = c_k + \lim_n g_k(a_n) = c_k + g_k(a) = c_k$.

$2 \implies 3]$ Sea $A := \{z \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(z) = 0\} \neq \emptyset$, pues $a \in A$. Como

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{z \in \Omega \mid f^{(k)}(z) = 0\},$$

A es intersección de cerrados y por tanto cerrado, ahora bien, sean $z \in A$ y $D(z, \rho) \subseteq \Omega$, por el teorema de Taylor, para $w \in D(z, \rho)$,

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{n!} (w-z)^n = 0,$$

luego $f^{(k)}(w) = 0$ y $D(z, \rho) \subseteq A$, con lo que A es abierto. Por conexión, $A = \Omega$.

$3 \implies 1]$ Trivial.

El **principio de identidad para funciones holomorfas** afirma que si dos funciones holomorfas en un dominio Ω coinciden en un subconjunto de Ω con algún punto de acumulación en Ω, entonces coinciden en todo Ω. En efecto, sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $h = f - g$, si f y g coinciden en un subconjunto de este tipo, entonces $Z(h)' \cap \Omega \neq \emptyset$ y por tanto h es idénticamente nula, luego $f = g$. También, si Ω es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula, entonces todo punto de $Z(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ es aislado y $Z(f)$ es numerable.

Sean $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ con $f(a) = 0$, decimos que f tiene en a un **cero** de **orden** $\min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}$. Una función f holomorfa no idénticamente nula en en un dominio Ω tiene un cero de orden $k \geq 1$ en $a \in \Omega$ si y sólo si $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : (g(a) \neq 0 \wedge \forall z \in \Omega, f(z) = (z-a)^k g(z))$.

$\Longrightarrow$] Sea $D(a, \rho) \subseteq \Omega$, existe $(c_n)_{n \geq k}$ con $c_k \neq 0$ y $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n$ para cada $z \in D(a, \rho)$. Entonces

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^k} & \text{si } z \neq a, \\ c_k & \text{si } z = a \end{cases}$$

es holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ y cumple $g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k}$ para todo $z \in D(a, \rho)$, luego es holomorfa en $D(a, \rho)$ y, por tanto en a. Así, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^k g(z)$ para $z \in \Omega$.

$\Longleftarrow$] Sea $D(a, \rho) \subseteq \Omega$, por el teorema de Taylor existe $(\alpha_n)_n$ tal que $g(z) = \sum_n \alpha_n (z-a)^n$ para $z \in D(a, \rho)$, con $\alpha_0 = g(a) \neq 0$ y entonces $f(z) = \sum_n \alpha_n (z-a)^{n+k}$ y por tanto $f^{(q)}(a) = 0$ para $q \in \{0, \dots, k-1\}$ y $f^{(k)}(a) = k! \alpha_0 \neq 0$.

Regla de L'Hôpital: Sean Ω un dominio, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ no idénticamente nulas y $a \in \Omega$ con $f(a) = g(a) = 0$, entonces

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Demostración: Por lo anterior, existen $m, n \in \mathbb{N}$ y $F, G \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(z) = (z-a)^m F(z)$, $g(z) = (z-a)^n G(z)$ y $F(a), G(a) \neq 0$. Como el conjunto de puntos donde g se anula está formado por puntos aislados y $g(a) = 0$, debe haber un disco perforado alrededor de a donde g no se anula. También hay un disco perforado alrededor de a donde g' no se anula, por el mismo motivo si $g'(a) = 0$ o por continuidad si $g'(a) \neq 0$. Sea entonces $D(a, \rho) \subseteq \Omega$ con $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ para $z \in D(a, \rho) \setminus \{a\}$, para estos puntos,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^m F(z)}{(z-a)^n G(z)}, \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z-a)^{m-n} \frac{mF(z) + (z-a)F'(z)}{nG(z) + (z-a)G'(z)}.$$

Tomando límites cuando $z \to a$, si $m = n$, ambos límites valen $\frac{F(a)}{G(a)}$; si $m > n$, ambos son nulos, y si $m < n$, ambos son ∞.

