Geometría afín y euclídea

Bibliografía:

- Material clases teóricas, Geometría Afín y Euclídea, Universidad de Murcia (anónimo).

Capítulo 1

Espacios afines y variedades afines

1.1. Espacios afines

A lo largo del capítulo, cuando no haya ambigüedad, identificamos el espacio afín $(\mathcal{E}, V, \varphi)$ con el conjunto $\mathcal{E}$. Un **espacio afín** sobre un cuerpo K es una terna $(\mathcal{E}, V, \varphi)$ formada por un conjunto $\mathcal{E} \neq 0$, cuyos elementos llamamos **puntos**; un K-espacio vectorial V, llamado **espacio vectorial asociado** a o **de direcciones** de $(\mathcal{E}, V, \varphi)$, y una aplicación $\varphi : \mathcal{E} \times V \to \mathcal{E}$, que escribimos como $P + \vec{v} := \varphi(P, \vec{v})$, que cumplen que $\forall P, Q \in \mathcal{E}, \vec{v}, \vec{w} \in V$:

1. $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$.
2. $P + \vec{0} = P$.
3. $\exists! \overrightarrow{PQ} \in V : P + \overrightarrow{PQ} = Q$. Decimos que P es el **origen** y Q el **extremo** del vector $\overrightarrow{PQ}$. $\overrightarrow{P(P + \vec{v})} = \vec{v}$.

Llamamos **dimensión** de $\mathcal{E}$ a la de su espacio vectorial asociado, $\dim(\mathcal{E}) = \dim_K(V)$. Llamamos **rectas afines** a los espacios afines de dimensión 1, **planos afines** a los de dimensión 2 y **espacios (tridimensionales) afines** a los de dimensión 3.

Tenemos que, dado $O \in \mathcal{E}$, las aplicaciones $V \to \mathcal{E}$ y $\mathcal{E} \to V$ dadas, respectivamente, por $\vec{v} \mapsto O + \vec{v}$ y $P \mapsto \overrightarrow{OP}$ son biyecciones una inversa de la otra. **Demostración:** $\vec{v} \mapsto O + \vec{v} \mapsto \overrightarrow{O(O + \vec{v})} = \vec{v}$; $P \mapsto \overrightarrow{OP} \mapsto O + \overrightarrow{OP} = P$.

Esta biyección permite dar a $\mathcal{E}$ una estructura de espacio vectorial definida por $P \hat{+} Q = O + (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ y $\lambda \cdot P = O + \lambda \overrightarrow{OP}$, a la que llamamos **vectorialización** de $\mathcal{E}$ respecto a $O \in \mathcal{E}$, que es isomorfa a V y cuyo elemento neutro es O.

Algunos espacios afines:

- **Espacio afín trivial:** De dimensión 0, con un solo punto, pues dados $P, Q \in \mathcal{E}$, $Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + \vec{0} = P$.

- **Estructura afín de un espacio vectorial:** Dado un K-espacio vectorial V, existe un espacio afín (V, V, φ) donde la suma es la suma usual de vectores. Podemos entonces escribir $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. Llamamos **espacio afín numérico** de dimensión n sobre K, $\mathcal{E}^n(K)$, a la estructura afín de K^n. $\mathcal{E}^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{E}^3(\mathbb{R})$ son pues el plano y el espacio afín usuales.

1.1.1. Propiedades

1. $\overrightarrow{PQ} = \vec{0} \iff P = Q$; $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{0} \implies Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + \vec{0} = P$$
$$Q + \vec{0} = Q \implies \overrightarrow{QQ} = \vec{0}$$

2. **Relación de Chasles:** $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$.

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R$$

3. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

4. **Cancelación:** $P + \vec{v} = P + \vec{w} \implies \vec{v} = \vec{w}$; $P + \vec{v} = Q + \vec{v} \implies P = Q$; $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \iff Q = R \iff \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RP}$.

$$P + \vec{v} = P + \vec{w} \implies \vec{v} = \overrightarrow{P(P+\vec{v})} = \overrightarrow{P(P+\vec{w})} = \vec{w}$$
$$P + \vec{v} = Q + \vec{v} \implies P = P + \vec{v} - \vec{v} = Q + \vec{v} - \vec{v} = Q$$
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \implies Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{PR} = R$$

5. $\overrightarrow{(P+\vec{v})(Q+\vec{w})} = \overrightarrow{PQ} + \vec{w} - \vec{v}$; $\overrightarrow{P(Q+\vec{w})} = \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$; $\overrightarrow{(P+\vec{v})Q} = \overrightarrow{PQ} - \vec{v}$; $\overrightarrow{(P+\vec{v})P} = -\vec{v}$.

$$(P + \vec{v}) + (\overrightarrow{PQ} + \vec{w} - \vec{v}) = P + \overrightarrow{PQ} + \vec{w} = Q + \vec{w}$$

6. $P + \vec{v} = Q + \vec{w} \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{v} - \vec{w}$.

$$P + \vec{v} = Q + \vec{w} \iff \overrightarrow{(P+\vec{v})(Q+\vec{w})} = \overrightarrow{PQ} + \vec{w} - \vec{v} = \vec{0} \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{w} - \vec{v}$$

7. **Regla del paralelogramo:** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \iff \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$$

1.1.2. Sistemas de referencia y coordenadas

Un **sistema de referencia** (o **referencial**) **cartesiano** de $\mathcal{E}$ es un par $\Re = (O, \mathcal{B})$ formado por un **origen** $O \in \mathcal{E}$ y una base $\mathcal{B}$ de V. Las **coordenadas (cartesianas)** de $P \in \mathcal{E}$ en $\Re$ son las del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base $\mathcal{B}$, y se denotan $[P]_\Re := [\overrightarrow{OP}]_\mathcal{B}$. En particular $[O]_\Re = (0, \ldots, 0)$, $[P + \vec{v}]_\Re = [P]_\Re + [\vec{v}]_\mathcal{B}$ y $[\overrightarrow{PQ}]_\mathcal{B} = [Q]_\Re - [P]_\Re$. Cuando se trabaja con un único referencial, se omiten los subíndices $\Re$ y $\mathcal{B}$ en los corchetes, o incluso se pueden identificar los puntos y vectores con sus coordenadas, siempre que se indique esto al principio de trabajar con coordenadas, y podemos entonces escribir $P = (p_1, \ldots, p_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Para cambiar coordenadas entre dos referenciales $\Re = (O, \mathcal{B})$ y $\Re' = (O', \mathcal{B}')$ de $\mathcal{E}$, si llamamos $X_0 := [O]_{\Re'} = [\overrightarrow{O'O}]_{\mathcal{B}'}$ y $M := M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} X = [P]_\Re = [\overrightarrow{OP}]_\mathcal{B} \\ X' = [P]_{\Re'} = [\overrightarrow{O'P}]_{\mathcal{B}'} \end{array}\right\} \implies X' = [\overrightarrow{O'P}]_{\mathcal{B}'} = [\overrightarrow{O'O}]_{\mathcal{B}'} + [\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}'} = X_0 + M \cdot [\overrightarrow{OP}]_\mathcal{B} = X_0 + MX$$

Si $X=(x_1,\dots,x_n)$, $X'=(x'_1,\dots,x'_n)$, $X_0=(b_1,\dots,b_n)$ y $M=(a_{ij})$, llamamos **ecuaciones de cambio de coordenadas** a las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{ccl} x'_1 & = & b_1+a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ & \vdots & \\ x'_n & = & b_n+a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{array}\right.$$

Podemos emplear la expresión matricial equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

O simplificadamente

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline X' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline X_0 & M \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right)$$

1.1.3. Rectas y puntos alineados

La **recta** que pasa por $P\in\mathcal{E}$ con **dirección** $<\vec{v}>$, o **vector director** $\vec{v}$, es el conjunto $P+<\vec{v}>=\{P+\lambda\vec{v}\}_{\lambda\in K}$. Dos rectas l y l' son **paralelas** ($l\parallel l'$) si sus vectores directores son proporcionales. Propiedades: $\forall X\in\mathcal{E}, l=P+<\vec{v}>$:

1. $X\in l \iff \exists\lambda\in K:\overrightarrow{PX}=\lambda\vec{v}$.
2. $\forall r\neq 0, l=P+<r\vec{v}>$.
3. $\forall P'\in l, l=P'+<\vec{v}>$.
4. $\forall Q\in\mathcal{E},\exists! r: Q\in r\parallel l;\ r:=Q+<\vec{v}>$.
5. **Recta que pasa por** A y B: $\forall A,B\in\mathcal{E}, A\neq B,\exists! r: A,B\in r;\ r:=AB:=A+<\overrightarrow{AB}>$.

Una serie de puntos de $\mathcal{E}$ están **alineados** si existe una recta que los contiene a todos.

1.1.4. Puntos medios y razón simple

Si en K se tiene que $2=1+1\neq 0$, se define el **punto medio** de $A,B\in\mathcal{E}$ como

$$\frac{A+B}{2}:=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Esto es simplemente una notación, pues no hemos definido suma ni producto por escalares en $\mathcal{E}$. Propiedades: $\forall A,B\in\mathcal{E}$:

1. $M=\frac{A+B}{2} \iff \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM} \iff B=A+2\overrightarrow{AM} \iff \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MM}=\vec{0}$$

2. $\frac{A+B}{2} = \frac{B+A}{2}$.

$$\frac{A+B}{2} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = B + \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{B+A}{2}$$

3. $\frac{A+B}{2} = \frac{A+B'}{2} \iff B = B'$.

$$A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} \iff B = B'$$

4. $\frac{(A+\vec{v})+(B+\vec{w})}{2} = \frac{A+B}{2} + \frac{\vec{v}+\vec{w}}{2}$

$$A + \vec{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{(A+\vec{v})(B+\vec{w})} = A + \vec{v} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \vec{w} - \vec{v}) = \left(A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})$$

Dados tres puntos alineados A, B, C con $A \neq B$ y $C \in AB$, llamamos **razón simple** de A, B, C al único $\lambda \in K$ con $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, y escribimos $\lambda = (A, B, C)$. $(A, B, A) = 0$ y $(A, B, B) = 1$.

1.2. Variedades afines

Un subconjunto $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ es una **variedad (lineal) afín** si $\exists P \in \mathcal{E}, W \subseteq V : \mathcal{L} = P + W := \{P + \vec{w}\}_{\vec{w} \in W}$. Se dice que $\mathcal{L}$ **pasa por** el punto P y W es la **dirección** de $\mathcal{L}$ ($\mathrm{dir}(\mathcal{L}) = W$), y se define la dimensión de $\mathcal{L}$ como

$$\dim(\mathcal{L}) := \dim(\mathrm{dir}(\mathcal{L})) = \dim_K(W)$$

Una variedad de dimensión 1 es una **recta (afín)**, determinada por cualquier $P \in \mathcal{L}$ y vector $\vec{v} \in \mathrm{dir}(\mathcal{L})$ no nulo, llamado **vector director** de la recta. Una variedad de dimensión 2 es un **plano afín**, y una de dimensión $n-1$ (con $n = \dim(\mathcal{E})$) es un **hiperplano afín**. Así, para todo $P \in \mathcal{E}$, se tiene que $P + V = \mathcal{E}$. Propiedades: Sean $\mathcal{L} = P + W$ y $\mathcal{L}' = P' + W'$:

1. $Q \in \mathcal{L} \iff \overrightarrow{PQ} \in W$.

   $\Longrightarrow]$ $Q \in \mathcal{L} \implies \exists \vec{w} \in W : Q = P + \vec{w} \implies \overrightarrow{PQ} = \vec{w} \in W$.

   $\Longleftarrow]$ $\overrightarrow{PQ} \in W \implies Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + W = \mathcal{L}$.

