Geometría de Curvas y Superficies

Bibliografía:

- M. A. Hernández Cifre y J. A. Pastor González (2010). *Un curso de Geometría Diferencial.*

Capítulo 1

Curvas

Una **curva parametrizada diferenciable** es una función $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^\infty$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Llamamos **traza** de la curva a $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ y **vector velocidad** o **vector tangente** a α a $\alpha' := (\alpha_1', \dots, \alpha_n') : I \to \mathbb{R}^n$.

Una curva es **plana** si su traza está contenida en un plano o **alabeada** en otro caso. Así, la **hélice cilíndrica**, $\alpha(t) := (a\cos t, a\sin t, bt)$ para ciertos $a, b > 0$, es una curva alabeada. Una **auto-intersección** de una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es un punto $p \in \mathbb{R}^n$ para el que existen $s, t \in I$, $s \neq t$, con $\alpha(s) = \alpha(t) = p$, y un **punto de retroceso** es un punto singular, esto es, un $t \in I$ con $\alpha'(t) = 0$. Una curva es **simple** si no tiene autointersecciones, y es **regular** si no tiene puntos singulares. Nos centraremos en las curvas parametrizadas diferenciables regulares.

1.1. Reparametrización

Dados dos intervalos abiertos $I, J \subseteq \mathbb{R}^n$, un **cambio de parámetro** es un difeomorfismo $h : J \to I$, y si tenemos una curva $\alpha := I \to \mathbb{R}^n$, llamamos **reparametrización** de α por h a la curva $\beta := \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^n$.

En tal caso, si α es regular, β también, pues $h'(t) \neq 0$ siempre. Además, o bien $h'(t) > 0$ para todo $t \in J$, en cuyo caso h **conserva la orientación**, o $h'(t) < 0$ para todo $t \in J$, en cuyo caso h **invierte la orientación**.

1.1.1. Longitud de una curva

Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, $[a, b] \subseteq I$, y una partición $P := \{a = t_0 < \dots < t_m = b\}$, llamamos **longitud** de α asociada a P a $L(\alpha, P) := \sum_{k=1}^m |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})|$, y longitud de α entre a y b a

$$L_a^b(\alpha) := \lim_{\substack{|P| \to 0 \\ P \in \mathcal{P}[a,b]}} L(\alpha, P),$$

donde $\mathcal{P}[a, b]$ es el conjunto de particiones de $[a, b]$.

Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ y $[a, b] \subseteq I$,

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Demostración: Sea $P \coloneqq \{a = t_0 < \ldots < t_m = b\} \in \mathcal{P}[a,b]$, por el teorema de los valores intermedios, en cada $[t_{i-1}, t_i]$ existen $\eta_{i1}, \ldots, \eta_{in} \in (t_{i-1}, t_i)$ tales que $\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1}) = \alpha_j'(\eta_{ij})(t_i - t_{i-1})$, luego si $f(s_1, \ldots, s_n) \coloneqq |(\alpha_1'(s_1), \ldots, \alpha_n'(s_n))|$,

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{m} |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})| = \sum_{i=1}^{m} f(\eta_{i1}, \ldots, \eta_{in})(t_i - t_{i-1}).$$

Por otro lado, por el teorema del valor medio integral,

$$\int_a^b |\alpha'(t)|dt = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(t)|dt = \sum_{i=1}^{m} |\alpha'(\nu_i)|(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} f(\nu_i, \ldots, \nu_i)(t_i - t_{i-1})$$

para ciertos $\nu_i \in (t_{i-1}, t_i)$, por lo que

$$\left| L(\alpha, P) - \int_a^b |\alpha'(t)|dt \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left| f(\eta_{i1}, \ldots, \eta_{in}) - f(\nu_i, \ldots, \nu_i) \right| (t_i - t_{i-1}).$$

Además, f es continua en el compacto $[a,b]$ y por tanto uniformemente continua, luego fijado un $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $|s_j - t_j| < \delta$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $|f(s_1, \ldots, s_n) - f(t_1, \ldots, t_n)| < \varepsilon$. Eligiendo $P \in \mathcal{P}[a,b]$ con $|P| < \delta$, $|\eta_{ij} - \nu_i| < \delta$ para todo j y

$$\left| L(\alpha, P) - \int_a^b |\alpha'(t)|dt \right| \leq \sum_{i=1}^{m} |f(\eta_{i1}, \ldots, \eta_{in}) - f(\nu_i, \ldots, \nu_i)|(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \varepsilon(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Con esto, la longitud de una curva es independiente de su parametrización, pues si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva, $h : J \to I$ es un cambio de parámetro que conserva la orientación y $\beta \coloneqq \alpha \circ h$, $\alpha(t) = \beta(h^{-1}(t))$ y

$$L_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)}(\beta) = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} |\beta'(t)|dt = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} |\alpha'(h(t))|h'(t)dt = \int_a^b |\alpha'(s)|ds,$$

y si h invierte la orientación ocurre algo análogo con $L_{h^{-1}(b)}^{h^{-1}(a)}(\beta)$.

1.1.2. Parametrización por arco

Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ está **parametrizada por arco** o es **p.p.a.** si $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$, en cuyo caso $L_0^t(\alpha) = t$, y entonces generalmente usaremos s como parámetro. En tal caso, si $h : J \to I$ es un cambio de parámetro tal que $\beta \coloneqq \alpha \circ h$ es p.p.a, h es de la forma $s \mapsto \pm s + a$ para algún $a \in \mathbb{R}$, pues $|h'(t)| = |\alpha'(h(t))||h'(t)| = |\beta'(t)| = 1$.

La **aceleración** de una curva es su doble derivada, y se puede descomponer una **componente tangencial**, en la recta generada por la velocidad, y una **componente normal**, en el plano perpendicular a esta. La aceleración de una curva p.p.a. no tiene componente tangencial, pues esta vale $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\alpha'(s)|^2 = 0$.

FUVR2

Teorema de la función inversa: Sean $f : I \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo I y derivable en su interior con derivada no nula, entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J y $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en el interior de J con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Como **teorema**, toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación. **Demostración:** Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva de este tipo, $t_0 \in I$ y $g : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(u)| du = L_{t_0}^{t}(\alpha),$$

g es diferenciable y, como $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, $g'(t) = |\alpha'(t)| > 0$, luego por el teorema de la función inversa, $J := g(I)$ es abierto y $g : I \to J$ es un difeomorfismo. Llamando $h := g^{-1}$, como $h'(g(t))g'(t) = 1$, $h'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)} > 0$, luego h conserva la orientación. Además, $|(\alpha \circ h)'(s)| = |\alpha'(h(s))||h'(s)| = |\alpha'(h(s))|\frac{1}{|\alpha'(h(s))|} = 1$.

Ejemplos:

1. La **catenaria** es la curva que adopta una cadena ideal perfectamente flexible con masa distribuida uniformemente, suspendida por sus extremos y sometida a un campo gravitatorio uniforme. Se expresa como $\alpha(t) := (t, \cosh t)$, y admite una reparametrización por longitud de arco $\beta(s) := (\operatorname{arg\,sinh} s, \sqrt{1+s^2})$ de igual orientación.

   Sea
   $$g(t) := \int_0^t |\alpha'(u)| du = \int_0^t |(1, \sinh u)| du = \int_0^t \cosh u \, du = \sinh t,$$
   entonces $h(s) := g^{-1}(s) = \operatorname{arg\,sinh} s$, luego la reparametrización es $\alpha(h(s)) = (\operatorname{arg\,sinh} s, \cos$
   $(\operatorname{arg\,sinh} s, \sqrt{1+s^2})$.

2. Dada la circunferencia $\alpha(t) := p + (r \cos t, r \sin t)$ para ciertos $p \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$, la reparametrización por longitud de arco es $\beta(s) := p + (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})$.

   $$g(t) := \int_0^t |\alpha'(u)| du = \int_0^t r \, du = rt,$$

   luego $h(s) := g^{-1}(s) = \frac{s}{r}$ y la reparametrización es $\alpha(h(s)) = p + (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})$.

1.2. Curvas en el plano

Llamamos **estructura compleja** en $\mathbb{R}^2$ a la rotación positiva de ángulo $\frac{\pi}{2}$, que se expresa como la matriz

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a., si $\mathbf{t}(s) := \alpha'(s)$ y $\mathbf{n}(s) := J\mathbf{t}(s)$ es su **vector normal**, $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ es el **diedro de Frenet** de α, que en cada s es una base ortonormal positivamente orientada. Propiedades:

1. $\mathbf{t}'(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle \mathbf{n}(s)$,

   $\mathbf{t}'(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s)\rangle \mathbf{t}(s) + \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle \mathbf{n}(s)$, pero el primer término se anula al ser

   $$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|\mathbf{t}(s)|^2 = 0.$$

2. $\mathbf{n}'(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s)\rangle \mathbf{t}(s)$.

   Análogo.

3. $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)\rangle$.

   $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)\rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\rangle' = 0$.

1.2.1. Curvatura

La **curvatura** de una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. a $\kappa : I \to \mathbb{R}$ es

$$\kappa_\alpha(s) := \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)),$$

pues

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s)\rangle = \langle (\alpha_1''(s), \alpha_2''(s)), (-\alpha_2'(s), \alpha_1'(s))\rangle = \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s).$$

Las **fórmulas de Frenet** son

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s). \end{cases}$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, llamamos **radio de curvatura** a $\rho(s) := \frac{1}{|\kappa(s)|}$.

Ejemplos:

1. El radio de curvatura de una circunferencia de radio r es r.

   Sea $\alpha(s) := p + r(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r})$ con $p \in \mathbb{R}^2$ y $r \neq 0$, $\alpha'(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$ y $\alpha''(s) = \frac{1}{r}(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$, luego $\kappa(s) = \frac{1}{r}$ y $\rho(s) = |r|$.

2. La curvatura de una recta es 0.

   Sea $\alpha(s) := p + sv$ para ciertos $p, v \in \mathbb{R}^2$ con v unitario, $\alpha'(s) = v$ y $\alpha''(s) = 0$, luego $\kappa(s) = 0$.