Capítulo 3

Forma general del teorema de Cauchy

3.1. Índice de un punto respecto a una curva

Toda curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ tiene argumentos continuos, y si θ y θ' son argumentos continuos de γ, entonces $\theta(b) - \theta(a) = \theta'(b) - \theta'(a)$. **Demostración:** Sean $\rho := \text{mín}_{t\in[a,b]} |\gamma(t)| > 0$, $\delta > 0$ tal que si $|s-t| < \delta$ entonces $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \rho$, $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ una partición de $[a,b]$ tal que $t_k - t_{k-1} < \delta$ para cada k y $D_k := D(\gamma(t_k), \rho)$. Entonces $0 \notin D_k$ para ningún k y $\gamma(t) \in D_k$ para $t \in [t_{k-1}, t_k]$, luego los discos consecutivos se cortan. Como cada D_k es un dominio estrellado que no contiene al 0, existe un logaritmo holomorfo, y por tanto un argumento continuo, de la identidad, una función $A_k : D_k \to \mathbb{R}$ con $A_k(z) \in \text{Arg}z$ para cada $z \in D_k$. Sean ahora $\theta_k(t) := A_k(\gamma(t)) \in \text{Arg}(\gamma(t))$ y $m_k := \theta_k(t_k) - \theta_{k+1}(t_k)$, y definimos $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $\theta(t) := \theta_k(t) + \sum_{i=0}^{k-1} m_k$ para $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Entonces θ está bien definido, pues $\theta_{k+1}(t_k) + \sum_{i=0}^{k} m_k = \theta_{k+1}(t_k) + \sum_{i=0}^{k-1} m_k + \theta_k(t_k) - \theta_{k+1}(t_k) = \theta_k t_k + \sum_{i=0}^{k-1} m_k$, y es un argumento continuo de γ en $[a,b]$. Ahora bien, si θ y θ' son argumentos continuos de γ, $\theta - \theta'$ es una función continua en $[a,b]$ que toma valores múltiplos de 2π y por tanto debe ser constate, existiendo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(t) - \theta'(t) = 2k\pi$ para todo θ.

Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva, $z \notin \gamma^*$ y θ un argumento de $\gamma - z$, llamamos **variación del argumento** de z a lo largo de γ a $\theta(b) - \theta(a)$, e **índice** de γ respecto de z a

$$\text{Ind}_\gamma(z) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Si γ es una curva cerrada:

1. $\text{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ es continua, y por tanto constante en cada componente conexa del dominio.

   Sean $z_0 \notin \gamma^*$, $\rho := \text{mín}_{t\in[a,b]} |\gamma(t) - z_0| > 0$ y $z \in D(z_0, \rho) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, entonces $\gamma(t) - z = (\gamma(t) - z_0)\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}$, pero

$$\left|1 - \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(t) - z_0}\right| = \left|\frac{z - z_0}{\gamma(t) - z_0}\right| < 1,$$

luego para $t \in [a,b]$, $\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0} \in D(1,1)$, donde el argumento principal es continuo. Sea θ_0 un argumento de $\gamma - z_0$, tenemos que $\theta(t) := \theta_0(t) + \arg \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}$ es un argumento continuo de $\gamma(t) - z$, pero como $\theta(b) - \theta(a) = \theta_0(b) - \theta_0(a)$, entonces $\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_\gamma(z_0)$ para todo $z \in D(z_0, \rho)$. Así, Ind_γ es localmente constante y por tanto continua.

2. Ind_γ se anula en la única componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

   La componente existe y es única porque γ^*, al ser la imagen de un compacto por una función continua, es un compacto y existe R tal que $\gamma^* \subseteq D(0,R)$, con lo que $\mathbb{C} \setminus D(0,R) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, y al ser conexo, está en una componente conexa del conjunto. Sea ahora z_0 con $\text{Re}z_0 < -R$, es claro que $z_0 \notin \gamma^*$, luego $\text{Re}(\gamma(t) - z_0) > 0$ y, como $(\gamma - z_0)^*$ está en el semiplano de la derecha, el argumento principal es continuo. Como z_0 está en la componente conexa no acotada y el índice es constante en cada componente, para z en la componente no acotada, $\text{Ind}_\gamma z = \text{Ind}_\gamma z_0 = \frac{\arg(\gamma(b)-z_0) - \arg(\gamma(a)-z_0)}{2\pi} = 0$.