2. $W = \{\overrightarrow{PR}\}_{R \in \mathcal{L}} = \{\overrightarrow{QR}\}_{Q,R \in \mathcal{L}}$ (W está unívocamente determinado por $\mathcal{L}$).
   Vemos que $W \subseteq \{\overrightarrow{PR}\}_{R \in \mathcal{L}} \subseteq \{\overrightarrow{QR}\}_{Q,R \in \mathcal{L}} \subseteq W$. Primero, si $\vec{w} \in W$, podemos definir $R := P + \vec{w} \in \mathcal{L}$ y entonces $\vec{w} = \overrightarrow{PR} \in \{\overrightarrow{PR}\}_{R \in \mathcal{L}}$. El segundo contenido es evidente, y para el tercero, dados $Q, R \in \mathcal{L}$, entonces $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \in W$, por lo que $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} \in W$.

3. $P' \in \mathcal{L} \implies \mathcal{L} = P' + W$.
   Sea $\mathcal{L}' = P' + W$, como $P' \in \mathcal{L}$, $\overrightarrow{PP'} \in W$, y así,

$$Q \in \mathcal{L}' \iff \overrightarrow{P'Q} \in W \iff \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q} \in W \iff Q \in \mathcal{L}$$

4. $(\mathcal{L}, W, \varphi|_{\mathcal{L}\times W})$ es un espacio afín.
Sean $Q \in \mathcal{L}$ y $\vec{w} \in W$, entonces $Q + \vec{w} \in Q + W = \mathcal{L}$. Las propiedades $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$ y $P + \overrightarrow{0} = P$ se cumplen trivialmente, y si $R, Q \in \mathcal{L}$ entonces $\overrightarrow{RQ} \in W$.

5. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}' \iff W \subseteq W' \wedge \overrightarrow{PP'} \in W' \iff W \subseteq W' \wedge P \in \mathcal{L}'$; $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \iff W = W' \wedge \overrightarrow{PP'} \in W$.
Basta ver la primera serie de equivalencias.

   [$1 \implies 2$] $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}' \implies P \in \mathcal{L}' \implies \overrightarrow{PP'} \in W'$. Además, $W = \{\overrightarrow{QR}\}_{Q,R\in\mathcal{L}} \subseteq \{\overrightarrow{QR}\}_{Q,R\in\mathcal{L}'} = W'$.

   [$2 \implies 3$] $\overrightarrow{PP'} \in W' \implies \overrightarrow{P'P} \in W' \implies P \in \mathcal{L}'$.

   [$3 \implies 1$] $W \subseteq W' \wedge P \in \mathcal{L}' \implies \mathcal{L} = P + W \subseteq P + W' = \mathcal{L}'$.

1.2.1. Paralelismo, intersección y cruce de variedades

Dos variedades $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son **paralelas** ($\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}'$) si tienen la misma dirección. Si solo se tiene que $\text{dir}(\mathcal{L}) \subseteq \text{dir}(\mathcal{L}')$, se dice que $\mathcal{L}$ es **débilmente paralela** a $\mathcal{L}'$ ($\mathcal{L} \ll \mathcal{L}'$). Cuando no hay ambigüedad, a veces se omite el «débilmente». Se trata de una relación reflexiva y transitiva en la que $\mathcal{L} \ll \mathcal{L}' \wedge \mathcal{L}' \ll \mathcal{L} \implies \mathcal{L} \parallel \mathcal{L}'$, pero no es antisimétrica.

El **postulado de las paralelas de Euclides** afirma que por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a esta. Esto se puede generalizar a que, dados $P \in \mathcal{E}$ y una variedad afín $\mathcal{L}$, existe una única variedad $\mathcal{L}'$ que pasa por P y es paralela a $\mathcal{L}$, y esta es $\mathcal{L}' = P + \text{dir}(\mathcal{L})$. Propiedades:

1. $\mathcal{L} \ll \mathcal{L}' \implies \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}' \vee \mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = \emptyset$.

$$W \subseteq W' \wedge \exists Q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \implies \mathcal{L} = Q + W \subseteq Q + W' = \mathcal{L}'$$

2. $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}' \implies \mathcal{L} = \mathcal{L}' \vee \mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = \emptyset$.

$$W = W' \wedge \exists Q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \implies \mathcal{L} = Q + W = Q + W' = \mathcal{L}'$$

3. $\mathcal{L} \ll \mathcal{L}' \iff \exists \mathcal{S} : \mathcal{L} \parallel \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}' \iff \exists \mathcal{S}' : \mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}' \parallel \mathcal{L}'$.

   [$1 \implies 2, 3$] $W \subseteq W' \implies \mathcal{L} = P + W \parallel P' + W \subseteq P' + W' = \mathcal{L}' \wedge \mathcal{L} = P + W \subseteq P + W' \parallel P' + W' = \mathcal{L}'$.

   [$2 \implies 1$] $\mathcal{L} \parallel \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}' \implies \text{dir}(\mathcal{L}) = \text{dir}(\mathcal{S}) \subseteq \text{dir}(\mathcal{L}') \implies \mathcal{L} \ll \mathcal{L}'$.

   [$3 \implies 1$] $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}' \parallel \mathcal{L} \implies \text{dir}(\mathcal{L}) \subseteq \text{dir}(\mathcal{S}') = \text{dir}(\mathcal{L}') \implies \mathcal{L} \ll \mathcal{L}'$.

Se dice que dos variedades $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ **se cortan** o son **incidentes** si $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \neq \emptyset$, y que **se cruzan** si ni se cortan ni ninguna es débilmente paralela a la otra. Propiedades:

1. Si $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ es una familia de variedades afines de $\mathcal{E}$ con $\mathcal{L}_i = P + W_i \forall i \in I$ y $\bigcap_{i\in I} \mathcal{L}_i \neq \emptyset$ entonces la intersección es una variedad afín con dirección $\bigcap_{i\in I} W_i$.

$$Q \in P + \bigcap_{i\in I} W_i \iff \forall i \in I, \overrightarrow{PQ} \in W_i \iff \forall i \in I, Q \in P + W_i = \mathcal{L}_i \iff Q \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{L}_i$$

2. $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \neq \emptyset \iff \overrightarrow{PP'} \in W + W'$.

$\Longrightarrow]$ $Q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \implies \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} \in W + W'$.

$\Longleftarrow]$ $\exists \vec{w} \in W, \vec{w}' \in W' : \overrightarrow{PP'} = \vec{w} + \vec{w}' \implies P + \vec{w} = P + \overrightarrow{PP'} - \vec{w}' = P' - \vec{w}' \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$.

Dos variedades $\mathcal{L} = P + W$ y $\mathcal{L}' = P' + W'$ son **complementarias** si lo son sus direcciones, es decir, si $V = W \oplus W'$. La intersección de dos variedades afines complementarias es un punto. **Demostración:** $\overrightarrow{PP'} \in V = W \oplus W'$, luego se cortan, y $W \cap W' = \{0\}$, luego $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}') = 0$.

1.2.2. Suma de variedades

Llamamos **variedad afín engendrada** o **generada** por $X \subseteq \mathcal{E}$ a la menor de las variedades que contienen a X, es decir, la intersección de todas ellas, y se denota por $\mathcal{V}(X)$. Esta existe porque la intersección no es vacía (contiene a X) y al menos $\mathcal{E}$ es una variedad que contiene a X. Dados $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$, se tiene que $\mathcal{V}(P_1, \dots, P_n) = P_1 + < \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_n} >$.

$\subseteq]$ $P_1 + < \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_n} >$ contiene a $P_1, P_2, \dots, P_n$, luego contiene a $\mathcal{V}(X)$ por ser una de las variedades que se intersecan.

$\supseteq]$ $\mathcal{V}(P_1, \dots, P_n)$ pasa por P_1 y su dirección debe contener a los $\overrightarrow{P_1P_j}$ $(2 \leq j \leq n)$ y por tanto a $< \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_n} >$.

La **suma** de $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ es la variedad engendrada por su unión: $\sum_{i \in I} \mathcal{L}_i \coloneqq \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{L}_i\right)$. Se tiene que dadas $\mathcal{L} = P + W$ y $\mathcal{L}' = P' + W'$, entonces $\mathcal{L} + \mathcal{L}' = P + (W + W' + < \overrightarrow{PP'} >)$.

$\subseteq]$ La variedad a la derecha del igual contiene a $P + W = \mathcal{L}$, y como en esta podemos cambiar P por $P' = P + \overrightarrow{PP'}$, también contiene a $P' + W' = \mathcal{L}'$, luego contiene a la suma.

$\supseteq]$ Evidentemente, $P \in \mathcal{L} + \mathcal{L}'$. Ahora bien, como $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L} + \mathcal{L}'$, entonces $W, W' \subseteq \operatorname{dir}(\mathcal{L} + \mathcal{L}')$, y como $P, P' \in \mathcal{L} + \mathcal{L}'$, entonces $\overrightarrow{PP'} \in \operatorname{dir}(\mathcal{L} + \mathcal{L}')$, luego $W + W' + < \overrightarrow{PP'} > \subseteq \operatorname{dir}(\mathcal{L} + \mathcal{L}')$.

Fórmulas de Grassmann:

1. $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \neq \emptyset \implies \dim(\mathcal{L} + \mathcal{L}') = \dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathcal{L}') - \dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}')$.
   En este caso, $\operatorname{dir}(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}') = W \cap W'$, y como $\overrightarrow{PP'} \in W + W'$, entonces
   $W + W' + < \overrightarrow{PP'} > = W + W'$ y

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L} + \mathcal{L}') = \dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') = \\ = \dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathcal{L}') - \dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}') \end{aligned}$$

2. $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = \emptyset \implies \dim(\mathcal{L} + \mathcal{L}') = \dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathcal{L}') - \dim(W \cap W') + 1$.
   En este caso, $\overrightarrow{PP'} \notin W + W'$, por lo que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L} + \mathcal{L}') = \dim(W + W' + \overrightarrow{PP'}) = \dim(W + W') + 1 = \\ = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') + 1 \end{aligned}$$

1.2.3. Posición relativa de variedades

Sean $\mathcal{L}_i = P_i + < \vec{v}_i >$ $(i \in \{1,2\}, \vec{v}_i \neq \vec{0})$ dos rectas en un plano afín.

- Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son proporcionales entonces $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$. Si $\overrightarrow{P_1P_2} \in < \vec{v}_1 >$, son coincidentes; en otro caso son paralelas distintas.
- En otro caso son subespacios complementarios y por tanto se cortan en un punto.

Si tenemos dos rectas en un espacio tridimensional, la discusión es similar a cuando estamos en el plano afín, pero si las rectas no son paralelas, sólo se cortan si $\overrightarrow{P_1P_2} \in < \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$, de lo contrario se cruzan. Sean ahora tres rectas, sin ser dos de ellas coincidentes, en un plano afín.

- Si hay dos paralelas, digamos $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, si $\vec{v}_3$ es proporcional a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tenemos tres paralelas distintas, de lo contrario $\mathcal{L}_3$ corta en un punto a cada una de las otras.
- En otro caso, cada par de rectas se cortan en un punto. Si dos de estos coinciden, también coinciden con el tercero, y de lo contrario las rectas se cortan en puntos distintos dos a dos.

Ahora, sean $\mathcal{L} = P + < \vec{v} >$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ y $\mathcal{P} = P' + W$ una recta y plano en un espacio afín tridimensional:

- Si $\vec{v} \in W$ entonces $\mathcal{L} \ll \mathcal{P}$, y en particular, si $P \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$.
- Si $\vec{v} \notin W$, las variedades son complementarias, luego se cortan en un punto.

Sean $\mathcal{P}_i = P_i + W_i$ $(i \in \{1,2\}, \dim(W_i) = 2)$ dos planos en un espacio afín tridimensional.