3. La catenaria $\alpha(s) := (\arg\sinh s, \sqrt{1+s^2})$ tiene radio de curvatura $\rho(s) = 1 + s^2$.

   Se tiene $\arg\sinh' s = \frac{1}{\cosh(\arg\sinh s)} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$, luego

   $$\alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right), \qquad \alpha''(s) = \left(-\frac{s}{(1+s^2)^{3/2}}, \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}\right),$$

   con lo que $\kappa(s) = \frac{1+s^2}{(1+s^2)^2} = \frac{1}{1+s^2}$ y $\rho(s) = 1 + s^2$.

Como interpretación geométrica, si $\alpha =: (x,y)$, $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, luego existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$ con $x'(s) = \cos\varphi(s)$ e $y'(s) = \sin\varphi(s)$, pero φ es el ángulo que forma $\mathbf{t}(s)$ con el eje x y, por tanto, $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \langle \varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s)), (-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))\rangle = \varphi'(s)$ es la variación de este ángulo respecto al arco. Además, dados un $s_0 \in I$ y un incremento h, $\kappa(s_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s_0+h)-\varphi(s_0)}{h}$, pero $\varphi(s_0+h) - \varphi(s_0)$ es la longitud de arco entre $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{t}(s_0+h)$ en $\mathbb{S}^1$ y h es la longitud entre $\alpha(s_0)$ y $\alpha(s_0+h)$.

La curvatura es aceleración normal necesaria para recorrer la curva a velocidad 1. La **circunferencia osculatriz** es la circunferencia que mejor se ajusta a la curva α en un punto s con $\kappa(s) \neq 0$. Pasa por s y su radio es $\rho(s)$, y su centro está a la izquierda en el sentido del recorrido cuando la curvatura es positiva y a la derecha cuando es negativa, por lo que su centro es $s + \frac{\mathbf{n}(s)}{\kappa(s)}$.

1.2.2. Teorema fundamental

Un **movimiento rígido** es una función $M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dada por $M(x) := Ax + b$ para ciertos $A \in \mathcal{SO}(m)$ y $b \in \mathbb{R}^m$. **Teorema fundamental de curvas planas:**

1. Dados un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ y $\kappa : I \to \mathbb{R}$ diferenciable, existe una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. con curvatura κ.

   Sean $s_0 \in I$ cualquiera, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(s) := \int_{s_0}^s \kappa$ y
   $$\alpha(s) := \left(\int_{s_0}^s \cos\varphi(u)du, \int_{s_0}^s \sin\varphi(u)du\right).$$
   Como $\alpha'(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$, $|\alpha'(s)| = 1$ y α es una curva regular p.p.a. Además
   $$\kappa_\alpha(s) = \begin{vmatrix} \cos\varphi(s) & \sin\varphi(s) \\ -\varphi'(s)\sin\varphi(s) & \varphi'(s)\cos\varphi(s) \end{vmatrix} = \varphi'(s)(\cos^2\varphi(s) + \sin^2\varphi(s)) = \kappa(s).$$

2. Dadas dos curvas regulares $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ con igual curvatura, existe un movimiento rígido M tal que $\beta = M \circ \alpha$.

   Sean κ la curvatura, $s_0 \in I$ y $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha)$ y $(\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta)$ los diedros de Frenet respectivos de α y β, existe un único $A \in \mathcal{SO}(2)$ tal que $A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0)$, y como A es una rotación, $A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0)$. Sean entonces $b := \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$, $Mx := Ax+b$ un movimiento rígido y $\gamma := M \circ \alpha$, y queremos ver que $\gamma = \beta$. Tenemos $\gamma(s_0) = A\alpha(s_0) + b = \beta(s_0)$ y $\mathbf{t}'_\gamma(s_0) = (A\alpha + b)'(s_0) = A\alpha'(s_0) = A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0)$, luego si $f(s) := \frac{1}{2}|t_\beta(s) - t_\gamma(s)|^2$, entonces $f(s_0) = 0$. Además, como $\kappa_\gamma = \langle \gamma'', J\gamma'\rangle = \langle A\alpha'', JA\alpha'\rangle = \langle A\alpha'', AJ\alpha'\rangle = \langle \alpha'', J\alpha'\rangle = \kappa$, $f'(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta - \mathbf{t}'_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma\rangle = \langle \kappa\mathbf{n}_\beta - \kappa\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma\rangle = \kappa(-\langle \mathbf{n}_\beta, \mathbf{t}_\gamma\rangle - \langle \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{t}_\beta\rangle) = 0$, pues $\langle \mathbf{n}_\beta, \mathbf{t}_\gamma\rangle = \langle J\mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\gamma\rangle = -\langle \mathbf{t}_\beta, J\mathbf{t}_\gamma\rangle = -\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\gamma\rangle$. Por tanto $f \equiv 0$ y $\mathbf{t}_\beta(s) = \mathbf{t}_\gamma(s)$ para todo $s \in I$, luego $(\beta - \gamma)'(s) \equiv 0$ y β y γ se diferencian por una constante, que debe ser 0 porque $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$.

1.2.3. Curvatura de una curva arbitraria

Dados una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ y un cambio de parámetro $h : J \to I$ que preserva la orientación tal que $\beta := \alpha \circ h$ es p.p.a., llamamos **curvatura** de α en $t \in I$ a la curvatura de

β en $h^{-1}(t)$. Esta es

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Demostración: Se tiene $\mathbf{t}_\beta(s) = \beta'(s) = \alpha'(h(s))h'(s)$, $\mathbf{n}_\beta(s) = J\mathbf{t}_\beta(s) = h'(s)J\alpha'(h(s))$ y $\mathbf{t}'_\beta(s) = \alpha''(h(s))h'(s)^2 + h''(s)\alpha'(h(s))$, luego para $s := h^{-1}(t)$,

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s) = \langle \alpha''(h(s))h'(s)^2, h'(s)J\alpha'(h(s))\rangle = h'(s)^3\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle}{|\alpha'(h(s))|^3},$$

pues $h'(s)|\alpha'(h(s))| = |h'(s)\alpha'(h(s))| = |\beta'(s)| = 1$.

1.2.4. Comparación de curvas en un punto

Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular p.p.a. con diedro de Frenet $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$, $s_0 \in I$, $p_0 := \alpha(s_0)$, $\mathbf{t}_0 := \mathbf{t}(s_0)$, $\mathbf{n}_0 := \mathbf{n}(s_0)$, $\ell := p_0 + \langle \mathbf{t}_0 \rangle$ y $p \in \mathbb{R}^2$, llamamos **distancia orientada** de p a ℓ a $\text{dist}(p, \ell) := \langle p - p_0, \mathbf{n}_0 \rangle$. Entonces ℓ divide $\mathbb{R}^2$ en dos semiplanos $H^+ := \{p \mid \text{dist}(p, \ell) \geq 0\}$ y $H^- := \{p \mid \text{dist}(p, \ell) \leq 0\}$, de modo que $\ell = H^+ \cap H^-$. Entonces:

1. Si $\kappa(s_0) > 0$, existe un entorno $J \subseteq I$ de s_0 con $\alpha(J) \subseteq H^+$.

   Sea $f(s) := \text{dist}(\alpha(s), \ell) = \langle \alpha(s) - p_0, \mathbf{n}_0 \rangle$, entonces $f(s_0) = 0$, $f'(s) = \langle \alpha'(s), \mathbf{n}_0 \rangle$, $f'(s_0) = \langle \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0 \rangle = 0$, $f''(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_0 \rangle$ y $f''(s_0) = \kappa(s_0)$, luego si $\kappa(s_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en s_0 y existe un $J \in \mathcal{E}(s_0)$ con $f(s) \geq f(s_0) = 0$ para todo $s \in J$, con lo que $\alpha(J) \in H^+$.

2. Si $\kappa(s_0) < 0$, existe un entorno $J \subseteq I$ de s_0 con $\alpha(J) \subseteq H^-$.

   Análogo.

3. Si existe un entorno $J \subseteq I$ de s_0 con $\alpha(J) \subseteq H^+$, $\kappa(s_0) \geq 0$.

   Entonces $\text{dist}(\alpha(s), \ell) \geq 0$ para todo $s \in J$, luego f tiene un mínimo relativo en s_0 y $f''(s_0) = \kappa(s_0) \geq 0$.

4. Si existe un entorno $J \subseteq I$ de s_0 con $\alpha(J) \subseteq H^-$, $\kappa(s_0) \leq 0$.

   Análogo.

Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ curvas regulares p.p.a., $s_0 \in I$ con $\alpha(s_0) = \beta(s_0) =: p_0$ y $\alpha'(s_0) = \beta'(s_0) =: \mathbf{t}_0$, y ℓ la recta tangente a α y β en s_0, α está **por encima** de β en p_0 si existe un entorno J de s_0 con $\text{dist}(\alpha(s), \ell) \geq \text{dist}(\beta(s), \ell)$ para todo $s \in J$.

1. Si $\kappa_\alpha(s_0) > \kappa_\beta(s_0)$, α está por encima de β.

   Sean $\mathbf{n}_0 = J\mathbf{t}_0$ y $f(s) := \text{dist}(\alpha(s), \ell) - \text{dist}(\beta(s), \ell) = \langle \alpha(s) - p_0, \mathbf{n}_0 \rangle - \langle \beta(s) - p_0, \mathbf{n}_0 \rangle = \langle \alpha(s) - \beta(s), \mathbf{n}_0 \rangle$, entonces $f(s_0) = 0$, $f'(s) = \langle \alpha'(s) - \beta'(s), \mathbf{n}_0 \rangle$, $f'(s_0) = 0$, $f''(s) = \langle \alpha''(s) - \beta''(s), \mathbf{n}_0 \rangle = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_0 \rangle - \langle \beta''(s), \mathbf{n}_0 \rangle$ y $f''(s_0) = \kappa_\alpha(s_0) - \kappa_\beta(s_0)$. Entonces, si $\kappa_\alpha(s_0) > \kappa_\beta(s_0)$, f tiene un mínimo relativo en s_0 y por tanto existe un $J \in \mathcal{E}(s_0)$ con $f(s) = \text{dist}(\alpha(s), \ell) - \text{dist}(\beta(s), \ell) \geq f(s_0) = 0$ para todo $s \in J$.