Sea γ un camino cerrado y $z \notin \gamma^*$, entonces

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw.$$

Demostración: Sea θ un argumento continuo de $\gamma - z$, entonces $\varphi(t) := \log|\gamma(t) - z| + i\theta(t)$ es un logaritmo continuo de $\gamma(t) - z$. Sea $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ una partición del dominio $[a,b]$ de γ tal que $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ es derivable. Entonces $\varphi_k := \varphi|_{[t_{k-1},t_k]}$ también lo es y $\varphi'_k(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ para $t \in (t_{k-1}, t_k)$. Integrando,

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z} dw = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt = \sum_{k=1}^n (\varphi_k(t_k) - \varphi_k(t_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) = \varphi(b) - \varphi(a) = \log|\gamma(b) - z| + i\theta(b) - \log|\gamma(a) - z| - i\theta(a) =$$

$$= i(\theta(b) - \theta(a)) = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(z).$$

3.2. Cadenas

Una **cadena** es una expresión de la forma $\Gamma := m_1\gamma_1 + \cdots + m_q\gamma_q$ donde los m_i son enteros y los γ_i son caminos. Llamamos **soporte** de Γ a $\Gamma^* := \bigcup_k \gamma_k^*$ y **longitud** de Γ a $\ell(\Gamma) := \sum_k |m_k| \ell(\gamma_k)$. Si $\Sigma := n_1\sigma_1 + \cdots + n_p\sigma_p$ es otra cadena, llamamos $\Gamma + \Sigma := m_1\gamma_1 + \cdots + m_q\gamma_q + k_1\sigma_1 + \cdots + k_p\sigma_p$. Dada $f : \Gamma^* \to \mathbb{C}$, llamamos

$$\int_\Gamma f := \sum_k m_k \int_{\gamma_k} f,$$

y claramente se cumplen la aditividad de la integral y la acotación básica

$$\left| \int_\Gamma f \right| \leq \ell(\Gamma) \max_{z \in \Gamma^*} |f(z)|.$$

Un **ciclo** es una cadena formada por caminos cerrados, y llamamos **índice** de $z \notin \Gamma^*$ respecto al ciclo Γ a $\text{Ind}_\Gamma(z) := \sum_k m_k \text{Ind}_{\gamma_k}(z)$. Entonces $\text{Ind}_\Gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \to \mathbb{Z}$ es continua y constante en cada componente conexa del dominio, y se anula en la componente conexa no acotada.

Dos cadenas Γ y Σ son **equivalentes** si para toda f continua en $\Gamma^* \cup \Sigma^*$ es

$$\int_\Gamma f = \int_\Sigma f.$$

Dado un abierto Ω, un ciclo Γ en Ω es **nulhomólogo** respecto de Ω si $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \text{Ind}_\Gamma(z) = 0$.

3.3. Forma general del teorema de Cauchy

Fórmula integral de Cauchy: Sean Γ un ciclo en Ω nulhomólogo respecto de Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$,

$$f(z)\text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Demostración: Primero vemos que si $F : \Omega \times \Gamma^* \to \mathbb{C}$ es continua, entonces $h : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) := \int_\Gamma F(z, w) dw$$

es continua en Ω. En efecto, sean $a \in \Omega$ y $(z_n)_n$ una sucesión de puntos de Ω convergente a a, entonces

$$|h(z_n) - h(a)| = \left| \int_\Gamma (F(z_n, w) - F(a, w)) dw \right| \leq \ell(\Gamma) \max_{w \in \Gamma^*} |F(z_n, w) - F(a, w)|.$$

Como $K := \{\{z_n\}_n \cup \{a\}\} \times \Gamma^*$ es compacto por ser producto de compactos, F es uniformemente continua en K. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z'|, |w - w'| < \delta$ entonces $|F(z, w) - F(z', w')| < \varepsilon$. Sea n_0 tal que, para $n \geq n_0$, $|z_n - z_0| < \delta$, entonces $|F(z_n, w) - F(a, w)| < \varepsilon$, luego $|h(z_n) - h(a)| \leq \ell(\Gamma)\varepsilon$ para $n \geq n_0$, con lo que $h(z_n) \to h(a)$ y, como a es arbitrario, h es continua en Ω.