- Si $W_1 = W_2$, los planos son paralelos. En particular, son coincidentes si $\overrightarrow{P_1P_2} \in W_1$; de lo contrario son paralelos distintos.
- En otro caso, se tiene que $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ y $\dim(W_1 + W_2) = 3$, por lo que $\overrightarrow{P_1P_2} \in W_1 + W_2$ y los planos se cortan en una recta de dirección $W_1 \cap W_2$.

Si ahora consideramos tres planos ninguno coincidente con ningún otro, entonces:

- Si hay dos paralelos, digamos $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$, si $W_3 = W_1$ tenemos tres planos paralelos distintos; de lo contrario $\mathcal{P}_3$ corta en una recta a cada uno de los otros.
- En otro caso, sea $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = P + W \neq \emptyset$, si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_3$, entonces $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ y los tres planos se cortan en una recta. Si $\mathcal{L} \ll \mathcal{P}_3$ $(W \subseteq W_3)$ entonces $W \subseteq W_1 \cap W_3$, y como $\dim(W_1 \cap W_3) = \dim(W) = 1$, entonces $W = W_1 \cap W_3$ y del mismo modo $W = W_2 \cap W_3$, luego los planos se cortan dos a dos en paralelas distintas. Finalmente, si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}_3$ se cortan en un punto, los tres planos se cortan en este.

1.3. Ecuaciones de variedades afines

En esta sección asumimos $\dim(\mathcal{E}) = n$ e identificamos los vectores con sus coordenadas en $\mathcal{B}$ y los puntos con sus coordenadas en $\Re := (O, \mathcal{B})$. Sea $\mathcal{L} = P + W$ con $W = < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m >$, los puntos de $\mathcal{L}$ tienen la forma $X = P+\lambda_1\vec{v}_1+\cdots+\lambda_m\vec{v}_m$, con cada $\lambda_i \in K$. Si $[X]_{\Re} = (x_1, \dots, x_n)$, $[P]_{\Re} = (p_1, \dots, p_n)$ y $[\vec{v}_i]_{\mathcal{B}} = (v_{1i}, \dots, v_{ni})$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & p_1 + \lambda_1 v_{11} + \cdots + \lambda_m v_{1m} \\ & \vdots & \\ x_n & = & p_n + \lambda_1 v_{n1} + \cdots + \lambda_m v_{nm} \end{array} \right.$$

Estas son las **ecuaciones paramétricas** de $\mathcal{L}$ en $\Re$, y no son únicas. Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ son linealmente independientes entonces el número de parámetros es la dimensión de W y de $\mathcal{L}$. Si W viene dado por ecuaciones cartesianas en $\mathcal{B}$ representadas por un sistema homogéneo con matriz de coeficientes A, es decir, si $\vec{v} \in W \iff A\vec{v} = 0$, entonces $X \in \mathcal{L} \iff \overrightarrow{PX} \in W \iff A(X - P) = 0 \iff AX = AP$. El resultado es un sistema de ecuaciones, denominadas **ecuaciones cartesianas** o **implícitas** de $\mathcal{L}$ en $\Re$, que no es único, y cuyas soluciones son los puntos de $\mathcal{L}$. Si $r = \text{rg}A$ (el rango del sistema), entonces $\dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{E}) - r$.

Para obtener las paramétricas (o las implícitas) de W a partir de las correspondientes de $\mathcal{L}$, basta anular los términos independientes en cada caso. Así, para obtener las paramétricas de la recta paralela a $\mathcal{L}$ por P', basta sustituir las coordenadas de P $(p_1, \dots, p_n)$ por las de P'en las paramétricas de $\mathcal{L}$. Para obtener las implícitas, si las de $\mathcal{L}$ son $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$, las de la paralela son $\left(\begin{array}{c|c} A & AP' \end{array} \right)$.

Para obtener ecuaciones paramétricas a partir de implícitas, resolvemos el sistema $(A|B)$ en función de parámetros, y para pasar de paramétricas a implícitas (por ejemplo, el sistema de arriba), consideramos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} v_{11} & \cdots & v_{1m} & x_1 - p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} & x_n - p_n \end{array} \right)$$

y se trata de discutir el sistema que forma. Lo mejor en general es hacerlo por menores, pues si los m vectores iniciales son linealmente independientes, el rango de la matriz debe ser m.

Para obtener la intersección de dos variedades dadas sus ecuaciones implícitas, basta juntarlas. También, si conocemos las implícitas de una y las paramétricas de la segunda, podemos sustituir el «punto genérico» que nos dan las paramétricas de la segunda y sustituirlo en la primera, obteniendo como resultado las condiciones para que un punto de la segunda esté además en la primera. Por otro lado, si tenemos las paramétricas de dos variedades y queremos hallar su suma, basta recordar que $\mathcal{L} + \mathcal{L}' = P + (W + W' + < \overrightarrow{PP'} >)$.

1.3.1. Ejemplos en dimensiones bajas

Una recta en un plano afín es un hiperplano, por lo que viene dada por una sóla ecuación

$$\left| \begin{array}{cc} v_1 & x_1 - p_1 \\ v_2 & x_2 - p_2 \end{array} \right| = 0$$

Si $(p_1, p_2) \neq (q_1, q_2)$, la recta que los une tiene como ecuación

$$\left| \begin{array}{cc} q_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & x_2 - p_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{array} \right| = 0$$

lo que sirve para comprobar si tres puntos están alineados. Decimos que unos puntos son **coplanarios** si existe un plano que los contiene a todos. Los planos en un espacio tridimensional son hiperplanos, y su ecuación implícita es

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x_1 - p_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 - p_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Así, si tres puntos P, Q y R no están alineados, forman un plano dado por

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 & x_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 & x_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0$$

En un espacio tridimensional, el punto (x_1, x_2, x_3) está en la recta $\ell = (p_1, p_2, p_3) + < (v_1, v_2, v_3) >$ cuando (v_1, v_2, v_3) y $(x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)$ sean proporcionales, lo que nos lleva a las **ecuaciones continuas**:

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$$

Si una de las coordenadas del vector director es 0, este caso debe ser tratado de forma especial. A partir de estas ecuaciones podemos obtener las implícitas. El **haz de planos** que contienen a ℓ es el conjunto de todos los planos que la contienen. Así, si

$$\ell \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

su haz de planos está formado por las combinaciones lineales de estas ecuaciones, es decir, el plano $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ y los planos $(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d) = 0$ con $\mu \in K$.

Capítulo 2

Aplicaciones afines

Una aplicación $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es **afín** si existe $\overrightarrow{f} : V \to V'$ tal que para $P \in \mathcal{E}, \vec{v} \in V$, $f(P + \vec{v}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\vec{v})$, es decir, $\overrightarrow{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(P)f(P + \vec{v})}$. Así, $\overrightarrow{f}$ queda determinada por f y se le llama **aplicación lineal asociada** a f. Las aplicaciones afines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ son **transformaciones afines** de $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ tienen dimensión finita siendo $\Re = (O; \mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\})$ y $\Re' = (O'; \mathcal{B}')$ referenciales cartesianos de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, sea $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ con $X_0 = [f(O)]_{\Re'} = [\overrightarrow{O'f(O)}]_{\mathcal{B}'}$ y $\overrightarrow{f}$ dada por $M = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$, entonces

$$[f(X)]_{\Re'} = [f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OX})]_{\Re'} = [f(O)]_{\Re'} + [\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OX})]_{\mathcal{B}} = X_0 + M[X]_{\Re}$$

Lo que nos da la **representación matricial** o las **ecuaciones** de f en $\Re$ y $\Re'$ como $X' = X_0 + MX$ o

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline X' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline X_0 & M \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right)$$

2.1. Propiedades

1. Dados $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, $\exists P \in \mathcal{E} : f(P) = g(P) \wedge \overrightarrow{f} = \overrightarrow{g} \implies f = g$.
   Dado un $Q \in \mathcal{E}$ arbitrario, $f(Q) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = g(P) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{PQ}) = g(Q)$.

2. Dados $P \in \mathcal{E}$, $P' \in \mathcal{E}'$ y $\phi : V \to V'$ vectorial, existe una única aplicación afín $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ con $f(P) = P'$ y $\overrightarrow{f} = \phi$, dada por $f(Q) \coloneqq P' + \phi(\overrightarrow{PQ})$.

   $$f(Q + \vec{v}) = P' + \phi(\overrightarrow{P(Q + \vec{v})}) = P' + \phi(\overrightarrow{PQ} + \vec{v}) = P' + \phi(\overrightarrow{PQ}) + \phi(\vec{v}) = f(Q) + \phi(\vec{v})$$

   por lo que es afín. Además, $f(P) = P' + \phi(\overrightarrow{PP}) = P'$, y la unicidad se desprende del apartado anterior.

3. La composición de aplicaciones afines g y f es afín, y $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.
   Sean $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E}' \xrightarrow{g} \mathcal{E}''$, para $P \in \mathcal{E}, \vec{v} \in V$,

   $$(g \circ f)(P + \vec{v}) = g(f(P) + \overrightarrow{f}(\vec{v})) = g(f(P)) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\vec{v})) = (g \circ f)(P) + (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\vec{v})$$

4. f es inyectiva si y sólo si lo es $\overrightarrow{f}$.

   $\Longrightarrow$] Dados $P \in \mathcal{E}, \vec{v} \in \text{Nuc}(\overrightarrow{f})$, $f(P+\vec{v}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\vec{v}) = f(P)$, y por la inyectividad $P + \vec{v} = P$ y $\vec{v} = 0$, de modo que $\text{Nuc}(\overrightarrow{f}) = \{0\}$.

   $\Longleftarrow$] Sean $f(P) = f(Q)$, entonces $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \vec{0}$, y por la inyectividad de $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ y $P = Q$.

5. f es suprayectiva si y sólo si lo es $\overrightarrow{f}$.

   $\Longrightarrow$] Dado $\vec{v}' \in V'$, sea $P \in \mathcal{E}$ arbitrario, $f(P) + \vec{v}' \in \mathcal{E}'$ y por la suprayectividad de f, existe $Q \in \mathcal{E}$ con $f(Q) = f(P) + \vec{v}'$, por lo que $\vec{v}' = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$.

   $\Longleftarrow$] Dado $Q' \in \mathcal{E}'$, sea $P \in \mathcal{E}$ arbitrario, $\overrightarrow{f(P)Q'} \in V'$, y por la suprayectividad de $\overrightarrow{f}$ existe $\vec{v} \in V$ con $\overrightarrow{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(P)Q'}$, luego $Q' = f(P) + \overrightarrow{f}(\vec{v}) = f(P + \vec{v})$.

6. Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es afín y biyectiva, entonces f^{-1} es afín y $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

$$f^{-1}(P'+\vec{v}') = f^{-1}(P')+\overrightarrow{f}^{-1}(\vec{v}') \iff f(f^{-1}(P'+\vec{v}')) = P'+\vec{v}' = f(f^{-1}(P')+\overrightarrow{f}^{-1}(\vec{v}'))$$

Esto último nos lleva al concepto de **isomorfismo de espacios afines**, una aplicación afín y biyectiva $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. Cuando existe se dice que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son **isomorfos**. Como **teorema**, dos espacios afines de dimensión finita sobre el mismo cuerpo son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión. Más propiedades:

1. $M = \frac{A+B}{2} \implies f(M) = \frac{f(A)+f(B)}{2}$.