2. Si α está por encima de β, $\kappa_\alpha(s_0) \geq \kappa_\beta(s_0)$.

   Sea J un entorno de s_0 en que $\text{dist}(\alpha(s), \ell) \geq \text{dist}(\beta(s), \ell)$, en este entorno es $f(s) \geq 0$, luego como $f(s_0) = 0$, f tiene un mínimo relativo en s_0 y $\kappa_\alpha(s_0) \geq \kappa_\beta(s_0)$.

1.3. Curvas en el espacio

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., si $\mathbf{t}(s)$ es su vector tangente, $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{t}'(s)$, y llamamos **curvatura** de α en $s \in I$ a $\kappa(s) := |\mathbf{t}'(s)|$. Una curva p.p.a. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una recta si y sólo si su curvatura es nula.

El **vector normal** a una curva regular p.p.a. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ en un $s \in I$ con $\kappa(s) \neq 0$ es

$$\mathbf{n}(s) := \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|},$$

el **plano osculador** es $\text{span}\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$, el **vector binormal** es $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ y el **triedro de Frenet** es la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ positivamente orientada $(t(s), n(s), b(s))$. La **torsión** de una curva regular p.p.a. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ cuya curvatura nunca se anula es la función $\tau : I \to \mathbb{R}$ dada por $\tau(s) := \langle \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

1.3.1. Propiedades de la curvatura y la torsión

Fórmulas de Frenet: Para $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. cuya curvatura nunca se anula y $s \in I$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \kappa \mathbf{n} \\ -\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b} \\ \tau \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & -\tau \\ & \tau & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Demostración: Claramente $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$. Derivando la definición de $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$, y al ser $\mathbf{b}$ unitario, $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$, luego $\mathbf{b}'(s)$ debe ser proporcional a $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}'(s0 = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) = \langle \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$. Finalmente, $\mathbf{n}'(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s)$, pero al ser $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$, $\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle = -|\mathbf{n}(s)||\mathbf{t}'(s)| = -\kappa(s)$; $\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, y al ser $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$, $\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle = -\tau(s)$, luego finalmente $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s)$.

Tenemos

$$\tau(s) = -\frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha''(s)|^2},$$

pues

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \langle \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s)) \\ &= \det\left(\alpha'(s), \frac{\alpha'''(s)|\alpha''(s)| - \alpha''(s)|\alpha''(s)|'}{|\alpha''(s)|^2}, \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}\right) \\ &= \frac{1}{|\alpha''(s)|^2} \det(\alpha'(s), \alpha'''(s), \alpha''(s)) = -\frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha''(s)|^2}. \end{aligned}$$

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. con curvatura κ:

1. $\kappa = 0$ si y sólo si α es una recta.

   $\Longrightarrow]$ Si $\alpha(s) := p + sv$, $\mathbf{t}(s) = v$, y $\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)| = 0$.

   $\Longleftarrow]$ Entonces $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$, luego integrando, $\alpha'(s)$ es constante en algún v y $\alpha(s)$ es de la forma $p + sv$.

2. Si κ no se anula, α es plana si y sólo si su torsión $\tau = 0$.

$\Longrightarrow$] Sean $p \in \mathbb{R}^3$ y $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano vectorial tales que $\alpha(I) \subseteq \pi$, entonces $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \in \pi$ para todo $s \in I$, luego $\mathbf{b}(s)$ siempre está en la misma recta y, por continuidad, es constante, con lo que $\mathbf{b}' = 0$ y $\tau = 0$.

$\Longleftarrow$] Si $\tau = 0$, $\mathbf{b}' = \tau\mathbf{n} = 0$, luego $\mathbf{b}$ es constante en algún b y, si $f(s) := \langle \alpha(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, $f'(s) = \langle \mathbf{t}(s), b \rangle = 0$, luego f es constante en algún c y, para todo $s \in I$, $\alpha_1(s)b_1 + \alpha_2(s)b_3 + \alpha_3(s)b_3 = c$, la ecuación de un plano.

1.3.2. Curvatura y torsión de curvas arbitrarias

Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular y $h : J \to I$ un cambio de parámetro que conserva la orientación y tal que $\beta := \alpha \circ h$ es p.p.a., definimos la curvatura de α como $\kappa_\alpha(t) := \kappa_\beta(h^{-1}(t))$ y, si esta no se anula, la torsión como $\tau_\alpha(t) := \tau_\beta(h^{-1}(t))$. Entonces

$$\kappa_\alpha(t) := \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \qquad \tau_\alpha(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.$$

Demostración: Sea $s := h^{-1}(t)$,

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= \alpha'(h(s))h'(s), \\
\beta''(s) &= \alpha''(h(s))h'(s)^2 + \alpha'(h(s))h''(s), \\
\beta'''(s) &= \alpha'''(h(s))h'(s)^3 + 3\alpha''(h(s))h'(s)h''(s) + \alpha'(h(s))h'''(s),
\end{aligned}$$

y como β' y β'' son ortogonales, $|\beta''(s)| = |\beta'(s) \wedge \beta''(s)|$, luego sustituyendo, y eliminando los productos vectoriales entre vectores proporcionales,

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(s) = |\beta''(s)| = |\beta'(s) \wedge \beta''(s)| &= |\alpha'(h(s))h'(s) \wedge \alpha''(h(s))h'(s)^2| \\
&= h'(s)^3|\alpha'(h(s)) \wedge \alpha''(h(s))| = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3},
\end{aligned}$$

pues $|\alpha'(t)|h'(s) = |\alpha'(h(s))h'(s)| = |\beta'(s)| = 1$. Por otro lado, haciendo lo mismo y eliminando productos escalares entre vectores ortogonales,

$$\begin{aligned}
\tau_\beta(s) &= -\frac{\det(\beta'(s), \beta''(s), \beta'''(s))}{|\beta''(s)|^2} = -\frac{\langle \beta'(s) \wedge \beta''(s), \beta'''(s) \rangle}{|\beta'(s) \wedge \beta''(s)|^2} \\
&= -\frac{\langle \alpha'(h(s))h'(s) \wedge \alpha''(h(s))h'(s)^2, \alpha'''(h(s))h'(s)^3 \rangle}{h'(s)^6|\alpha'(h(s)) \wedge \alpha''(h(s))|^2} \\
&= -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2} = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.
\end{aligned}$$

1.3.3. Teorema fundamental

EDO

Una e.d.o. es **lineal** si es de la forma $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, con $A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$[...]. Como **teorema**, si A y b son continuas, para $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, el problema

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene solución única definida en todo I[...].

Teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^3$:

1. Dadas $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ diferenciables con $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, existe una curva regular p.p.a. con curvatura κ y torsión τ.

   Podemos ver las fórmulas de Frenet como como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con incógnitas $(t_1, t_2, t_3, n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3)$, y tomando como condiciones iniciales un $s_0 \in I$ y una base ortonormal positivamente orientada $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, existe una única $f : I \to \mathbb{R}^n$, $f(s) =: (\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$, que cumple las fórmulas de Frenet y tal que $f(s_0) = (\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$.

   Usando las fórmulas de Frenet,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle' &= \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle - \kappa \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle, \\
\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle' &= \langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}' \rangle = \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle, \\
\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle' &= \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}' \rangle = -\kappa \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle - \tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + \tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle, \\
\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle' &= 2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle = 2\kappa \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle, \\
\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle' &= 2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle = -2\kappa \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle - 2\tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle, \\
\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle' &= 2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle = 2\tau(s) \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle,
\end{aligned}$$

   y tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en el que, si establecemos como condiciones iniciales $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$ y $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$ en s_0, las correspondientes funciones constantes forman una solución del sistema, y por tanto la única para estas condiciones, luego $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ es siempre una base ortonormal.

   Sea entonces $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ la curva dada por $\alpha(s) := \int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(u) du$, para todo $s \in I$ la diferencial $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ y $\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ por las fórmulas de Frenet, con lo que κ es la curvatura de α. Además, $\alpha'''(s) = \kappa'(s)\mathbf{n}(s) - \kappa(s)^2\mathbf{t}(s) - \kappa(s)\tau(s)\mathbf{b}(s)$, y la torsión de la curva es

$$\begin{aligned}
&- \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha''(s)|^2} = - \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\kappa(s)^2} = \\
&\quad = - \frac{\langle \mathbf{t}(s) \wedge \kappa(s)\mathbf{n}(s), \kappa'(s)\mathbf{n}(s) - \kappa(s)^2\mathbf{t}(s) - \kappa(s)\tau(s)\mathbf{b}(s) \rangle}{\kappa(s)^2} = \\
&= - \frac{\langle \mathbf{t}(s) \wedge \kappa(s)\mathbf{n}(s), -\kappa(s)\tau(s)\mathbf{b}(s) \rangle}{\kappa(s)^2} = \tau(s) \langle \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s).
\end{aligned}$$

2. Dadas dos curvas regulares p.p.a. $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ con igual curvatura y torsión, existe un movimiento rígido M tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Sean κ la curvatura, τ la torsión y $s_0 \in I$, existe una única $A \in \mathcal{SO}(3)$ tal que $A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0)$, $A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0)$ y $A\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0)$. Sean entonces $b \coloneqq \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$, $M(x) \coloneqq Ax + b$ un movimiento rígido y $\gamma \coloneqq M \circ \alpha$, y queremos ver que $\gamma = \beta$.