Si además, para $w \in \Gamma^*$, $F_w : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $F_w(z) := F(z, w)$ es holomorfa en Ω, entonces $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Primero vemos que, dados $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$,

$$\int_\sigma \int_\gamma F(z, w) dw\, dz = \int_c^d \int_a^b F(\sigma(s), \gamma(t))\gamma'(t) dt\, \sigma'(s) ds =$$

$$= \int_a^b \int_c^d F(\sigma(s), \gamma(t))\sigma'(s) ds\, \gamma'(t) dt = \int_\gamma \int_\sigma F(z, w) dz\, dw,$$

y por linealidad esto también sirve cuando en vez de curvas tenemos cadenas. Entonces, para $\Delta(a, b, c) \subseteq \Omega$,

$$\int_{[a,b,c,a]} h = \int_{[a,b,c,a]} \int_\Gamma F(z, w) dw\, dz = \int_\Gamma \int_{[a,b,c,a]} F(z, w) dz\, dw = \int_\Gamma 0\, dw = 0,$$

pues $F_w(z) = F(z,w)$ es holomorfa en Ω. Como el triángulo era arbitrario, el teorema de Morera nos dice que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Sea ahora

$$F(z,w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } z \neq w, \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

F es continua en $\{(z,w) \in \Omega \times \Omega \mid z \neq w\}$. Para ver que también lo es en los puntos de la forma (a,a) con $a \in \Omega$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ con $D(a,\delta) \subseteq \Omega$ y $|f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$ para $z \in D(a,\delta)$, y queremos ver que, si $|z-a|, |w-a| < \delta$, entonces $|F(z,w) - F(a,a)| = |F(z,w) - f'(a)| < \varepsilon$. Para $z = w$, esto equivale a que $|f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$, que se cumple por hipótesis. Para $z \neq w$,

$$f(z) - f(w) = \int_{[w,z]} f'(u)du = \int_0^1 f'((1-t)w + tz)(z-w)dt,$$

luego

$$F(z,w) = \int_0^1 f'((1-t)w + tz)dt.$$

Entonces

$$|F(z,w) - f'(a)| = \left| \int_0^1 (f'((1-t)w+tz) - f'(a))dt \right| \leq \int_0^1 |f'((1-t)w+tz) - f'(a)|dt < \varepsilon,$$

pues $(1-t)w + tz \in [w,z]^* \subseteq D(a,\delta)$ y podemos usar esta acotación.

Ahora bien, fijado $w \in \Omega$, sea $F_w(z) \coloneqq F(w,z)$, es claro que $F_w \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{w\})$, y como $F_w \in \mathcal{C}(\Omega)$, por el teorema de extensión de Riemann, $F_w \in \mathcal{H}(\Omega)$, de donde $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ por el resultado de antes.

Sea $\Omega_0 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$, que es abierto por ser unión de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Como Γ es nulhomólogo respecto a Ω, $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega_0$ y por tanto $\Omega \cup \Omega_0 = \mathbb{C}$. Sea $F_0 : \Omega_0 \times \Gamma^* \to \mathbb{C}$ dada por $F_0(z,w) \coloneqq \frac{f(w)}{w-z}$. Esta está bien definida por ser Ω_0 y Γ^* disjuntos y por tanto $z \neq w$, y es continua. Fijado $w \in \Omega^*$, $F_{0w} \in \mathcal{H}(\Omega_0)$ por ser una función racional, con lo que por el resultado del principio,

$$h_0(z) := \int_\Gamma F_0(z,w)dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

es holomorfa en Ω. Sea ahora

$$\varphi(z) := \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Omega, \\ h_0(z) & \text{si } z \in \Omega_0, \end{cases}$$

para ver que φ está bien definida debemos ver que para $z \in \Omega \cap \Omega_0$, $h(z) = h_0(z)$, pero como $z \in \Omega_0$ y por tanto $z \notin \Gamma^*$,

$$h(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw =$$

$$= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\mathrm{Ind}_\Gamma(z)2\pi i \overset{\mathrm{Ind}_\gamma(z)=0}{=} h_0(z).$$