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \implies \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f}(2\overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{f(A)f(M)}$$

2. Si $\mathcal{L} = P + W$ es una variedad de $\mathcal{E}$, $f(\mathcal{L}) = f(P) + \overrightarrow{f}(W)$ lo es de $\mathcal{E}'$.

$$Q' \in f(\mathcal{L}) \iff \exists \vec{w} \in W : Q' = f(P+\vec{w}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\vec{w}) \iff$$
$$\iff \overrightarrow{f(P)Q'} = \overrightarrow{f}(\vec{w}) \in \overrightarrow{f}(W) \iff Q' \in f(P) + \overrightarrow{f}(W)$$

3. $\mathcal{L}_1 \ll \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{E} \implies f(\mathcal{L}_1) \ll f(\mathcal{L}_2)$; $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{E} \implies f(\mathcal{L}_1) \parallel f(\mathcal{L}_2)$.

   Se sigue de lo anterior y de que $\overrightarrow{f}$ conserva las inclusiones entre subespacios.

4. Sea f biyectiva, si $\mathcal{L}' = P' + W$ es una variedad de $\mathcal{E}'$ y su inversa $f^{-1}(\mathcal{L}') \neq \emptyset$, esta es una variedad de $\mathcal{E}$. En concreto, $\text{dir}(f^{-1}(\mathcal{L}')) = \overrightarrow{f}^{-1}(W')$.

$$Q \in f^{-1}(\mathcal{L}') \iff f(Q) \in \mathcal{L}' \iff \overrightarrow{P'f(Q)} \in W' \iff$$
$$\iff \overrightarrow{f(P)P'} + \overrightarrow{P'f(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \in W' \iff$$
$$\iff \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{f}^{-1}(W') \iff Q \in P + \overrightarrow{f}^{-1}(W')$$

2.2. Puntos fijos

$Q \in \mathcal{E}$ es un **punto fijo** de $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ si $f(Q) = Q$, y definimos

$$\mathrm{Fix}(f) := \{Q \in \mathcal{E} \mid f(Q) = Q\}$$

Un **subespacio invariante** por $\phi : V \to V$ es un subespacio U de V con $f(U) \subseteq U$. Destacamos el subespacio de los **vectores invariantes** o asociado al autovalor 1,

$$\mathrm{Inv}(\phi) := \mathrm{Nuc}(\phi - id_V) = \{\vec{v} \in V \mid \phi(\vec{v}) = \vec{v}\}$$

y el de los **opuestos** o asociado al autovalor -1,

$$\mathrm{Opp}(\phi) := \mathrm{Nuc}(\phi + id_V) = \{\vec{v} \in V \mid \phi(\vec{v}) = -\vec{v}\}$$

Se tiene que $P \in \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset \implies \mathrm{Fix}(f) = P + \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$. **Demostración:** Si $f(P) = P$,

$$Q \in P + \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) \iff \overrightarrow{PQ} \in \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) \iff \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{Pf(Q)} \iff$$
$$\iff Q = f(Q) \iff Q \in \mathrm{Fix}(f)$$

En coordenadas, $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ se obtiene como las soluciones del sistema $(I - M|0)$, mientras que $\mathrm{Fix}(f)$ se obtiene como las soluciones del sistema $(I - M|X_0)$. Por tanto, $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = 0 \iff |\mathrm{Fix}(f)| = 1$.

2.3. Ejemplos de transformaciones afines

2.3.1. Traslaciones

Dado $\vec{v} \in V$, la **traslación** de vector $\vec{v}$ es la aplicación $t_{\vec{v}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ con $t_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$. Propiedades:

1. $t_{\vec{v}}$ es afín y $\overrightarrow{t_{\vec{v}}} = id_V$.

$$t_{\vec{v}}(P + \vec{w}) = P + \vec{w} + \vec{v} = t_{\vec{v}}(P) + id_V(\vec{w})$$

2. Recíprocamente, si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es afín con $\overrightarrow{f} = id_V$ entonces $f = t_{\overrightarrow{Pf(P)}}$, dado $P \in \mathcal{E}$.
   Sea $P \in \mathcal{E}$ arbitrario y $\vec{v} := \overrightarrow{Pf(P)}$, f y $t_{\vec{v}}$ son aplicaciones afines con la misma lineal asociada y actúan igual sobre P, luego $f = t_{\vec{v}}$.

3. $t_{\vec{0}} = id_{\mathcal{E}}$.

4. $\vec{v} \neq \vec{0} \implies \mathrm{Fix}(t_{\vec{v}}) = \emptyset$.

5. $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{w}}$.

6. $t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}}$.

7. La expresión matricial de $t_{\vec{v}}$ sobre $\Re = (O, \mathcal{B})$ es $X' = [\vec{v}]_{\mathcal{B}} + X$.

8. Para $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ afín, $f \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ f \iff \vec{v} \in \operatorname{Inv}(\overrightarrow{f})$.
Como ambas tienen la misma lineal asociada ($\overrightarrow{f}$), serán iguales si y sólo si actúan igual sobre un $P \in \mathcal{E}$ arbitrario.
$$f \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ f \iff f(t_{\vec{v}}(P)) = t_{\vec{v}}(f(P)) \iff f(P + \vec{v}) = f(P) + \vec{v} \iff \overrightarrow{f}(\vec{v}) = \vec{v}$$

9. Dado $P \in \mathcal{E}$ y $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $f = t_{\vec{v}} \circ g$ donde $\vec{v} = \overrightarrow{Pf(P)}$ y g es una transformación afín con $g(P) = P$ y $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$.
$g := t_{-\vec{v}} \circ f$ es afín con $g(P) = t_{-\vec{v}}(f(P)) = f(P) - \vec{v} = f(P) + \overrightarrow{f(P)P} = P$ y $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{t_{-\vec{v}}} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$, y componiendo se obtiene $f = t_{\vec{v}} \circ g$.

2.3.2. Homotecias

Dados $O \in \mathcal{E}, \lambda \in K$, la **homotecia** de centro O y razón λ es la aplicación $H_{O,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dada por $H_{O,\lambda}(P) := O + \lambda\overrightarrow{OP}$. Así, para $P \neq O$, la razón simple $(O, P, H_{O,\lambda}(P)) = \lambda$. Para $\lambda = 0$ se obtiene la aplicación constante, que lleva todos los puntos a O; para $\lambda = 1$ se obtiene la identidad, y para $\lambda = -1$ se obtiene la **simetría central** sobre O, escrita $s_O := H_{O,-1}$. Propiedades:

1. $H_{O,\lambda}$ es afín con $\overrightarrow{H_{O,\lambda}} = h_\lambda$.
$$H_{O,\lambda}(P+\vec{w}) = O+\lambda\overrightarrow{O(P+\vec{w})} = O+\lambda(\overrightarrow{OP}+\vec{w}) = (O+\lambda\overrightarrow{OP})+\lambda\vec{w} = H_{O,\lambda}(P)+h_\lambda(\vec{w})$$

2. $\lambda \neq 1 \implies \operatorname{Fix}(H_{O,\lambda}) = \{O\}$.
$$\begin{aligned} P = H_{O,\lambda}(P) = O + \lambda\overrightarrow{OP} &\iff \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OP} \iff \\ \iff (\lambda - 1)\overrightarrow{OP} = \vec{0} &\overset{\lambda\neq 1}{\iff} \overrightarrow{OP} = \vec{0} \iff P = O \end{aligned}$$

3. Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es afín con $\overrightarrow{f} = h_\lambda$ y $\lambda \neq 1$ entonces f es la homotecia $f = H_{O,\lambda}$ con $O = P + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Pf(P)}$. Así, para una simetría central, $O = \frac{P+f(P)}{2}$.
Como $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{H_{O,\lambda}}$, será $f = H_{O,\lambda}$ si actúan igual sobre un punto. Por la definición de O se tiene que $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Pf(P)}$ y por tanto $(1-\lambda)\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{Pf(P)}$, luego
$$\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(O)} = -\overrightarrow{PO} + (1-\lambda)\overrightarrow{PO} + \lambda\overrightarrow{PO} = \vec{0}$$

4. $H_{O,\lambda} \circ H_{O,\mu} = H_{O,\mu} \circ H_{O,\lambda} = H_{O,\lambda\mu}$.

5. $\lambda \neq 0 \implies H_{O,\lambda}^{-1} = H_{O,\lambda^{-1}}$.

6. La expresión matricial de $H_{O,\lambda}$ en el referencial $\Re$ es $X' = (1-\lambda)[O]_\Re + \lambda X$.

7. Si $\lambda \neq 1$ entonces $t_{\vec{v}} \circ H_{O,\lambda}$ y $H_{O,\lambda} \circ t_{\vec{v}}$ son homotecias de razón λ y centros respectivos $O + \frac{1}{1-\lambda}\vec{v}$ y $O + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v}$.

8. Si $O \neq O'$ y $\lambda\lambda' = 1$ entonces $H_{O,\lambda} \circ H_{O',\lambda'} = t_{(1-\lambda)\overrightarrow{O'O}}$.

2.3.3. Proyecciones y simetrías vectoriales

Si $V = W_1 \oplus W_2$, la **proyección vectorial** π y la **simetría vectorial** σ de **base** W_1 y **dirección** W_2, o sobre W_1 y paralelamente a W_2 son los endomorfismos de V tales que, si $\vec{v}$ se descompone como $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ con $\vec{w}_1 \in W_1$ y $\vec{w}_2 \in W_2$, entonces $\pi_{W_1,W_2}(\vec{v}) = \vec{w}_1$ y $\sigma_{W_1,W_2}(\vec{v}) = \vec{w}_1 - \vec{w}_2$. Propiedades:

1. $\sigma + id_V = 2\pi$.

2. π es **idempotente** ($\pi^2 = \pi$) y σ es **involutiva** ($\sigma^2 = id_V$, es decir, $\sigma^{-1} = \sigma$).

3. $W_1 = \mathrm{Inv}(\pi)$ y $W_2 = \mathrm{Nuc}(\pi)$.

4. $W_1 = \mathrm{Inv}(\sigma)$ y $W_2 = \mathrm{Opp}(\sigma)$.

5. ϕ es proyección (con $W_1 = \mathrm{Inv}(\phi)$ y $W_2 = \mathrm{Nuc}(\phi)$) $\iff$ ϕ es **idempotente** ($\phi^2 = \phi$) $\iff$ $V = \mathrm{Inv}(\phi) \oplus \mathrm{Nuc}(\phi)$.

   [$2 \implies 3$] $\vec{v} = \phi(\vec{v}) + (\vec{v} - \phi(\vec{v})) \in \mathrm{Inv}(\phi) + \mathrm{Nuc}(\phi)$ para todo $\vec{v} \in V$, y $\vec{v} \in \mathrm{Inv}(\phi) \cap \mathrm{Nuc}(\phi) \implies \vec{v} \overset{\mathrm{Inv}}{=} \phi(\vec{v}) \overset{\mathrm{Nuc}}{=} \vec{0}$.

   [$3 \implies 1$] Si $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ con $\vec{w}_1 \in \mathrm{Inv}(\phi)$ y $\vec{w}_2 \in \mathrm{Nuc}(\phi)$, entonces $\phi(\vec{v}) = \phi(\vec{w}_1) + \phi(\vec{w}_2) = \vec{w}_1 + \vec{0} = \vec{w}_1$, luego ϕ es la proyección de base $\mathrm{Inv}(\phi)$ y dirección $\mathrm{Nuc}(\phi)$.

6. ϕ es simetría (con $W_1 = \mathrm{Inv}(\phi)$ y $W_2 = \mathrm{Nuc}(\phi)$) $\iff$ ϕ es **involutiva** ($\phi^2 = id_V$) $\iff$ $V = \mathrm{Inv}(\phi) \oplus \mathrm{Opp}(\phi)$.
   Demostración análoga, tomando $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \phi(\vec{v})) + \frac{1}{2}(\vec{v} - \phi(\vec{v}))$.