Se tiene

$$\begin{aligned}
\gamma(s_0) &= A\alpha(s_0) + b = \beta(s_0), \\
\mathbf{t}_\gamma(s_0) &= (A\alpha + b)'(s_0) = A\alpha'(s_0) = A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \\
\kappa_\gamma(s)|\gamma''(s)| &= |A\alpha''(s)| = |\alpha''(s)| = \kappa(s), \\
\tau_\gamma(s) &= -\frac{\det(\beta'(s), \beta''(s), \beta'''(s))}{|\beta''(s)|^2} = -\frac{\det(A\alpha'(s), A\alpha''(s), A\alpha'''(s))}{|\alpha''(s)|^2} \\
&= -\det A \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha''(s)|^2} = \det A\tau(s) = \tau(s), \\
\mathbf{n}_\gamma(s_0) &= \frac{\gamma''(s_0)}{\kappa_\gamma(s_0)} = \frac{A\alpha''(s_0)}{\kappa(s_0)} = A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \\
\mathbf{b}_\gamma(s_0) &= \mathbf{t}_\gamma(s_0) \wedge \mathbf{n}_\gamma(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0).
\end{aligned}$$

Sea ahora $f(s) \coloneqq \frac{1}{2}(|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{b}_\beta(s) - \mathbf{b}_\gamma(s)|^2)$, entonces $f(s_0) = 0$ y

$$\begin{aligned}
f' =&\langle \mathbf{t}'_\beta - \mathbf{t}'_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{n}'_\beta - \mathbf{n}'_\gamma, \mathbf{n}_\beta - \mathbf{n}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{b}'_\beta - \mathbf{b}'_\gamma, \mathbf{b}_\beta - \mathbf{b}_\gamma \rangle \\
=&\langle \kappa\mathbf{n}_\beta - \kappa\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \rangle + \langle -\kappa\mathbf{t}_\beta - \tau\mathbf{b}_\beta + \kappa\mathbf{t}_\gamma + \tau\mathbf{b}_\gamma, \mathbf{n}_\beta - \mathbf{n}_\gamma \rangle + \langle \tau\mathbf{n}_\beta - \tau\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{b}_\beta - \mathbf{b}_\gamma \rangle \\
=& -\kappa(\langle \mathbf{n}_\beta, \mathbf{t}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{t}_\beta \rangle) + \kappa(\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{t}_\gamma, \mathbf{n}_\beta \rangle) \\
&+ \tau(\langle \mathbf{b}_\beta, \mathbf{n}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{b}_\gamma, \mathbf{n}_\beta \rangle) - \tau(\langle \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{b}_\beta \rangle) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto f es constante en 0, luego $\mathbf{t}_\beta = \mathbf{t}_\gamma$, $(\beta - \gamma)'(s) = 0$ y $\beta - \gamma$ es constante, pero $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$, luego $\beta = \gamma$.

Capítulo 2

Superficies

Una **superficie regular** es un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ no vacío tal que para todo $p \in S$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, un entorno V de p en S y un homeomorfismo $X : U \to V$ diferenciable con diferencial $dX(q)$ inyectiva para todo $q \in U$. Entonces X es una **parametrización**, **carta** o **sistema de coordenadas** y V es el **entorno coordenado**. También llamamos parametrización al par (U, X).

Que $dX(q)$ sea inyectiva equivale a que $X_u(q) := dX(q)(e_1)$ y $X_v(q) := dX(q)(e_2)$ sean linealmente independientes, lo que equivale a que el jacobiano $JX(q)$ tenga rango máximo.

2.1. Criterios para determinar superficies

Claramente, para $S \subseteq \mathbb{R}^3$, si todo $p \in S$ tiene un entorno relativo $V \subseteq S$ que es una superficie, entonces S es una superficie.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, el **grafo** $G(f) := \{(u, v, f(u, v))\}_{(u,v)\in U}$ es una superficie regular. En efecto, $X : U \to G(f)$ dada por $X(u, v) := (u, v, f(u, v))$ es continua y su inversa es la proyección sobre el plano XY, que es continua, luego X es un homeomorfismo, y es diferenciable con $X_u(u, v) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v))$ y $X_v(u, v) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v))$ linealmente independientes.

FVV3

[...][**Teorema de la función implícita:** Sean $F : D \subseteq (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, $(x_0, y_0) \in D$ con $F(x_0, y_0) = 0$ y $d(y \mapsto F(x_0, y))(y_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ no singular, existen $\mathcal{U} \in \mathcal{E}(x_0)$ y $\mathcal{V} \in \mathcal{E}(y_0)$ con $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq D$ tales que existe una única $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ con $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$ y esta es $\mathcal{C}^k$.]

Sean $V \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, $f : V \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in V$, p es un **punto crítico** de f si $df(p) = 0$, en cuyo caso $f(p)$ es un **valor crítico**. Un **valor regular** es un $a \in \mathbb{R}$ que no es crítico. Entonces, si a es un valor regular de f y f es $\mathcal{C}^1$, la **superficie de nivel** $S := f^{-1}(\{a\})$ es una superficie regular. **Demostración:** Sea $p_0 := (x_0, y_0, z_0) \in S$, como $df(p_0) \neq 0$, al menos una de las derivadas parciales no se anula. Podemos suponer $\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$, y por el teorema de la función implícita, existen entornos U de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ e I de z_0 en $\mathbb{R}$ y una $g : U \to I$ diferenciable tales que $g(x_0, y_0) = z_0$; para $(x, y) \in U$, $f(x, y, g(x, y)) = a$, y

$(U\times I)\cap f^{-1}(a)=\{(u,v,g(u,v))\}_{(u,v)\in U}$, y por la proposición anterior, $V:=(U\times I)\cap S=G(g)$ es una superficie regular. Como esto ocurre para todo $p\in S$, S es una superficie regular.

Ejemplos:

1. Dados $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ con $(a,b,c)\neq\mathbf{0}$, el plano $\pi:=\{ax+by+cz=d\}$ es una superficie regular.

   Sea $f(x,y,z):=ax+by+cz$, $df(x,y,z)\equiv(a,b,c)$, luego f es diferenciable sin puntos críticos y $\pi=\{f(x,y,z)=d\}$ es una superficie regular.

2. Dados $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, el **elipsoide** $E:=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$ es una superficie regular. En particular $\mathbb{S}^2$ es una superficie regular.

   Sea $f(x,y,z):=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, f es diferenciable con $df(x,y,z)\equiv(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})$, luego el único punto crítico de f es el origen y su único valor crítico es pues 0. Por tanto $E=\{f(x,y,z)=1\}$ es una superficie regular.

3. El **hiperboloide de una hoja** $H:=\{x^2+y^2-z^2=1\}$ y el **hiperboloide de dos hojas** $H':=\{x^2+y^2-z^2=-1\}$ son superficies regulares. Estas son superficies de revolución resultantes de rotar la hipérbola $\{xy=1\}$ alrededor de uno de sus ejes de simetría, la recta $\{y=-x\}$, en el caso de H, o de la recta $\{y=x\}$, en el caso de H', aplicando antes una transformación lineal.

   Sea $f(x,y,z):=x^2+y^2-z^2$, f es diferenciable con $df(x,y,z)=(2x,2y,-2z)$, luego el único punto crítico de f es el origen y su único valor crítico es 0, con lo que $H=\{f(x,y,z)=1\}$ y $H'=\{f(x,y,z)=-1\}$ son superficies regulares.

   Para ver que los ejes de simetría de la hipérbola son los mencionados, sean $v:=(a,b)$ unitario tal que $\operatorname{span}\{v\}$ es un eje de simetría y $p:=(x,\frac{1}{x})\in\{xy=1\}$, el simétrico de p es $p-2\langle p,v\rangle v=((1-2a^2)x-\frac{2ab}{x},\frac{1-2b^2}{x}-2abx)$, luego $((1-2a^2)x-\frac{2ab}{x})(\frac{1-2b^2}{x}-2abx)=1$ y, como esto se cumple para todo $x\in\mathbb{R}^*$, multiplicando todo por x^2 y haciendo x tender a $+\infty$, $(-2ab)(1-2b^2)=0$, por lo que bien $-2ab=0$ y $v\in\{(\pm1,0),(0,\pm1)\}$, para lo que cualquier punto de la hipérbola sirve de contraejemplo, bien $1-2b^2=0$ y entonces $v\in\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1,\pm1)\}$, lo que nos da las rectas $\{y=-x\}$ e $\{y=x\}$. Si $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $p-2\langle p,v\rangle v=(-\frac{1}{x},-x)$, y efectivamente $(-\frac{1}{x})(-x)=1$, y si $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $p-2\langle p,v\rangle v=(\frac{1}{x},x)$, y efectivamente $\frac{1}{x}x=1$.

   Queda ver que las figuras de revolución son efectivamente las mencionadas. Para H,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\\frac{1}{u}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u+\frac{1}{u}\\-u+\frac{1}{u}\end{pmatrix},\qquad\qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

   y los puntos son de la forma $(x,y,z):=((u+\frac{1}{u})\cos v,(u+\frac{1}{u})\sin v,-u+\frac{1}{u})/2$, de modo que $x^2+y^2-z^2=\frac{1}{4}((u+\frac{1}{u})^2-(u-\frac{1}{u})^2)=\frac{1}{4}\cdot4=1$. Recíprocamente, dado (x,y,z) con $x^2+y^2-z^2=1$, como $u\mapsto(u+\frac{1}{u})/2$ tiene como imagen $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ y $x^2+y^2=z^2+1\geq1$, existe u con $(u+\frac{1}{u})/2=\sqrt{x^2+y^2}$, y existe v tal que $(u+\frac{1}{u})/2\cdot(\cos v,\sin v)=(x,y)$. Finalmente, $z^2=x^2+y^2-1=\frac{1}{4}(u+\frac{1}{u})^2-1=\frac{1}{4}(u-\frac{1}{u})^2$, luego $z\in\{\pm\frac{1}{2}(-u+\frac{1}{u})\}$, y si los signos son opuestos basta cambiar u por $\frac{1}{u}$.

Para H',

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ \frac{1}{u}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u-\frac{1}{u}\\ u+\frac{1}{u}\end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

y los puntos son de la forma $(x,y,z) := ((u-\frac{1}{u})\cos v,(u-\frac{1}{u})\sin v,u+\frac{1}{u})/2$, de modo que $x^2+y^2-z^2=\frac{1}{4}((u-\frac{1}{u})^2-(u+\frac{1}{u})^2)=-1$. Recíprocamente, dado (x,y,z) con $x^2+y^2-z^2=-1$, como $u\mapsto(u-\frac{1}{u})/2$ tiene como imagen todo $\mathbb{R}$, existe u con $(u-\frac{1}{u})/2=\sqrt{x^2+y^2}$, y existe v tal que $(u-\frac{1}{u})/2\cdot(\cos v,\sin v)=(x,y)$. Finalmente, $z^2=x^2+y^2+1=\frac{1}{4}(u-\frac{1}{u})^2+1=\frac{1}{4}(u+\frac{1}{u})$, luego $z\in\{\pm\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})\}$ y, si los signos son opuestos, basta cambiar u por $-\frac{1}{u}$.