Como φ es holomorfa en Ω y Ω_0, es entera. Sea $R > 0$ tal que $\Gamma^* \subseteq D(0, R)$ y $|z| > R$, entonces z está en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y por tanto en Ω_0, luego $\varphi(z) = h_0(z)$, y como $\forall w \in \Gamma^*, |w - z| \geq |z| - R$,

$$|\varphi(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \right| \leq \ell(\Gamma) \max_{w \in \Gamma^*} \left| \frac{f(w)}{w - z} \right| \leq \ell(\Gamma) \frac{\max_{w \in \Gamma^*} |f(w)|}{|z| - R}.$$

Tomando límites cuando $z \to \infty$ queda $\lim_{z \to \infty} \varphi(z) = 0$, luego φ está acotada y, por el teorema de Liouville, es constante, y como el límite vale 0, es idénticamente nula. Entonces, para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$,

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(z) = h(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_\Gamma \frac{1}{w - z} dw = \\ = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z) 2\pi i, \end{aligned}$$

y despejando se obtiene la fórmula.

En estas condiciones, la **forma general del teorema de Cauchy** afirma que

$$\int_\Gamma f = 0.$$

En efecto, para $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$, aplicando la fórmula integral de Cauchy a $g(z) \coloneqq (z - a) f(z)$, como $g(a) = 0$,

$$0 = g(a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(w - a) f(w)}{w - a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f.$$

Dos ciclos Γ y Σ en un abierto Ω son **homológicamente equivalentes** respecto de Ω si $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_\Sigma(z)$. Ω es **homológicamente conexo** si todo ciclo en Ω es nulhomólogo respecto de Ω, si y sólo si es un abierto cuyo complemento no tiene componentes conexas acotadas.

$\Longleftarrow$] Sean Ω un abierto de este tipo, γ un camino cerrado en Ω, $R > 0$ con $\gamma^* \subseteq D(0, R)$, $z \notin \Omega$, C la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que contiene a z y U la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Claramente $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subseteq U$, y como por hipótesis, C no está acotada, debe ser $C \cap U \neq \emptyset$. Como $C \subseteq \mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, debe ser $C \subseteq U$ y por tanto $z \in U$, por lo que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$.

3.4. Singularidades aisladas

Sean Ω un abierto, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, f es **regular** en a o a es un **punto regular** de f si podemos definir f en a de forma que sea derivable en a, si y solo si $\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$ (suponiendo que dicho límite exista) por el teorema de extensión de Riemann, y de lo contrario decimos que a es un **punto singular** de f o f tiene una **singularidad aislada** en a.

Un punto singular a de f es un **polo** de orden k si k es el mínimo natural tal que $z \mapsto (z - a)^k f(z)$ es regular, y si no existe tal k, a es una **singularidad esencial**. La función f tiene un polo en a de orden k si y sólo si $\lim_{z \to a} (z - a)^k f(z) \in \mathbb{C}^*$ (suponiendo que el límite exista), si y sólo si $\exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : (\varphi(a) \neq 0 \land \forall z \in \Omega \setminus \{a\}, f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^k})$.