7. Si $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ es base de W_1 y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ es de W_2, podemos definir la base $\mathcal{B} := \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ de V y entonces $M_{\mathcal{B}}(\pi_{W_1,W_2}) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ y $M_{\mathcal{B}}(\sigma_{W_1,W_2}) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -I_m \end{array}\right)$.

2.3.4. Proyecciones y simetrías afines

Sea $\mathcal{L} = A + W_1$ y $V = W_1 \oplus W_2$, la **proyección afín** p y la **simetría afín** s sobre $\mathcal{L}$ paralelamente a W_2 son las aplicaciones $p_{\mathcal{L},W_2}, s_{\mathcal{L},W_2} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tales que $p(Q) \in \mathcal{L} \cap (Q + W_2)$ (conjunto unitario porque las variedades son complementarias) y $s(Q) = p(Q) + \overrightarrow{Qp(Q)} = Q + 2\overrightarrow{Qp(Q)}$. Visto de otro modo, si $Q = A + \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ con $\vec{w}_1 \in W_1$ y $\vec{w}_2 \in W_2$, entonces $p(Q) = A + \vec{w}_1$ y $s(Q) = A + \vec{w}_1 - \vec{w}_2$. Si $\mathcal{L} = \{O\}$ entonces p es la aplicación constante en O y s es la simetría central de centro O. Propiedades:

1. $p_{\mathcal{L},W_2}$ y $s_{\mathcal{L},W_2}$ son afines con $\overrightarrow{p_{\mathcal{L},W_2}} = \pi_{W_1,W_2}$ y $\overrightarrow{s_{\mathcal{L},W_2}} = \sigma_{W_1,W_2}$.
   Sean $\overrightarrow{AQ} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ y $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $\vec{u}_1, \vec{w}_1 \in W_1, \vec{u}_2, \vec{w}_2 \in W_2$, entonces

   $$p(Q + \vec{u}) = p(A + (\vec{w}_1 + \vec{u}_1) + (\vec{w}_2 + \vec{u}_2)) = A + (\vec{w}_1 + \vec{u}_1) = (A + \vec{w}_1) + \vec{u}_1 = p(A) + \pi(\vec{u})$$

   La simetría se hace de forma análoga.

2. $\mathcal{L} = \text{Fix}(p)$ y $W_2 = \text{Nuc}(\pi)$.

   Si $\vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2$,

$$Q := A + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \text{Fix}(p) \iff \vec{w}_2 = 0 \iff Q = A + \vec{w}_1 \iff Q \in \mathcal{L}$$

3. $\mathcal{L} = \text{Fix}(s)$ y $W_2 = \text{Opp}(\sigma)$.

Dada una transformación afín $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, f es una proyección afín (con $\mathcal{L} = \text{Fix}(f)$ y $W_2 = \text{Nuc}(\overrightarrow{f})$) $\iff$ f es idempotente $\iff$ $\overrightarrow{f}^2 = \overrightarrow{f} \wedge \text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

[1 $\implies$ 2] f^2 y f actúan igual sobre los puntos de $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$, pues ambas los fijan, y $\overrightarrow{f^2} = \overrightarrow{f}^2 = \overrightarrow{f}$, luego $f^2 = f$.

[2 $\implies$ 3] $\overrightarrow{f}^2 = \overrightarrow{f^2} \overset{f^2=f}{=} \overrightarrow{f}$, luego $\overrightarrow{f}$ es proyección vectorial. Por otro lado, dado $P \in \mathcal{E}$, $f(P) = f(f(P)) \in \text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

[3 $\implies$ 1] Sea $A \in \text{Fix}(f)$, entonces $\text{Fix}(f) = A + \text{Inv}(\overrightarrow{f})$, pero $\overrightarrow{f}$ es la proyección de base $\text{Inv}(\overrightarrow{f})$ y dirección $\text{Nuc}(\overrightarrow{f})$. Ahora bien, dados $\vec{w}_1 \in \text{Inv}(\overrightarrow{f}), \vec{w}_2 \in \text{Nuc}(\overrightarrow{f})$, $f(A + \vec{w}_1 + \vec{w}_2) = f(A) + \overrightarrow{f}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = A + \vec{w}_1$, luego f es la proyección de base $A + \text{Inv}(\overrightarrow{f}) = \text{Fix}(f)$ y dirección $\text{Nuc}(\overrightarrow{f})$.

Dada una transformación afín f, f es una simetría afín (con $\mathcal{L} = \text{Fix}(f)$ y $W_2 = \text{Opp}(\overrightarrow{f})$) $\iff$ f es involutiva $\iff$ $\overrightarrow{f}^2 = id_V \wedge \text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

[1 $\implies$ 2] f^2 e $id_{\mathcal{E}}$ actúan igual sobre los puntos de $\text{Fix}(f)$, pues ambos los fijan, y $\overrightarrow{f^2} = \overrightarrow{f}^2 = id_V$, luego $f^2 = f$.

[2 $\implies$ 3] $\overrightarrow{f}^2 = \overrightarrow{f^2} = \overrightarrow{id_{\mathcal{E}}} = id_V$. Por otro lado, dado $P \in \mathcal{E}$ y sea $A := \frac{P+f(P)}{2}$ entonces $f(A) = \frac{f(P)+f(f(P))}{2} = \frac{f(P)+P}{2} = A \in \text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

[3 $\implies$ 1] Sea $A \in \text{Fix}(f)$, entonces $\text{Fix}(f) = A + \text{Inv}(\overrightarrow{f})$, pero $\overrightarrow{f}$ es la simetría de base $\text{Inv}(\overrightarrow{f})$ y dirección $\text{Opp}(\overrightarrow{f})$. Ahora bien, dados $\vec{w}_1 \in \text{Inv}(\overrightarrow{f}), \vec{w}_2 \in \text{Opp}(\overrightarrow{f})$, $f(A + \vec{w}_1 + \vec{w}_2) = f(A) + \overrightarrow{f}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = A + \vec{w}_1 - \vec{w}_2$, luego f es la simetría de base $A + \text{Inv}(\overrightarrow{f}) = \text{Fix}(f)$ y dirección $\text{Opp}(\overrightarrow{f})$.

Capítulo 3

Espacios euclídeos

Un **producto escalar** en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es una aplicación $V \times V \to \mathbb{R}$, representada por $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$, que verifica que $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$:

1. Es **simétrico**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. Es **lineal** (en cada variable): $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \lambda\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{u} \cdot \vec{w}$.
3. Es **definido positivo**: $\vec{v} \neq \vec{0} \implies \vec{v} \cdot \vec{v} > 0$.

Un **espacio vectorial euclídeo** es un espacio vectorial real en el que hay definido un producto escalar. Todo subespacio vectorial suyo es también euclídeo. Ejemplos:

- El **producto escalar usual** en $\mathbb{R}^n$ viene dado por $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, es decir,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} - & \vec{v} & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \vec{w} \\ | \end{pmatrix}$$

- El **producto escalar integral** en el espacio $\mathcal{C}[a, b]$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$, o en sus subespacios $\mathcal{P}[a, b]$ y $\mathcal{P}_n[a, b]$ de funciones polinómicas arbitrarias y de grado máximo n, respectivamente, viene dado por

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

3.1. Norma y coseno

La **norma**, **módulo** o **longitud** de un vector $\vec{v}$ es $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$, y $\vec{v}$ es **unitario** si $\|\vec{v}\| = 1$. Propiedades:

1. $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$.
2. $\|r\vec{v}\| = |r|\|\vec{v}\|$, y en particular $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ es unitario.
3. **Teorema del coseno**: $\|\vec{v} \pm \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \pm 2\vec{v} \cdot \vec{w}$.

4. **Desigualdad de Cauchy-Schwartz**: $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$, y la igualdad se cumple si y sólo si no son proporcionales.

   Si $\vec{v} = 0$ es trivial. Si no, para cada $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \|x\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 x^2 - (2\vec{v}\cdot\vec{w})x + \|\vec{w}\|^2$. Luego tenemos un polinomio de 2^o grado con a lo más una raíz real (pues $\|x\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 0 \iff x\vec{v} - \vec{w} = 0$), de modo que el discriminante $4(\vec{v}\cdot\vec{w})^2 - 4\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2$ no puede ser estrictamente positivo, es decir, debe ser $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$.

5. **Desigualdades de Minkowski y triangular**: $\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| \leq \|\vec{v} \pm \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

   Tomando cuadrados, $\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \pm 2\vec{v}\cdot\vec{w} \leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$, y cancelando $\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ y aplicando Cauchy-Schwartz tenemos el resultado.

Llamamos **coseno** del ángulo formado por dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ a

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) := \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **ortogonales** o **perpendiculares** ($\vec{v}\perp\vec{w}$) si $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. Así, $\vec{0}$ es ortogonal a todos y $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ son ortogonales si y sólo si $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. Del teorema del coseno se deduce el **teorema de Pitágoras**:

$$\vec{v}\perp\vec{w} \iff \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

3.2. Conjuntos ortogonales

Se dice que $\vec{x} \in V$ es ortogonal al subespacio U si lo es a todos los vectores de U, o por linealidad a los de un conjunto generador de U cualquiera. Llamamos **subespacio ortogonal** de U en V, escrito $U^\perp$, al conjunto de todos los vectores de V ortogonales a U, que por la linealidad del producto escalar es un subespacio (incluso aunque U no lo sea). Sólo el vector nulo es ortogonal a sí mismo, luego $U \cap U^\perp = 0$.

Dos subespacios U y W son **ortogonales** si $\forall \vec{u} \in U, \vec{w} \in W; \vec{u}\perp\vec{w}$. Si $\dim(U) + \dim(W) > \dim(V)$, diremos que U y W son ortogonales cuando lo sean $U^\perp$ y $W^\perp$. Si $U + W = V$, diremos que W es un **complemento ortogonal** de U (o al revés).

Un conjunto de vectores en un espacio euclídeo V es **ortogonal** si sus vectores son no nulos y ortogonales dos a dos, y es **ortonormal** si además son unitarios. Si en un conjunto ortogonal dividimos cada vector por su norma, nos queda un conjunto ortonormal que genera el mismo subespacio.

Todo conjunto ortogonal $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es linealmente independiente. **Demostración:** Si no lo fuera, habría un vector combinación lineal del resto, por ejemplo, $\vec{u}_1 = a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_m\vec{u}_m$, y se tendría que

$$0 \neq \vec{u}_1\cdot\vec{u}_1 = \vec{u}_1\cdot(a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_m\vec{u}_m) = a_2(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2) + \cdots + a_m(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_m) = 0\#$$

Por esto también hablamos de **bases ortogonales** u **ortonormales**. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$, la base canónica es una base ortonormal.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **ortogonal** si $A^t = A^{-1}$, si y sólo si sus columnas (o filas) forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. **Demostración:** Si $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ y A es la matriz que tiene por columnas estos vectores, A^tA es una matriz cuadrada $n \times n$ con $(A^tA)_{ij} = \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j$, luego los vectores son ortogonales si y sólo si A^tA es diagonal (sin ceros en la diagonal), y son ortonormales si y sólo si $A^tA = I_n$.

3.2.1. Método de Gram-Schmidt

Dado un conjunto ortogonal $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k\}$ y $\vec{x}\notin U=<\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k>$, el vector $\vec{u}_{k+1}:=\vec{x}-\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1-\cdots-\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2}\vec{u}_k$ es ortogonal a los del conjunto y $<\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k,\vec{u}_{k+1}>=<\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k,\vec{x}>$.
Demostración: El que ambos generen el mismo subespacio es consecuencia de que $\vec{u}_{k+1}-\vec{x}\in<\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k>$. Además, dado $j\in\{1,\ldots,k\}$, $\vec{u}_{k+1}\cdot\vec{u}_j=\vec{x}\cdot\vec{u}_j-\sum_{i=1}^k\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|^2}\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j=\vec{x}\cdot\vec{u}_j-\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}\vec{u}_j\cdot\vec{u}_j=0$, luego $\vec{u}_{k+1}\perp U$.