4. Dados $a>r>0$, el toro $\mathbb{T}^2 := \{(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2\}$ es una superficie regular, y se obtiene de girar sobre el eje Z la circunferencia en el plano YZ de radio r y centro $(0,a,0)$.

   Dicha circunferencia es $S=\{x=0,(y-a)^2+z^2=r^2\}$. Dado un punto $(0,y,z)$ de la circunferencia, al girar el punto, se obtienen puntos (x,y,z) con x^2+y^2 constante y z constante, y como la distancia del centro de rotación al centro de la circunferencia es siempre a, la ecuación que define el toro es $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2$.

   Sea ahora $f(x,y,z):=(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2$, entonces

$$df(x,y,z)\equiv\begin{pmatrix}2(\sqrt{x^2+y^2}-a)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2(\sqrt{x^2+y^2}-a)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z\end{pmatrix}.$$

   Así, los puntos críticos cumplen $z=0$ y, bien $x^2+y^2=a^2$, bien $x,y=0$. Los valores críticos son pues $f(0,0,0)=a^2$ y, para el caso $x^2+y^2=a^2$, $f(x,y,0)=(\sqrt{a^2}-a)^2=0$, luego $S=\{f(x,y,z)=r^2\}$ es una superficie regular.

Sean $S\subseteq\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ abierto, $X:U\to S$ una función diferenciable con diferencial inyectiva en todo punto y $q_0\in U$, existen un entorno $U'\subseteq U$ de q_0 y una proyección $\pi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ sobre uno de los planos coordenados de forma que $\pi\circ X:U'\to(\pi\circ X)(U')$ es un difeomorfismo. **Demostración:** Como $dX(q_0)$ es inyectiva, $JX(q_0)$ tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, que podemos suponer que es el formado por las dos primeras filas, y tomamos correspondientemente la proyección $\pi(x,y,z):=(x,y)$. Entonces

$$d(\pi\circ X)(q_0)=d\pi(X(q_0))\circ dX(q_0)\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(q_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(q_0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(q_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(q_0)\end{pmatrix}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, y por el teorema de la función inversa, existe un entorno $U'\subseteq U$ de q_0 tal que $(\pi\circ X)(U')=:U''$ es abierto y $\pi\circ X:U'\to U''$ es un difeomorfismo.

Dados una superficie regular S y $p_0\in S$, existen un entorno V de p_0 en S y una función $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable tales que $V\in\{\{z=f(x,y)\},\{y=f(x,z)\},\{x=f(y,z)\}\}$. **Demostración:** Sean (U,X) una parametrización de S con $p_0\in V:=X(U)$, $q_0:=X^{-1}(p_0)$, el resultado anterior nos da un entorno $U'\subseteq U$ de q_0 y una proyección π en un plano coordenado (por ejemplo, el XY) de forma que $\pi\circ X:U'\to(U'':=(\pi\circ X)(U'))$ es un difeomorfismo. Sea ahora $V:=X(U')$, $\pi:V\to U''$ viene dada por la composición de funciones inyectivas $\pi=(\pi\circ X)\circ X^{-1}$ y por tanto es inyectiva con inversa dada por $\pi^{-1}(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z))$

para algún $f : U'' \to \mathbb{R}$, que es diferenciable por ser la composición de funciones diferenciables $\pi^{-1} = X \circ (\pi \circ X)^{-1}$.

Ejemplos:

1. El cono $C := \{x^2 + y^2 = z^2\}$ no es una superficie regular.

   Sea V un entorno del $0 \in C$, que podemos tomar de la forma $B_\infty(0, r)$. Entonces $(\frac{r}{2}, 0, \frac{r}{2}), (-\frac{r}{2}, 0, \frac{r}{2}) \in V \cap C$, luego $V \cap C$ no es un grafo en la coordenada x, y análogamente tampoco lo es en la coordenada y ni en la z.

2. $C \setminus \{0\}$ sí es una superficie regular.

   Sea $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$, entonces $df(x, y, z) \equiv (2x, 2y, -2z)$, luego el único punto crítico es 0 y, como este no está en el dominio, f no tiene valores críticos, y $C \setminus \{0\} = \{f(x, y, z) = 0\}$ es una superficie regular.

Sean S una superficie regular, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto no vacío y $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una función diferenciable inyectiva con diferencial inyectiva en todo punto, entonces X es un homeomorfismo y por tanto una parametrización de S. **Demostración:** Sean $q_0 \in U$ y $p_0 := X(q_0)$, existen un entorno $U' \subseteq U$ de p_0 y una proyección π en un plano coordenado de forma que $\pi \circ X : U' \to (U'' := (\pi \circ X)(U'))$ es un homeomorfismo. Como X es inyectiva, $X : U' \to (V' := X(U'))$ es biyectiva, y queda ver que $X^{-1} : V' \to U'$ es continua, pero $X^{-1} = (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi$ es composición de funciones continuas.

Ejemplos:

1. Sean $U := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ y $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por $X(\theta, \varphi) := (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, $X|_U$ es una parametrización de la esfera que cubre todo salvo el meridiano $\varphi = 0$, $M := X([0, \pi], 0)$. Llamamos **colatitud** a θ y **longitud** a φ.

   X es diferenciable y, dado un $(\theta, \varphi) \in U$,

$$JX(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

   Como $\sin\theta \neq 0$, si $\cos\varphi \neq 0$, el menor formado por las dos últimas filas tiene determinante $\sin^2\theta\cos\varphi \neq 0$, y si $\cos\varphi = 0$, entonces $\sin\varphi \in \{\pm 1\}$ y el menor resultante de eliminar la segunda fila tiene determinante $-\sin^2\theta\sin\varphi \neq 0$. Por tanto $dX(\theta, \varphi)$ es inyectiva. Además, dados $(\theta, \varphi), (\theta', \varphi') \in U$, si $X(\theta, \varphi) = X(\theta', \varphi')$, $\theta = \theta'$ porque el coseno es inyectivo en $(0, \pi)$, pero entonces, como $\sin\theta \neq 0$, $(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\varphi', \sin\varphi')$, y como $\varphi, \varphi' \in (0, 2\pi)$, se tiene $\varphi = \varphi'$ y $X|_U$ es inyectiva. Esto prueba que $X|_U$ es una parametrización.

   Respecto a la imagen, es fácil ver que para cualesquiera $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, $X(\theta, \varphi) \in \mathbb{S}^2$. Para ver que ningún punto de M está en la imagen, nótese que el argumento de inyectividad es aplicable para todo $\varphi \in [0, 2\pi)$ siempre que $\theta \in (0, \pi)$, lo que nos deja solo con $X(0, 0) = (0, 0, 1)$ y $X(1, 0) = (0, 0, -1)$, que no están en $X(U)$ porque los $(x, y, z) \in X(U)$ cumplen $x^2 + y^2 = \sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \sin^2\theta > 0$.

   Finalmente, dado $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus M$, sean $\theta := \arccos z$ y $\varphi := \arccos\frac{x}{\sin\theta} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}$ (usando que $\theta \neq \pm 1$), de modo que $\cos\theta = \cos\arccos z = z$ y $\sin\theta\cos\varphi = \sin\theta \cdot \frac{x}{\sin\theta} = x$.

Entonces, si $y \geq 0$,

$$\sin\theta \sin\varphi = \sin\theta\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sin\theta\sqrt{1-\frac{x^2}{1-z^2}} = \sin\theta\sqrt{\frac{1-z^2-x^2}{1-z^2}} = \sin\theta\frac{|y|}{\sin\theta} = y,$$

por lo que $X(\theta,\varphi) = (x,y,z)$. Si $y \neq 0$, $\sin\theta\cos(2\pi-\varphi) = \sin\theta\cos\varphi = x$, pero sin embargo $\sin\theta\sin(2\pi-\varphi) = -\sin\theta\sin\varphi = -\sin\theta\frac{|y|}{\sin\theta} = y$ y $X(\theta,\varphi) = (x,y,z)$. Esto prueba la sobreyectividad.

2. Sean $S \coloneqq \{x^2+y^2+(z-1)^2=1\}$, $N \coloneqq (0,0,2)$ y $\pi : S\setminus\{N\} \to \mathbb{R}^2$ la función que a cada $p \in S\setminus\{N\}$ le asocia la intersección del plano XY con la recta que pasa por p y N, llamada **proyección estereográfica**. Entonces π^{-1} es una parametrización de S.