Dados un abierto Ω, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, llamamos **residuo** de f en a a

$$\operatorname{Res}(f,a) := \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} f,$$

donde ρ es cualquier radio tal que $D(a,\rho) \setminus \{a\} \subseteq \Omega$. El valor no depende del radio, pues

$$\int_{C(a,R)} f - \int_{C(a,\rho)} f =$$

$$= \int_{C(a,R)|_{[0,\pi]} \dot{+} [-R,-\rho] \dot{-} C(a,\rho)|_{[0,\pi]} \dot{+} [\rho,R]} f + \int_{C(a,R)|_{[-\pi,0]} \dot{+} [R,\rho] \dot{-} C(a,\rho)|_{[-\pi,0]} \dot{+} [-\rho,-R]} f = 0+0 = 0,$$

incluyendo cada curva en un abierto nulhomólogo que contenga al semianillo.

- Si a es regular, $\operatorname{Res}(f,a) = 0$.

  Basta extender f a a de forma holomorfa y aplicar el teorema de Cauchy.

- Si a es un polo de orden k,

  $$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left((z-a)^k f(z)\right)^{(k-1)}.$$

  Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(z) = (z-a)^k f(z)$ para $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Cerca de a, tendrá una serie de Taylor $\sum_n c_n(z-a)^n$, pero por el teorema de Taylor,

  $$\frac{g^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

  y en particular

  $$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} f = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{g(z)}{(z-a)^k}dz = c_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

- Si $f = \frac{g}{h}$ con $g,h \in \mathcal{H}(\Omega)$, las únicas singularidades de f son los ceros de h, y si h tiene un cero de orden k en a y $g(a) \neq 0$, entonces f tiene un polo de orden k en a. Si el polo es simple,

  $$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

  $\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)} = g(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

3.5. Teorema de los residuos

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $S \subseteq \Omega$ con $S' \cap \Omega = \emptyset$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$ y Γ un ciclo en $\Omega \setminus S$ nulhomólogo respecto de Ω, entonces $\{a \in S \mid \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ es finito y

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a\in S} \operatorname{Res}(f,a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a).$$

Demostración: Sea $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$, que es abierto por ser unión de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Como Γ es nulhomólogo respecto de Ω, $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega_0$. Sea $K := \mathbb{C} \setminus \Omega_0 = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\}$, que es cerrado por ser complementario de un abierto y acotado porque no corta a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, luego es compacto. Si $S \cap K = \{a \in S \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\}$ no fuera finito, tendría un punto de acumulación que, por compacidad, debería quedarse en $K \subseteq \Omega$, luego no sería $S' \cap \Omega = \emptyset\#$. Así, la suma en el enunciado del teorema es finita.

Sean $S \cap K =: \{a_1, \dots, a_q\}$, $\rho > 0$ tal que para cada k, $\overline{D}(a_k, \rho) \subseteq \Omega$ y $\overline{D}(a_k, \rho) \cap S = \{a_k\}$, $m_k := \mathrm{Ind}_\Gamma(a_k)$, $\gamma_k := C(a_k, \rho)$ y $\Sigma := \sum_{k=1}^q m_k \gamma_k$. Veamos que $\Gamma - \Sigma$ es nulhomólogo respecto de $\Omega \setminus S$. Para $z \notin \Omega \setminus S$:

- Si $z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$, y como $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para ningún k, $\mathrm{Ind}_\Sigma(z) = 0$.
- Si $z \in S$, $z \neq a_1, \dots, a_q$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ y como, por definición, $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para ningún k, $\mathrm{Ind}_\Sigma(z) = 0$.
- Si $z = a_j$ para algún j, $\mathrm{Ind}_\Gamma(a_j) = m_j$. $\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(a_j) = 1$, y para $k \neq j$, $a_j \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ y por tanto $\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(a_j) = 0$, luego $\mathrm{Ind}_\Sigma(a_j) = m_j$.

Aplicando ahora el teorema de Cauchy,

$$\int_{\Gamma - \Sigma} f = 0,$$

luego

$$\int_\Gamma f = \int_\Sigma f = \sum_{k=1}^q m_k \int_{\gamma_k} f = \sum_{k=1}^q \mathrm{Ind}_\Gamma(a_j) \int_{C(a_j, \rho)} f = 2\pi i \sum_{k=1}^q \mathrm{Ind}_\Gamma(a_j) \mathrm{Res}(f, a_j).$$