De aquí que todo subespacio $U=\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m\}$ de V admite una base ortogonal $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m\}$ tal que $<\vec{x}_1>=<\vec{u}_1>,\ldots,<\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m>=<\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m>$. Podemos obtener esta base por el **algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt**: Tomamos $\vec{u}_1=\vec{x}_1$ y, para cada $j\in\{1,\ldots,m\}$, $\vec{u}_j=\vec{x}_j-\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\vec{x}_j\cdot\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|^2}\vec{u}_i$.

Por tanto, todo subespacio U de V tiene una base ortonormal, que podemos ampliar a una base ortonormal de V, y los vectores añadidos son una base ortonormal de $U^\perp$, con lo que $U\oplus U^\perp=V$.

De aquí que, si U y W son subespacios de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, entonces $(U^\perp)^\perp=U, U\subseteq W \iff W^\perp\subseteq U^\perp, U^\perp\cap W^\perp=(U+W)^\perp$ y $U^\perp+W^\perp=(U\cap W)^\perp$.

En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, si U está generado por las filas de la matriz A entonces $U^\perp=\text{Nuc}(A)$, y viceversa.

3.2.2. Coeficientes de Fourier y proyección ortogonal

Dados $\mathcal{B}=\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m\}$ y $\vec{x}\in V$, los **coeficientes de Fourier** de $\vec{x}$ en $\mathcal{B}$ son los escalares $r_i=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|^2}$ para $i\in\{1,\ldots,m\}$. Si $\vec{x}\in<\mathcal{B}>$, estas son sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$, pues $\vec{x}\cdot\vec{u}_i=\left(\sum_{j=1}^m r_j\vec{u}_j\right)\cdot\vec{u}_i=\sum_{j=1}^m r_j(\vec{u}_j\cdot\vec{u}_i)=r_i\|\vec{u}_i\|^2$.

Llamamos **proyección ortogonal** de V sobre U a la aplicación lineal $\pi_U:V=U\oplus U^\perp\to U$ tal que si $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1\in U$ y $\vec{v}_2\in U^\perp$ entonces $\pi_U(\vec{v})=\vec{v}_1$. Si $r_1,\ldots,r_m$ son los coeficientes de Fourier de $\vec{v}$ sobre la base ortogonal $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m\}$ de U, entonces $\pi_U(\vec{v})=\sum_{i=1}^m r_i\vec{u}_i$.

$\vec{u}:=\pi_U(\vec{v})$ es la **mejor aproximación** de $\vec{v}$ en U, es decir, $\text{mín}\{\|\vec{v}-\vec{z}\|\}_{\vec{z}\in U}=\|\vec{v}-\vec{u}\|$.
Demostración: Sea $\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}$, si $\vec{z}\in U$ entonces $\vec{u}-\vec{z}\perp\vec{w}$, y por el teorema de Pitágoras, $\|\vec{v}-\vec{z}\|=\|\vec{w}+\vec{u}-\vec{z}\|=\sqrt{\|\vec{w}\|^2+\|\vec{u}-\vec{z}\|^2}$, con lo que el valor mínimo de $\|\vec{v}-\vec{z}\|$ es $\|\vec{w}\|$ y se alcanza cuando $\vec{z}=\vec{u}$.

La **simetría ortogonal** de V sobre U es la aplicación lineal $\sigma_U:V\to V$ con $\sigma_U(\vec{v})=\vec{v}_1-\vec{v}_2=2\pi_U(\vec{v})-\vec{v}$ para todo $\vec{v}\in V$, siendo $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1\in U$ y $\vec{v}_2\in U^\perp$.

3.2.3. Productos vectorial y mixto

En $\mathbb{R}^3$, el **producto vectorial** de $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ es el vector

$$\vec{v}\wedge\vec{w}:=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & v_1 & w_1\\ \vec{e}_2 & v_2 & w_2\\ \vec{e}_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}$$

y el **producto mixto** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el escalar $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$. Propiedades:

1. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

2. $\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v})$.

3. $\vec{v} \wedge (\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2) = \vec{v} \wedge \vec{w}_1 + \mu\vec{v} \wedge \vec{w}_2$.

4. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ es perpendicular a ambos, por lo que genera la recta ortogonal al plano que determinan: $< \vec{v} \wedge \vec{w} >=< \vec{v}, \vec{w} >^{\perp}$.
   $\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}$.

5. $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2 + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2$, luego $\left(\frac{\|\vec{v}\wedge\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right)^2 + \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right)^2 = 1$.

Por la última propiedad, el **seno** del ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumple que

$$|\sin(\vec{v}, \vec{w})| = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

Por tanto, el **área del paralelogramo** dado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\|\vec{x} \wedge \vec{z}\| = \|\vec{x}\|(\|\vec{z}\||\sin(\vec{x}, \vec{z})|)$, y el **volumen del paralelepípedo** determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|(\|\vec{u}\||\cos(\vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{u})|)$.

3.3. Espacios afines euclídeos

Un **espacio afín euclídeo** es un espacio afín E cuyo espacio vectorial asociado V es euclídeo. Si V tiene dimensión finita, llamamos **sistema de referencia ortonormal** o **referencial ortonormal** de E a un referencial cartesiano $\Re = (O, \mathcal{B})$ en el que $\mathcal{B}$ es base ortonormal de V. Denotamos con E un espacio afín euclídeo de dimensión finita y E_n a $\mathbb{R}^n$ con su estructura afín y euclídea estándar.

Definimos la **distancia** entre dos puntos P y Q como $d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$, y por las propiedades de la norma, $d(P, Q) \geq 0$ con $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$, $d(P, Q) = d(Q, P)$ y $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$, por lo que se trata de una métrica. En particular, si P y Q tienen coordenadas $(p_1, \dots, p_n)$ y $(q_1, \dots, q_n)$ en un referencial ortonormal, entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2}$$

La distancia entre dos variedades $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ se define como $d(\mathcal{L}, \mathcal{L}') := \inf\{d(P, P')\}_{P\in\mathcal{L}, P'\in\mathcal{L}'}$, y la distancia de un punto Q a una variedad $\mathcal{L}$ como $d(Q, \mathcal{L}) = \inf\{d(P, Q)\}_{P\in\mathcal{L}}$.

Dos variedades $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son **ortogonales** o **perpendiculares** ($\mathcal{L}\perp\mathcal{L}'$) si lo son sus direcciones, y llamamos **variedad perpendicular** a $\mathcal{L}$ que pasa por Q a la variedad $Q + W^{\perp}$.

Así, si $\ell_1 = P_1+ < \vec{v}_1 >$ y $\ell_2 = P_2+ < \vec{v}_2 >$ son rectas en E_3 que se cruzan, sea $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ la dirección perpendicular a ambas, como $\vec{v}_3 \notin< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$, existe una única recta con esta dirección que corte a ℓ_1 y ℓ_2, que llamamos **perpendicular común** de ambas. Para calcularla, hallamos el punto $Q \in \ell_1 \cap (P_2+ < \vec{v}_2, \vec{v}_3 >)$ y tomamos la recta $Q+ < \vec{v}_3 >$, o buscamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{(P_1 + \lambda_1\vec{v}_1)(P_2 + \lambda_2\vec{v}_2)} = \lambda_3\vec{v}_3$, es decir, tales que $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda_1\vec{v}_1 - \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$, y tomamos la recta $(P_1 + \lambda_1\vec{v}_1)+ < \vec{v}_3 >$.

Dados un punto Q y una variedad $\mathcal{L} = P + W$ en E, definimos la **proyección ortogonal** de Q sobre $\mathcal{L}$ como el único punto $Q' \in \mathcal{L} \cap (Q + W^{\perp})$, y el **simétrico ortogonal** como el punto $Q'' = Q + 2\overrightarrow{QQ'}$. Con esto, $d(Q, \mathcal{L}) = d(Q, Q')$. **Demostración:** $Q' \in \mathcal{L}$ y $\overrightarrow{QQ'} \in W^\perp$, luego para un $X \in \mathcal{L}$ arbitrario, $Q', X \in \mathcal{L} \implies \overrightarrow{Q'X} \in W \implies \overrightarrow{QQ'} \perp \overrightarrow{Q'X} \implies d(Q, X) = \sqrt{d(Q, Q')^2 + d(Q', X)^2}$, con lo que el mínimo se alcanza en $X = Q'$.

Ejemplos:

- La distancia de un punto $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ a un hiperplano $\mathcal{H}$ de ecuación $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ es $d(Q, \mathcal{H}) = \frac{|a_1q_1 + \cdots + a_nq_n + b|}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|}$.
  La recta ortogonal a $\mathcal{H}$ por Q es $Q + < \vec{a} >$ con $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, y sus puntos tienen la forma $(q_1 + \lambda a_1, \ldots, q_n + \lambda a_n)$. Para cierto λ_0 se tiene $Q' \coloneqq Q + \lambda_0\vec{a} \in \mathcal{H}$. Sustituyendo, $0 = a_1(q_1 + \lambda_0 a_1) + \cdots + a_n(q_n + \lambda_0 a_n) + b = a_1q_1 + \cdots + a_nq_n + b + \lambda_0\|\vec{a}\|^2$, luego $\lambda_0 = -\frac{a_1q_1 + \cdots + a_nq_n + b}{\|\vec{a}\|^2}$, y la fórmula se obtiene de que $d(Q, Q') = |\lambda_0|\|\vec{a}\|$.

- La distancia de un punto Q a una recta $\ell = P + < \vec{v} = (v_1, v_2) >$ en E_2 es $d(Q, \ell) = \frac{|\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|}$.
  La ecuación implícita de la recta es $\det(\overrightarrow{PX}, \vec{v}) = 0$, cuyos coeficientes, $(-v_2, v_1)$, tienen la misma norma que $\|\vec{v}\|$, con lo que la fórmula se deduce del ejemplo anterior.

- La distancia de un punto Q a un plano $\pi = P + < \vec{v}, \vec{w} >$ es $d(Q, \pi) = \frac{|\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{w})|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$.
  La ecuación implícita del plano es $\det(\overrightarrow{PX}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, cuyos coeficientes son los del vector ortogonal al plano, $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

- La distancia de un punto Q a una recta $\ell = P + < \vec{v} >$ es $d(Q, \ell) = \frac{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{PQ}\|}{\|\vec{v}\|}$.
  Si Q' es la proyección ortogonal de Q sobre ℓ, se tiene $d(Q, \ell) = \|\overrightarrow{Q'Q}\|$ y $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{Q'Q}$ con $\overrightarrow{PQ'}$ proporcional a $\vec{v}$ y $\overrightarrow{Q'Q} \perp \vec{v}$, luego $\vec{v} \wedge \overrightarrow{PQ} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{Q'Q}$ y entonces $\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{PQ}\| = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{Q'Q}\|$, de donde se deduce la fórmula.

Dadas $\mathcal{L}_1 = P_1 + W_1$ y $\mathcal{L}_2 = P_2 + W_2$, $d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = d(P_1, P_2 + (W_1 + W_2))$. **Demostración:** Veamos que los conjuntos $A = \{d(X_1, X_2)\}_{X_1 \in \mathcal{L}_1, X_2 \in \mathcal{L}_2}$ y $B = \{d(P_1, X)\}_{X \in P_2 + (W_1 + W_2)}$ son iguales.