   Dado un $p \in \mathbb{S}^2\setminus\{N\}$, los puntos de $\overline{Np}$ son de la forma $(\mu x, \mu y, 2+\mu(z-2))$, para algún $\mu \in \mathbb{R}$. Para el punto que corta al plano XY, $2+\mu(z-2) = 0$, luego $\mu = \frac{-2}{z-2} = \frac{2}{2-z}$ y

$$\pi(x,y,z) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}\right).$$

   Sea

$$X(u,v) \coloneqq \left(\frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}\right),$$

   dado $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, si $(x,y,z) \coloneqq X(u,v)$, $2-z = 2-\frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} = \frac{2(u^2+v^2+4)-2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} = \frac{8}{u^2+v^2+4}$, luego

$$\pi(X(u,v)) = \pi(x,y,z) = \left(\frac{\frac{8u}{u^2+v^2+4}}{\frac{8}{u^2+v^2+4}}, \frac{\frac{8v}{u^2+v^2+4}}{\frac{8}{u^2+v^2+4}}\right) = (u,v).$$

   Recíprocamente, dado $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2\setminus\{N\}$, si $(u,v) \coloneqq \pi(x,y,z)$,

$$\begin{aligned} u^2+v^2+4 &= \left(\frac{2x}{2-z}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2-z}\right)^2 + 4 = \frac{4(x^2+y^2)+4(2-z)^2}{(2-z)^2} \\ &= \frac{4(x^2+y^2+z^2-4z+4)}{(2-z)^2} = \frac{4(x^2+y^2+(z-1)^2-2z+3)}{(2-z)^2} \\ &= \frac{4(4-2z)}{(2-z)^2} = \frac{8}{2-z}, \end{aligned}$$

   luego

$$\begin{aligned} X(\pi(x,y,z)) = X(u,v) &= \left(\frac{4\frac{2x}{2-z}}{\frac{8}{2-z}}, \frac{4\frac{2x}{2-z}}{\frac{8}{2-z}}, \frac{2\frac{4x^2+4y^2}{(2-z)^2}}{\frac{8}{2-z}}\right) = \left(x, y, \frac{x^2+y^2}{2-z}\right) \\ &= \left(x, y, \frac{1-(z-1)^2}{2-z}\right) = \left(x, y, \frac{2z-z^2}{2-z}\right) = (x,y,z). \end{aligned}$$

   Esto prueba que X y π son una inversa de la otra. Además,

$$JX(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{4(u^2+v^2+4)-8u^2}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{-8uv}{(u^2+v^2+4)^2} \\ \frac{-8uv}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{4(u^2+v^2+4)-8v^2}{(u^2+v^2+4)^2} \\ \frac{4u(u^2+v^2+4)-4u(u^2+v^2)}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{4v(u^2+v^2+4)-4v(u^2+v^2)}{(u^2+v^2+4)^2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{4}{(u^2+v^2+4)^2} \begin{pmatrix} -u^2+v^2+4 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2+4 \\ 4u & 4v \end{pmatrix}.$$

Si tomamos la submatriz formada por las dos últimas filas, el determinante es

$$\frac{4}{(u^2+v^2+4)^2} \begin{vmatrix} -2uv & u^2-v^2+4 \\ 4u & 4v \end{vmatrix} = \frac{64u}{(u^2+v^2+4)^4} \begin{vmatrix} -2v & u^2-v^2+4 \\ 1 & v \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{64u}{(u^2+v^2+4)^4}(-2v^2-u^2+v^2-4) = \frac{-64u}{(u^2+v^2+4)^3},$$

que es no nulo si y sólo si $u \neq 0$. Cuando $u = 0$, tomamos la submatriz formada por la primera y tercera filas, con determinante

$$\frac{16}{(v^2+4)^4} \begin{vmatrix} v^2+4 & 0 \\ 0 & 4v \end{vmatrix} = \frac{64v}{(v^2+4)^3},$$

que es no nulo si y sólo $v \neq 0$. Finalmente, cuando $u, v = 0$, la submatriz formada por las dos primeras filas tiene determinante

$$\frac{16}{256} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

por lo que en ningún punto se anulan los 3 determinantes simultáneamente y $JX(u,v)$ tiene rango máximo.

2.2. Funciones diferenciables en superficies

Sean S una superficie regular y (U_1, X_1) y (U_2, X_2) parametrizaciones con $V := X_1(U_1) \cap X_2(U_2) \neq \emptyset$, llamamos **cambio de coordenadas** de X_1 a X_2 a $F := X_2^{-1} \circ X_1 : X_1^{-1}(V) \to X_2^{-1}(V)$.

Como **teorema**, F es un difeomorfismo. **Demostración:** Sea $F := X_2^{-1} \circ X_1$. Dados $p \in V$, $q_1 := X_1^{-1}(V)$ y $q_2 := X_2^{-1}(p)$, existe un entorno $U_2' \subseteq X_2^{-1}(V)$ de q_2 y una proyección π sobre un plano coordenado de forma que $\pi \circ X_2|_{U_2'}$ es un difeomorfismo. Como F es un homeomorfismo y $F(q_1) = q_2 \in U_2'$, $U_1' := F^{-1}(U_2')$ es un entorno de q_1, por lo que para $q \in U_1'$, $((\pi \circ X_2) \circ F)(q) = (\pi \circ X_2 \circ X_2^{-1} \circ X_1)(q) = (\pi \circ X_1)(q)$. Entonces $F|_{U_1'} = (\pi \circ X_2)^{-1} \circ \pi \circ X_1$, que es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables, y como q_1 es arbitrario, F es diferenciable en todo $X_1^{-1}(V)$. Por simetría, $F^{-1} = X_1 \circ X_2^{-1}$ también es diferenciable, luego F es un difeomorfismo.

Una función $f : S \to \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en S si para toda parametrización (U, X) en S, $f \circ X$ es diferenciable en U, si y sólo si para todo $p \in S$ existe una parametrización (U_p, X_p) en S con $p \in X_p(U_p)$ tal que $f \circ X_p$ es diferenciable en U_p.

$\Longrightarrow$] Obvio.

$\Longleftarrow$] Sea (U, X) una parametrización cualquiera en S, para $q \in U$ y $p := X(q)$, existe una parametrización (U_p, X_p) que cumple las condiciones. Sean $q' := U_p^{-1}(p)$ y $V := X(U) \cap X_p(U_p)$, $f \circ X|_{X^{-1}(V)} = (f \circ X_p) \circ (X_p^{-1} \circ X)|_{X^{-1}(V)}$, que es composición de funciones diferenciables, luego $f \circ X$ es diferenciable en $X^{-1}(V)$, que contiene a q, y por ser q arbitrario, es diferenciable en todo U.

2.2.1. Propiedades

Sean S una superficie regular y $f : S \to \mathbb{R}^m$:

1. Si existen $W \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto con $S \subseteq W$ y $\tilde{f} : W \to \mathbb{R}^m$ diferenciable con $\tilde{f}|_S = f$, entonces f es diferenciable.

   Sea (U, X) una parametrización de S, entonces $f \circ X = \tilde{f} \circ X : U \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables.

2. Si f es diferenciable, es continua.

   Sean $p \in S$ y (U, X) una parametrización de S con $p \in X(U)$, $f \circ X$ es diferenciable y por tanto continua, pero como X es un homeomorfismo, X^{-1} es continua y $f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ es continua en p. Como p es arbitrario, f es continua en todo S.

3. Si $f =: (f_1, \dots, f_m)$, f es diferenciable si y sólo si cada f_i lo es.

   $\Longrightarrow$] Dada una parametrización (U, X), como $f \circ X$ es diferenciable, cada $(f \circ X)_i = f_i \circ X$ también.

   $\Longleftarrow$] Dada una parametrización (U, X), como cada $f_i \circ X = (f \circ X)_i$ es diferenciable, $f \circ X$ también lo es.

4. Si $f_1, f_2 : S \to \mathbb{R}^m$ son diferenciables, $f_1 + f_2$ también lo es.

   Dada una parametrización (U, X) de S, $f_1 \circ X$ y $f_2 \circ X$ son diferenciables, luego $(f_1 \circ X) + (f_2 \circ X) = (f_1 + f_2) \circ X$ también.

5. Si f y $g : S \to \mathbb{R}$ son diferenciables, fg también. Si además g no se anula, f/g es diferenciable.

   Dada una parametrización (U, X) de S, $f \circ X$ y $g \circ X$ son diferenciables, luego $(f \circ X)(g \circ X) = (fg) \circ X$ también y, si g no se anula, $(f \circ X)/(g \circ X) = (f/g) \circ X$ también.

2.2.2. Funciones diferenciables entre dos superficies

Dadas dos superficies S_1 y S_2 y $F : S_1 \to S_2$, F es diferenciable si y sólo si para cualesquiera parametrizaciones (U_1, X_1) de S_1 y (U_2, X_2) de S_2 con $F(X_1(U_1)) \cap X_2(U_2) \neq \emptyset$, la **expresión en coordenadas** de F, $X_2^{-1} \circ F \circ X_1$, es diferenciable en su dominio.

$\Longleftarrow$] Queremos ver que $F : S_1 \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable. Dados $p \in S$, (U_1, X_1) una parametrización de S_1 con $p \in X_1(U_1)$ y (U_2, X_2) una de S_2 con $F(p) \in X_2(U_2)$, $\tilde{F} := X_2^{-1} \circ F \circ X_1$ es diferenciable en su dominio $U := U_1 \cap X_1^{-1}(F^{-1}(X_2^{-1}(U_2)))$, luego $F \circ X_1|_U = X_2 \circ X_2^{-1} \circ F \circ X_1|_U = X_2 \circ \tilde{F}$ también lo es y la parametrización $(U, X_1|_U)$ cubre a p y cumple las condiciones.

$\Longrightarrow$] Si (U_1, X_1) es una parametrización de S_1, entonces $G := F \circ X_1 : U_1 \to S_2$ es diferenciable. Sea entonces (U_2, X_2) una parametrización de S con $G(U_1) \cap X_2(U_2) \neq \emptyset$, como G es continua, el dominio de la expresión en coordenadas $\tilde{F} := X_2^{-1} \circ G$, $U := U_1 \cap G^{-1}(X_2(U_2))$, es un abierto no vacío. Queremos ver que $\tilde{F} : U \to U_2$ es diferenciable.

Para cada $q \in U$, si $p := G(q) \in V_2$, existe una parametrización (U_p, X_p) con $p \in V_p := X_p(U_p)$ de tipo grafo, por ejemplo de la forma $X_p(u, v) = (u, v, f(u, v))$ para una cierta $f : U_p \to \mathbb{R}$, y podemos suponer $V_p \subseteq V_2$. Entonces

$$\tilde{F}|_{G^{-1}(V_p)} = X_2^{-1} \circ G = (X_2^{-1} \circ X_p) \circ X_p^{-1} \circ G|_{G^{-1}(V_p)},$$

pero $X_2^{-1} \circ X_p$ es diferenciable por ser un cambio de coordenadas, X_p^{-1} lo es por ser una proyección ortogonal en un plano coordenado y G lo es por hipótesis. Como $q \in G^{-1}(V_p)$ y q es arbitrario, $\tilde{F}$ es diferenciable en todo U.

Si S_1 y S_2 son superficies regulares, $F : S_1 \to S_2$ es diferenciable si y sólo si para todo $p \in S_1$ existen parametrizaciones (U_1, X_1) de S_1 en p y (U_2, X_2) de S_2 en $F(p)$ tales que $X_2^{-1} \circ F \circ X_1$ es diferenciable en su dominio.

$\Longrightarrow$] Consecuencia directa del resultado anterior.

$\Longleftarrow$] Dado $p \in S_1$, sean (U_1, X_1) y (U_2, X_2) las parametrizaciones mencionadas y $U := X_1^{-1}(F^{-1}(X_2(U_2)))$, que es abierto, entonces $F \circ X_1|_U = X_2 \circ (X_2^{-1} \circ F \circ X_1)|_U$ es diferenciable por ser composición de diferenciables, luego $(U, X_1|_U)$ es una parametrización de S_1 en p con $F \circ X_1$ diferenciable.

2.2.3. Difeomorfismos entre superficies

Dadas dos superficies regulares S_1 y S_2, $F : S_1 \to S_2$ es un **difeomorfismo** si una biyección diferenciable con inversa $S_2 \to S_1$ diferenciable. S_1 es **difeomorfa** a S_2, $S_1 \approx S_2$, si existe un difeomorfismo entre ellas.

Dadas dos variedades diferenciales X e Y, X es **localmente difeomorfa** a Y si todo $x \in X$ tiene un entorno difeomorfo a un abierto de Y. Dada una superficie regular S con una parametrización (U, X), $X : U \to X(U)$ es un difeomorfismo, y en particular S es localmente difeomorfa a un plano. **Demostración:** Tomamos el plano $\pi := \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Dados $p \in S$, una parametrización (U, X) de S en p, $V := X(U)$ e $i : \mathbb{R}^2 \to \pi$ dada por $i(u, v) := (u, v, 0)$, tomamos $f := i \circ X^{-1} : V \to i(U)$, y como $f^{-1} = X \circ \pi_z|_{i(U)}$ es una biyección diferenciable por ser composición de biyecciones diferenciables, queda ver que f es diferenciable, pero tomando la parametrización (U, X) de V, $f \circ X = i : U \to i(U)$ es diferenciable.

2.3. Plano tangente

Sean S una superficie regular, $\alpha : I \to S$ una curva diferenciable, (U, X) una parametrización de S con $\alpha(I) \cap (V := X(U)) \neq \emptyset$ y $J := \{t \in I \mid \alpha(t) \in V\}$, entonces $\tilde{\alpha} : J \to U$ dada por $\tilde{\alpha}(t) := X^{-1}(\alpha(t))$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ llamada **expresión en coordenadas** de α.

Sean S una superficie regular y $p \in S$, un $v \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tangente** a S en p si existe una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Llamamos **plano tangente** a S en p, T_pS, al conjunto de vectores tangentes a S en p. Dados una parametrización (U, X) de S en p y $q := X^{-1}(p)$, $T_pS = dX(q)(\mathbb{R}^2)$, un plano vectorial en $\mathbb{R}^3$ del que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ es una base.

$\supseteq$] Sean $v \in dX(q)(\mathbb{R}^2)$, $w \in \mathbb{R}^2$ con $v = dX(q)(w)$, $\tilde{\alpha}(t) := q + tw$ definida en un entorno de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con imagen en U y $\alpha := X \circ \tilde{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, α es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = dX(\tilde{\alpha}(0))(\tilde{\alpha}'(0)) = dX(q)(w) = v$, luego $v \in T_pS$.

$\subseteq$] Sea $v \in T_pS$, existe una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ con expresión en coordenadas $\tilde{\alpha} : J \subseteq I \to U$, pero entonces $\tilde{\alpha}(0) = X^{-1}(\alpha(0)) = q$ y $dX(q)(\tilde{\alpha}'(0)) = dX(\tilde{\alpha}(0))(\tilde{\alpha}'(0)) = (X \circ \tilde{\alpha})'(0) = \alpha'(0) = v$, luego $v \in dX(q)(\mathbb{R}^2)$.

Llamamos **recta normal** a una superficie regular S en un punto $p \in S$ a $(T_pS)^\perp$. Entonces el **vector normal** (**unitario**) a S en p es un vector unitario $N(p)$ tal que $(T_pS)^\perp = \text{span}\{N(p)\}$, unívocamente determinado salvo el signo, y dado por

$$N(X(q)) = \pm \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{|X_u(q) \wedge X_v(q)|}.$$

Tomando signo positivo, la base $\{X_u(q), X_v(q), N(q)\}$ está orientada positivamente.

2.4. Diferencial de funciones en superficies

Sean S una superficie regular, $f : S \to \mathbb{R}^n$ diferenciable y $p \in S$, llamamos **diferencial** de f en p a $df_p : T_pS \to \mathbb{R}^n$ dada por $df_p(v) := (f \circ \alpha)'(0)$, siendo $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva regular con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. La función df_p está bien definida y es lineal, y si (U, X) es una parametrización de S en p y $q := X^{-1}(p)$, entonces $df_p(v_1 X_u(q) + v_2 X_v(q)) = d(f \circ X)_q(v_1, v_2)$. **Demostración:** Sean $a \in T_pS$, $q := X^{-1}(p)$, $\alpha : I \to S$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = a$ y $\tilde{\alpha} := X^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(X(U)) \to U$, entonces $\tilde{\alpha}(0) = q$, y como $f \circ \alpha = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha) =: \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}$, si $\tilde{\alpha}(t) =: (u(t), v(t))$,

$$df_p(a) = (f \circ \alpha)'(0) = (\tilde{f} \circ \tilde{\alpha})'(0) = d\tilde{f}_{\tilde{\alpha}(0)}(\tilde{\alpha}'(0)) = d\tilde{f}_q(u'(0), v'(0)),$$

pero por la regla de la cadena, $a = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v_0' X_v(q)$, luego $u'(0)$ y $v'(0)$ no dependen de la curva elegida y f está bien definida. Además, por lo anterior, $df_p(v_1 X_u(q) + v_2 X_v(q)) = d\tilde{f}_q(v_1, v_2)$, luego df_p es lineal.

2.4.1. Ejemplos

Sea S una superficie regular:

1. Si $v \in \mathbb{S}^2$, la **función altura** $h(p) := \langle p, v \rangle$ representa la distancia de p al plano ortogonal a v por el origen y es diferenciable en todo S con diferencial $dh_p(u) = \langle u, v \rangle$. En particular, si T_pS es paralelo a $\text{span}\{v\}^\perp$ es $dh_p \equiv 0$.

   Es diferenciable por ser polinómica y por tanto diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$. Su diferencial es $dh_p(w) =: (h \circ \alpha)'(0) = dh_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), v \rangle = \langle w, v \rangle$.

2. Dado $p_0 \in \mathbb{R}^3$, la función distancia $g(p) \coloneqq |p-p_0|$ es diferenciable en S si y sólo si $p_0 \notin S$, con $dg_p(v) = \frac{\langle v, p-p_0\rangle}{|p-p_0|}$.

   Como g es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\}$, si $p_0 \notin S$, g es diferenciable en S con

$$
\begin{aligned}
df_p(v) &= (f\circ\alpha)'(0) = \frac{d}{dt}|\alpha(t)-p_0|(0) = \frac{d}{dt}\sqrt{\langle \alpha(t)-p_0, \alpha(t)-p_0\rangle}(0) \\
&= \left(t \mapsto \frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t)-p_0\rangle}{|\alpha(t)-p_0|}\right)(0) = \frac{\langle v, p-p_0\rangle}{|p-p_0|},
\end{aligned}
$$

   pero si $p_0 \in S$, g no es diferenciable en S porque de serlo sería $df_{p_0}(v) = \frac{0}{0}\#$.

3. La **función antípoda** $A : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por $A(p) \coloneqq -p$ es diferenciable con $dA_p = -1_{T_p\mathbb{S}^2}$.

   Es diferenciable porque es polinómica, y dada una curva α apropiada, $dA_p(v) = (A\circ\alpha)'(0) = \frac{d}{dt}(-\alpha(t))(0) = -\alpha'(0) = -v$.

4. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, sea $\hat{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotación de ángulo θ respecto al eje z, dada por $F(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$, $F \coloneqq \hat{F}|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ es diferenciable con $dF_p(v) = \hat{F}(v)$.

   Es diferenciable por ser la restricción de una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Tomando una curva $\alpha(t) \coloneqq (x(t), y(t), z(t))$ apropiadamente,

$$
\begin{aligned}
dF_p(v) &= (F\circ\alpha)'(0) = \frac{d}{dt}\left(x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta, x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta, z(t)\right)(0) \\
&= (x'(0)\cos\theta - y'(0)\sin\theta, x'(0)\sin\theta + y'(0)\cos\theta, z'(0)) \\
&= \hat{F}(x'(0), y'(0), z'(0)) = \hat{F}(v).
\end{aligned}
$$

5. Si $0 \notin S$, $F : S \to \mathbb{S}^2$ dada por $F(p) \coloneqq p/|p|$ es diferenciable con $dF_p(v) = \frac{1}{|p|}v - \frac{\langle p,v\rangle}{|p|^3}p$.

   Claramente es diferenciable por ser la restricción de una función diferenciable. Entonces $dF_p(v) =: (F\circ\alpha)(0) = \frac{d}{dt}\frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|} = \left(t \mapsto \frac{\alpha'(t)|\alpha(t)| - \alpha(t)\langle\alpha(t),\alpha'(t)\rangle/|\alpha(t)|}{|\alpha(t)|^2}\right)(0) = \frac{v}{|p|} - \frac{p\langle p,v\rangle}{|p|^3}$.