$\subseteq$] Sean $X_1 = P_1 + \vec{w}_1$ y $X_2 = P_2 + \vec{w}_2$ con $\vec{w}_1 \in W_1$ y $\vec{w}_2 \in W_2$, entonces

$$d(X_1, X_2) = \|\overrightarrow{X_1X_2}\| = \|\overrightarrow{(P_1 + \vec{w}_1)(P_2 + \vec{w}_2)}\| = \|\overrightarrow{P_1(P_2 + \vec{w}_2 - \vec{w}_1)}\| \in B$$

$\supseteq$] Dado $X = P_2 + \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ con $\vec{w}_1 \in W_1$ y $\vec{w}_2 \in W_2$, entonces

$$d(P_1, X) = \|\overrightarrow{P_1(P_2 + \vec{w}_1 + \vec{w}_2)}\| = \|\overrightarrow{(P_1 - \vec{w}_1)(P_2 + \vec{w}_2)}\| \in A$$

Capítulo 4

Transformaciones ortogonales

Una **transformación ortogonal** de un espacio vectorial euclídeo V es una aplicación $f : V \to V$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{w} = f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w})$ para cualesquiera $\vec{v}, \vec{w} \in V$, y el conjunto de estas transformaciones se conoce como **grupo ortogonal** de V ($\mathcal{O}(V)$). Si la aplicación es entre espacios distintos hablamos de una **aplicación ortogonal**.

Una aplicación $f : V \to V$ es una transformación ortogonal si y sólo si es lineal y conserva normas.

$\implies$] Si se conservan productos escalares se conservan normas. Sean $r \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Para ver que $f(r\vec{v}) = rf(\vec{v})$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\|f(r\vec{v}) - rf(\vec{v})\|^2 = \|f(r\vec{v})\|^2 + \|rf(\vec{v})\|^2 - 2f(r\vec{v}) \cdot (rf(\vec{v})) = \\
&\qquad = \|r\vec{v}\|^2 + r^2\|f(\vec{v})\|^2 - 2r(f(r\vec{v}) \cdot f(\vec{v})) = r^2\|\vec{v}\|^2 + r^2\|\vec{v}\|^2 - 2r(r\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0
\end{aligned}$$

Para ver que $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$,

$$\begin{aligned}
&\|f(\vec{v} + \vec{w}) - f(\vec{v}) - f(\vec{w})\|^2 = \\
&= \|f(\vec{v}+\vec{w})\|^2 + \|f(\vec{v})\|^2 + \|f(\vec{w})\|^2 + 2(f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) - f(\vec{v}+\vec{w}) \cdot f(\vec{v}) - f(\vec{v}+\vec{w}) \cdot f(\vec{w})) = \\
&\qquad = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w} - (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{w}) = \\
&\qquad\qquad = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + (\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}) - 2\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = 0
\end{aligned}$$

$\impliedby$] $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$, luego $\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$ y por tanto si una aplicación lineal conserva normas también conserva productos escalares.

Propiedades de las transformaciones ortogonales:

1. $U \perp W \implies f(U) \perp f(W)$.
2. Su composición es ortogonal.
   $\|g(f(\vec{v}))\| = \|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$.
3. Son inyectivas.
   $(f(\vec{v}) = \vec{0} \implies \|\vec{v}\| = \|f(\vec{v})\| = 0 \implies \vec{v} = \vec{0}) \implies \mathrm{Nuc}(f) = 0$.

4. La inversa de una transformación ortogonal biyectiva es ortogonal.
   $\|f^{-1}(\vec{v})\| = \|f(f^{-1}(\vec{v}))\| = \|\vec{v}\|$.

5. Si V tiene dimensión finita, sus transformaciones ortogonales son biyectivas y $\mathcal{O}(V)$ con la composición de aplicaciones es un grupo.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base ortonormal de V. Otra base $\mathcal{B}'$ de V es ortonormal si $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es ortogonal. $f : V \to V$ es ortogonal si y sólo si $M_{\mathcal{B}}(f)$ es ortogonal.

$\Longrightarrow$] Sea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, si f es ortogonal, $A^t \cdot A = (f(\vec{v}_i) \cdot f(\vec{v}_j))_{ij} = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)_{ij} = (\delta_{ij})_{ij} = I_n$.

$\Longleftarrow$] $A^t \cdot A = (f(\vec{v}_i) \cdot f(\vec{v}_j))_{ij}$. Si A es ortogonal, $f(\vec{v}_i) \cdot f(\vec{v}_j) = \delta_{ij}$, por lo que si $\vec{v} = \sum_i r_i \vec{v}_i$ entonces $f(\vec{v}) = \sum_i r_i f(\vec{v}_i)$ y entonces $\|f(\vec{v})\|^2 = (\sum_i r_i f(\vec{v}_i))(\sum_j r_j f(\vec{v}_j)) = \sum_i \sum_j r_i r_j f(\vec{v}_i) \cdot f(\vec{v}_j) = \sum_i \sum_j r_i r_j \delta_{ij} = \sum_i r_i^2 = \|\vec{v}\|^2$.

El determinante de una transformación ortogonal solo puede ser 1 o -1, pues $1 = \det(I_n) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2$. $f \in \mathcal{O}(V)$ es **positiva** o **directa** ($f \in \mathcal{O}^+(V)$) si $\det(f) = 1$, y es **negativa** o **inversa** ($f \in \mathcal{O}^-(V)$) si $\det(f) = -1$. Claramente $\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}^+(V) \dot{\cup} \mathcal{O}^-(V)$. Se cumple la **regla de los signos**: La composición de transformaciones del mismo signo es positiva, y la de transformaciones de distinto signo es negativa.

Los únicos valores propios que puede tener $f \in \mathcal{O}(V)$ son ± 1, y los subespacios $\mathrm{Inv}(f)$ y $\mathrm{Opp}(f)$, que pueden ser nulos, son ortogonales. Además, si $\dim(V)$ es impar, al menos uno de estos subespacios es no nulo. **Demostración:** El polinomio característico de f tiene pues grado impar y por tanto al menos una raíz real, que por lo anterior debe ser ± 1, y el correspondiente subespacio propio es no nulo.

Si U es un subespacio invariante de $f \in \mathcal{O}(V)$, también lo es $U^\perp$, y de hecho, $f(U) = U$, $f(U^\perp) = U^\perp$, $f|_U \in \mathcal{O}(U)$ y $f|_{U^\perp} \in \mathcal{O}(U^\perp)$. **Demostración:** Como f es inyectiva y la dimensión finita, $f(U) \subseteq U$ implica $f(U) = U$, y por la conservación del producto escalar, $f(U^\perp) \perp f(U)$, luego $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ y por tanto $f(U^\perp) = U^\perp$. Como f conserva el producto escalar, también lo conservan $f|_U$ y $f|_{U^\perp}$.

Dadas $g \in \mathcal{O}(U)$ y $h \in \mathcal{O}(U^\perp)$, existe una única $f \in \mathcal{O}(V)$ con $f|_U = g$ y $f|_{U^\perp} = h$. Se cumple entonces que si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases ortonormales respectivas de U y $U^\perp$ entonces

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}_1}(g) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}_2}(h) \end{array}\right)$$

Demostración: Si $V = U \oplus W$ y tenemos $g : U \to U$ y $h : W \to W$, entonces $f : V \to V$ dada por $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \mapsto g(\vec{u}) + h(\vec{w})$ es lineal y el único endomorfismo con $f|_U = g$ y $f|_W = h$. Si además $W = U^\perp$, y g y h son ortogonales, entonces por el teorema de Pitágoras, $\|f(\vec{u}+\vec{w})\|^2 = \|g(\vec{u}) + h(\vec{w})\|^2 = \|g(\vec{u})\|^2 + \|h(\vec{w})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{w}\|^2$.

En adelante llamamos $\mathcal{E}_n$ a cualquier espacio vectorial euclídeo isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar ordinario, pues todos los de igual dimensión sobre el mismo cuerpo son isomorfos.

Dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en $\mathcal{E}_n$ son **equivalentes** si $\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$. **Orientar** el espacio $\mathcal{E}_n$ es elegir en él una base, de modo que las bases equivalentes a esta son **positivas** o **directas** y el resto son **negativas** o **inversas**.

4.1. Transformaciones ortogonales en $\mathcal{E}_1$

Un vector en $\mathcal{E}_1$ solo puede ser llevado por una transformación ortogonal a sí mismo y su inverso, luego $\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_1) = \{id_{\mathcal{E}_1}\}$ y $\mathcal{O}^-(\mathcal{E}_1) = \{-id_{\mathcal{E}_1}\}$.

4.2. Transformaciones ortogonales en $\mathcal{E}_2$

Sea $M = M_{\mathcal{B}}(f)$ para una base $\mathcal{B}$ arbitraria. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal positiva, entonces $M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, luego $d = a$ y $c = -b$. Por tanto

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$. Escribimos $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R}) \coloneqq \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_2)$.

- Si $b = 0$ se tiene $a^2 = 1$, con lo que $a = \pm 1$ y se obtienen las transformaciones $\pm id_{\mathcal{E}_2}$. En particular, $id_{\mathcal{E}_2}$ cumple $\dim(\mathrm{Inv}(f)) = 2$ y $\dim(\mathrm{Opp}(f)) = 0$, mientras que $-id_{\mathcal{E}_2}$ cumple lo contrario.
- Si $b \neq 0$, el polinomio característico tiene raíces complejas, luego $\dim(\mathrm{Inv}(f)) = \dim(\mathrm{Opp}(f)) = 0$.

Dadas $f, g \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_2)$, $f \circ g = g \circ f$. **Demostración:**

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Llamamos a la aplicación g_θ dada por $M_{\mathcal{B}}(g_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la **rotación** o **giro** de ángulo θ. Se cumple que $g_{\theta'} \circ g_\theta = g_{\theta+\theta'}$ y $g_\theta^{-1} = g_{-\theta}$.

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal negativa, entonces $M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$, luego $a = -d$ y $b = c$. Por tanto

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$. Por el polinomio característico hallamos que $\mathrm{Inv}(f)$ y $\mathrm{Opp}(f)$ son rectas ortogonales, y decimos que f es la **simetría axial** sobre $\mathrm{Inv}(f)$.

Toda rotación puede expresarse como composición de 2 simetrías axiales, y una de ellas puede elegirse arbitrariamente. **Demostración:** Sea f la rotación y σ una simetría axial, entonces $\sigma' \coloneqq \sigma \circ f$ es negativa y por tanto una simetría axial. Entonces $\sigma \circ \sigma' = \sigma \circ \sigma \circ f = f$. Si queremos que σ aparezca a la derecha, hacemos un razonamiento análogo con $\sigma'' \coloneqq f \circ \sigma$.

4.3. Transformaciones ortogonales en $\mathcal{E}_3$

Sea $f \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$. Si $\dim(\mathrm{Inv}(f)) = 3$, todo vector de V es invariante y por tanto $f = id_{\mathcal{E}_3}$, una transformación positiva.

Si $\dim(\mathrm{Inv}(f)) = 2$, sea $H = \mathrm{Inv}(f)$, entonces $f|_{H^\perp}$ es una transformación ortogonal de la recta $H^\perp$ que no puede tener invariantes, luego $H^\perp = \mathrm{Opp}(f)$ y $\dim(\mathrm{Opp}(f)) = 1$. Entonces $f = \sigma_H$ es la **simetría especular** sobre H, una transformación negativa.

Si $\dim(\mathrm{Inv}(f)) = 1$, sea $\ell = \mathrm{Inv}(f)$, entonces $f|_{\ell^\perp}$ es una transformación ortogonal del plano $\ell^\perp$ sin vectores invariantes, luego es una rotación distinta de la identidad, de ángulo $\theta \neq 0$. Entonces f es la **rotación** de eje ℓ y ángulo θ, una transformación positiva. En particular, si $\theta = \pi$ (**simetría axial**), entonces $f|_{\ell^\perp} = -id_{\ell^\perp}$ y por tanto $\dim(\mathrm{Opp}(f)) = 2$, mientras que en otro caso $\dim(\mathrm{Opp}(f)) = 0$.

Si $\dim(\mathrm{Inv}(f)) = 0$ entonces $\mathrm{Opp}(f) \neq 0$. Sea entonces $\vec{v} \in \mathrm{Opp}(f)$ y por tanto $\ell :=< \vec{v} > \subseteq \mathrm{Opp}(f)$. Entonces $f|_\ell = -id_\ell$, mientras que $f|_{\ell^\perp}$ es una transformación ortogonal del plano $\ell^\perp$ sin vectores invariantes y por tanto una rotación distinta de la identidad, de ángulo $\theta \neq 0$. Decimos que f es una **rotación con simetría** de eje ℓ y ángulo θ, una transformación negativa. En particular, si $\theta = \pi$ entonces $f|_{\ell^\perp} = -id_{\ell^\perp}$ y por tanto $f = -id_{\mathcal{E}_3}$, con $\dim(\mathrm{Opp}(f)) = 3$, mientras que si $\theta \neq \pi$ entonces $\mathrm{Opp}(f|_{\ell^\perp}) = 0$ y por tanto $\dim(\mathrm{Opp}(f)) = 1$.

Así pues, en general, $\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ son las rotaciones (incluyendo de ángulo 0) y $\mathcal{O}^-(\mathcal{E}_3)$ son las rotaciones con simetría.

Para construir la matriz de una transformación en $\mathcal{E}_3$, tomamos una base «cómoda» $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y aplicamos la fórmula de cambio de base. Entonces:

	Rotación (eje $< \vec{v}_1 >$, ángulo θ)	Rotación con simetría (ídem)
Matriz	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Traza	$1 + 2\cos\theta$	$-1 + 2\cos\theta$
Det.	1	-1

Aquí se incluyen la identidad, menos identidad y simetrías axiales y especulares como casos especiales de estos dos. La traza de un endomorfismo (suma de los elementos de la diagonal de la matriz) no depende de la base, pues $\mathrm{tr}(M') = \mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}(MPP^{-1}) = \mathrm{tr}(M)$, pudiendo servir para determinar el ángulo de una transformación dada su matriz en cualquier base.

Toda rotación se expresa como composición de 2 simetrías especulares, de las que una se puede elegir arbitrariamente siempre que su base contenga al eje de la rotación. Por tanto toda rotación con simetría se expresa como composición de tres simetrías especulares. **Demostración:** Sea f una rotación de eje F y σ la simetría especular sobre un plano que contiene a F, entonces $\sigma' := \sigma \circ f$ es negativa con vectores invariantes y por tanto otra simetría especular, y entonces $\sigma \circ \sigma' = \sigma \circ \sigma \circ f = f$. Si queremos que σ aparezca a la derecha basta hacer lo mismo con $\sigma'' := f \circ \sigma$.

Capítulo 5

Movimientos

Una **isometría** o **movimiento** de E es una aplicación $f : E \to E$ con $d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$ (también se puede hablar de isometrías entre espacios distintos). El conjunto que forman es el **grupo de los movimientos** de E, escrito $\mathrm{Is}(E)$. Una aplicación $f : E \to E$ es un movimiento si y sólo si es afín y $\overrightarrow{f} : V \to V$ es ortogonal.

$\Longrightarrow$] Fijado $A \in E$, demostramos que si $\ell : V \to V$ dada por $\ell(\vec{v}) := \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{v})}$ es lineal, entonces f es afín con $\overrightarrow{f} = \ell$. En efecto, para $P \in E$ arbitrario, $\ell(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\overrightarrow{AP})} = \overrightarrow{f(A)f(P)}$, y dados $P, Q \in E$, $\ell(\overrightarrow{PQ}) = \ell(-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}) = -\ell(\overrightarrow{AP})+\ell(\overrightarrow{AQ}) = -\overrightarrow{f(A)f(P)}+\overrightarrow{f(A)f(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$.

A continuación veamos que ℓ es ortogonal, y por tanto será lineal y f será afín con $\overrightarrow{f} = \ell$. Dados $\vec{v}, \vec{w} \in V$, si $P := A+\vec{v}$ y $Q := A+\vec{w}$, deducimos $\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{w}-\vec{v}\|^2\right)$ $= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AP}\|^2 + \|\overrightarrow{AQ}\|^2 - \|\overrightarrow{PQ}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(d(A,P)^2 + d(A,Q)^2 - d(P,Q)^2\right)$. Pero del mismo modo, $\ell(\vec{v})\cdot\ell(\vec{w}) = \frac{1}{2}\left(d(\ell(A),\ell(P))^2 + d(\ell(A),\ell(Q))^2 - d(\ell(P),\ell(Q))^2\right)$, y como f conserva distancias, entonces $\ell(\vec{v})\cdot\ell(\vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{w}$.

$\Longleftarrow$] $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = d(f(P), f(Q))$.

Propiedades: Si f y g son isometrías:

- $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \implies f(\mathcal{L}_1) \perp f(\mathcal{L}_2)$.
- $f \circ g$ es una isometría.
- Si f es biyectiva, f^{-1} es una isometría.
- f es inyectiva.
- Si $\dim(E) < \infty$, $\mathrm{Is}(E)$ es un grupo con la composición de aplicaciones.

Un movimiento f es **positivo/directo** o **negativo/inverso** según lo sea $\overrightarrow{f}$. Llamamos $\mathrm{Is}^+(E)$ al conjunto de todos los movimientos positivos de E, e $\mathrm{Is}^-(E)$ al de todos los negativos.

5.1. Movimientos en E_1

Si $\overrightarrow{f} = id$ entonces $f = t_{\vec{v}}$ con $\vec{v} = \overrightarrow{Qf(Q)}$ para $Q \in E$ arbitrario. Si $\overrightarrow{f} = -id$ entonces $f = s_P$ con $P = \frac{Q+f(Q)}{2}$ para $Q \in E$ arbitrario.

5.2. Movimientos en E_2

Además de los dos casos posibles en E_1:

- Si $\overrightarrow{f}$ es una simetría ortogonal, si hay puntos fijos entonces f es la **simetría ortogonal (afín)** de base $\mathrm{Fix}(f)$ (y con dirección $\mathrm{dir}(\mathrm{Fix}(f))^\perp$), y de lo contrario es la **simetría ortogonal con deslizamiento** de base $\mathcal{L} = A + \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ y con vector de deslizamiento $\vec{v} = \overrightarrow{Af(A)}$, siendo $A := \frac{Q+f(Q)}{2}$ para $Q \in E$ arbitrario, de modo que $f = s_{\mathcal{L}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{L}}$.
  En efecto, dado $Q \in E$, si $\overrightarrow{Qf(Q)} = \vec{v} + \vec{w}$ con $\vec{v} \in W = \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ y $\vec{w} \in W^\perp$ y llamamos $A := \frac{Q+f(Q)}{2} = Q + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})$, como $\overrightarrow{f} = \sigma_W$ es la simetría de base W y dirección $W^\perp$, se tiene $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{QA}) = \overrightarrow{f}(\frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})) = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$, con lo que si $g = t_{-\vec{v}} \circ f$ se tiene $g(A) = (t_{-\vec{v}} \circ f)(A) = f(A) - \vec{v} = f(Q) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{QA}) - \vec{v} = f(Q) - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} - \vec{v} = f(Q) - \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}) = A$. Por tanto $\mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$ y como $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$, resulta $g = s_{A+\mathrm{Inv}(\overrightarrow{g})} = s_{\mathcal{L}}$ y $f = t_{\vec{v}} \circ g$, y es fácil comprobar que $t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$.

- Si $\overrightarrow{f} = g_\theta$ es la rotación de ángulo $\theta \neq 0$ entonces $f = \rho_{P,\theta}$ es la **rotación** de centro P y ángulo θ, siendo P el único punto fijo de f, pues $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = 0$.

5.3. Movimientos en E_3

Lo dicho respecto a las traslaciones y simetrías también se aplica aquí, pero también se pueden dar otros dos casos.

- Si $\overrightarrow{f} = \rho_{F,\theta}$ es la rotación de eje F y ángulo θ, si hay puntos fijos entonces $f = \rho_{\ell,\theta}$ es la **rotación** de eje $\ell = \mathrm{Fix}(f)$ y ángulo θ, y de lo contrario $f = t_{\vec{v}} \circ \rho_{\ell,\theta} = \rho_{\ell,\theta} \circ t_{\vec{v}}$ es la **rotación con deslizamiento** o **movimiento helicoidal** de eje ℓ, ángulo θ y vector de deslizamiento $\vec{v}$, donde $\vec{v} = \pi_F(\overrightarrow{Qf(Q)})$ para $Q \in E_3$ arbitrario y $\ell = \mathrm{Fix}(t_{-\vec{v}} \circ f)$.
  Todo movimiento $f : E_3 \to E_3$ con $\overrightarrow{f} = \rho_{F,\theta}$ para $\theta \neq 0$ y $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ es un movimiento helicoidal con los elementos mencionados, y viceversa.

  $\Longrightarrow$] Sea $Q \in E_3$ arbitrario y $\overrightarrow{Qf(Q)} = \vec{v} + \vec{w}$ con $\vec{v} \in F$ y $\vec{w} \in F^\perp$, con lo que $\vec{v}$ es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{Qf(Q)}$ sobre F. Sean ahora $g := t_{-\vec{v}} \circ f$ y $\mathcal{H} := Q + F^\perp$. Entonces $g(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$, pues $Q' \in \mathcal{H} \implies \exists \vec{x} \in F^\perp : Q' = Q + \vec{x} \implies g(Q') = g(Q+\vec{x}) = f(Q+\vec{x}) - \vec{v} = f(Q) - \vec{v} + \overrightarrow{f}(\vec{x}) = Q + \vec{w} + \overrightarrow{f}(\vec{x}) \in Q + F^\perp = \mathcal{H}$. Entonces $g|_{\mathcal{H}}$ es un movimiento para el que $\overrightarrow{g}|_{F^\perp} = \overrightarrow{f}|_{F^\perp}$ es una rotación, luego existe $P \in \mathcal{H}$ con $g(P) = P$. Esto implica $\vec{v} \neq \vec{0}$, pues de lo contrario sería $f = g$ y f tendría puntos fijos. Deducimos pues que g es la rotación $\rho_{\ell,\theta}$ con $\ell = \mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(t_{-\vec{v}} \circ f)$ y por tanto $f = t_{\vec{v}} \circ g$.

$\Longleftarrow$] Sea $g \coloneqq \rho_{\ell,\theta}$, para un $Q \in E_3$ arbitrario, $\overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{Q(g(Q) + \vec{v})} = \vec{v} + \overrightarrow{Qg(Q)}$, donde $\vec{v} \in F$ y $\overrightarrow{Qg(Q)} \in F^{\perp}$, luego $\vec{v}$ es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{Qf(Q)}$ sobre F. Esto prueba que $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, pues de lo contrario se tendría $\overrightarrow{Qf(Q)} = \vec{0}$ y entonces $\vec{v} = \vec{0}$ y $\overrightarrow{f} = \rho_{F,\theta}$.

- Si $\overrightarrow{f} = \rho_{F,\theta} \circ \sigma_{F^{\perp}}$ es una rotación con simetría, entonces $f = \rho_{\ell,\theta} \circ s_{\mathcal{H}} = s_{\mathcal{H}} \circ p_{\ell,\theta}$ es una **rotación con simetría especular** de base $\mathcal{H}$ y ángulo θ, donde $\ell = P + F$ y $\mathcal{H} = P + F^{\perp}$ siendo P el único punto fijo de f (pues $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = 0$).