2.4.2. Diferencial de funciones entre superficies

Dadas dos superficies regulares S_1 y S_2, $F : S_1 \to S_2$ diferenciable, $p \in S_1$, parametrizaciones (U_1, X_1) de S_1 en p y (U_2, X_2) de S_2 en $F(p)$, $q_1 \coloneqq X_1^{-1}(p)$ y $q_2 \coloneqq X_2^{-1}(F(p))$, la matriz asociada a dF_p respecto de las bases $\mathcal{B}_1 \coloneqq ((X_1)_u(q_1), (X_1)_v(q_1))$ y $\mathcal{B}_2 \coloneqq ((X_2)_u(q_2), (X_2)_v(q_2))$ es el jacobiano de la expresión en coordenadas de F en p. **Demostración:** Sea $v \coloneqq v_1(X_1)_u + v_2(X_1)_v$, de modo que $[v]_{\mathcal{B}_1} = (v_1, v_2)$, entonces $dF_p(v) = d(F\circ X_1)_{q_1}(v_1, v_2)$, pero la expresión en coordenadas $\tilde{F} \coloneqq X_2^{-1}\circ F\circ X_1 : U_1 \to U_2$ cumple $d\tilde{F}_{q_1} = d(X_2^{-1})_{F(p)} \circ d(F\circ X_1)_{q_1} = (d(X_2)_{F(p)})^{-1} \circ d(F\circ X_1)_{q_1}$, de modo que $[dF_p(v)]_{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}} dF_p(v) = (d(X_2)_{F(p)})^{-1}(d(F\circ X_1)_{q_1}(v)) = d\tilde{F}_{q_1}(v)$.

Regla de la cadena: Sean S_1, S_2 y S_3 superficies regulares y $F : S_1 \to S_2$ y $G : S_2 \to S_3$ diferenciables, para $p \in S_1$, $d(G\circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$. **Demostración:** Ya hemos visto que

$G\circ F$ es diferenciable. Sean $\alpha:I\to S_1$ una curva regular con $\alpha(0)=p$ y $\alpha'(0)=v$ y $\beta:=F\circ\alpha$, β es una curva regular en S_2 con $\beta(0)=F(p)$ y $\beta'(0)=dF_{\alpha(0)}(\alpha'(0))=dF_p(v)$, luego

$$d(G\circ F)_p(v)=(G\circ F\circ\alpha)'(0)=(G\circ\beta)'(0)=dG_{\beta(0)}\beta'(0)=dG_{F(p)}(dF_p(v)).$$

FVV3

Teorema de la función inversa: Sean $f:D\subseteq\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ con $k\geq 1$ y $x_0\in D$ tal que $df(x_0)$ es no singular, existen [...] $\mathcal{U}\in\mathcal{E}(x_0)$ [y] $\mathcal{V}\in\mathcal{E}(y_0:=f(x_0))$ tales que $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ es biyectiva y inversa es $\mathcal{C}^k$.

Teorema de la función inversa: Sean S_1 y S_2 superficies regulares, $F:S_1\to S_2$ $\mathcal{C}^1$ y $p\in S_1$ con dF_p biyectiva, si existen parametrizaciones de S_1 en p y de S_2 en $F(p)$ $\mathcal{C}^1$, F es un difeomorfismo local en p. **Demostración:** Tomamos parametrizaciones $\mathcal{C}^1$ (U_1,X_1) de S_1 en p y (U_2,X_2) de S_2 en $F(p)$, $q_1:=X_1^{-1}(p)$, $q_2:=X_2^{-1}(F(p))$, $V_1:=X_1(U_1)$ y $V_2:=X_2(U_2)$. Sean $\tilde{F}$ la expresión en coordenadas de F respecto a (U_1,X_1) y (U_2,X_2) y $U:=X_1^{-1}(F^{-1}(V_2))$ el dominio de $\tilde{F}$, $d\tilde{F}_{q_1}$ es un isomorfismo lineal, pues su matriz jacobiana es la de dF_p en una cierta base, y aplicando el teorema de la función inversa a $\tilde{F}:U\to\tilde{F}(U)$, existen abiertos $\tilde{U}_1\subseteq U$ de q_1 y $\tilde{U}_2\subseteq U_2$ de q_2 tales que $\tilde{F}:\tilde{U}_1\to\tilde{U}_2$ es un difeomorfismo. Sea $V:=X_1(\tilde{U}_1)$, $F|_V:=(X_2\circ\tilde{F}\circ X_1^{-1})|_V:V\to F(V)$ es un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos.

Como **teorema**, sean S_1 y S_2 superficies regulares, si F es un difeomorfismo local en $p\in S_1$ entre S_1 y S_2, $dF_p:T_pS_1\to T_{F(p)}S_2$ es un isomorfismo lineal. En efecto, tomando entornos $V_1\subseteq S_1$ de p y $V_2\subseteq S_2$ de $F(p)$ tales que $F|_{V_1}:V_1\to V_2$ es un difeomorfismo, y por la regla de la cadena $1_{T_pS_1}=1_{T_pV_1}=d(F^{-1}\circ F)_p=d(F^{-1})_{F_p}\circ dF_p$ y análogamente $dF_p\circ d(F^{-1})_{F(p)}=1_{T_{F(p)}S_2}$, luego dF_p es invertible y por tanto un isomorfismo lineal.

Dadas una superficie regular S y una función diferenciable $f:S\to\mathbb{R}$, $p\in S$ es un **punto crítico** de f si $df_p\equiv 0$. Entonces:

1. Si f es constante, todos los puntos son críticos.

   Sea $f(p)\equiv k$, $df_p(v)=(f\circ\alpha)'(0)=\frac{dk}{dt}(0)=0$.

2. Si todos los puntos son críticos y S es conexa, f es constante.

   Sean $a\in f(S)$ y $A:=\{p\in S\mid f(p)=a\}\neq\emptyset$, pues $a\in A$. Como $A=f^{-1}(\{a\})$, A es cerrado, y solo queda ver que A es abierto para ver que $A=S$. Sean $p\in A$, (U,X) una parametrización de S en p en la que podemos suponer que U es conexo, $V:=X(U)$ y $q\in U$, $d(f\circ X)_q=df_{X(q)}\circ dX_q\equiv 0$, pues $df_p\equiv 0$ para todo $p\in S$, luego $f\circ X:U\to\mathbb{R}$ es constante en a y $f|_V$ es constante en a, de modo que $V\subseteq A$ y A es abierto.

3. Los extremos relativos son puntos críticos.

   Sea $p_0\in S$ un máximo relativo de f (para un mínimo se hace por simetría), de modo que un entorno $V\subseteq S$ de p_0 con $f(p_0)\geq f(p)$ para todo $p\in V$. Para calcular $f_{p_0}(v)$, sean $\alpha:I\to V$ una curva regular con $\alpha(0)=p_0$ y $\alpha'(0)=v\in T_{p_0}S$ y $h:=f\circ\alpha:I\to\mathbb{R}$, $h(t)\leq h(0)$ para todo $t\in I$, luego $h'(0)=0$ y $df_{p_0}(v)=(f\circ\alpha)'(0)=h'(0)=0$.

2.5. Primera forma fundamental

Dados una superficie regular S y $p \in S$, definimos el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p S}$ como el producto escalar usual restringido al plano tangente. Llamamos **primera forma fundamental** de S en p a $\mathcal{I}_p : T_p S \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{I}_p(v) := \langle v, v \rangle_p$.

Llamamos **coeficientes de la primera forma fundamental** de una parametrización (U, X) de S a $E := \langle X_u, X_u \rangle$, $F := \langle X_u, X_v \rangle$ y $G := \langle X_v, X_v \rangle$, de modo que para $q \in U$, $p := X(q)$ y $w \in T_p S$, si $u, v \in \mathbb{R}$ son tales que $w = uX_u(q) + vX_v(q)$, entonces

$$\mathcal{I}_p(v) = u^2 E(q) + 2uvF(q) + v^2 G(q).$$

Ejemplos:

1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^2$ diferenciable, $S := G(f)$, (U, X) la parametrización de S dada por $X(u, v) := (u, v, f(u, v))$, $f_u := \frac{\partial f}{\partial u}$ y $f_v := \frac{\partial f}{\partial v}$, entonces $E = 1 + f_u^2$, $F = f_u f_v$ y $G = 1 + f_v^2$.

   $X_u = (1, 0, f_u)$ y $X_v = (0, 1, f_v)$.

2. Sean $p, v, w \in \mathbb{R}^3$, $S := p + \langle v, w \rangle$ un plano y $(\mathbb{R}^2, X)$ una parametrización de S con $X(t, u) = p + tv + uw$, entonces $E = |v|^2$, $F = \langle v, w \rangle$ y $G = |w|^2$. En particular, si (v, w) es una base ortonormal, $E = G = 1$ y $F = 0$.

   $X_u = (v_1, v_2, v_3) = v$ y, análogamente, $X_v = w$.

3. Dados $r > 0$, el cilindro $C := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ y la parametrización (U, X) de C dada por $U := (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ y $X(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$, entonces $E = r^2$, $F = 0$ y $G = 1$.

   $X_u = (-r \sin u, r \cos u, 0)$ y $X_v = (0, 0, v)$.

4. Sean $a > 0$ y $\alpha(u) := (\cos u, \sin u, au)$, el **helicoide** es la superficie regular obtenida de trazar, desde cada punto de $\alpha(\mathbb{R})$, una recta paralela al plano XY que pasa por el eje Z. Una parametrización es pues $(\mathbb{R}^2, X)$ con $X(u, v) := (v \cos u, v \sin u, au)$, y entonces $E = a^2 + v^2$, $F = 0$ y $G = 1$.

   $X_u = (-v \sin u, v \cos u, a)$ y $X_v = (\cos u, \sin u, 0)$.

Sean S una superficie regular, (U, X) una parametrización de S y E, F y G los coeficientes de su primera forma fundamental:

1. $E, G > 0$.

   $X_u, X_v \neq 0$.

2. $EG - F^2 = |X_u \wedge X_v|^2 > 0$.

   $|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \sin^2 \theta + |X_u|^2 |X_v|^2 \cos^2 \theta = |X_u|^2 |X_v|^2$ para un cierto ángulo θ, luego $EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \wedge X_v|^2 > 0$, pues X_u y X_v son linealmente independientes.

2.5.1. Elemento de arco

Sean S una superficie regular, (U,X) una parametrización de S, $\alpha : I \to X(U)$ una curva con $0 \in I$, $\tilde{\alpha} := (u,v) : I \to U$ su expresión en coordenadas y $s(t) := L_0^t(\alpha)$, entonces $\dot{s}^2(t) = E(\tilde{\alpha}(t))\dot{u}^2(t) + 2F(\tilde{\alpha}(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G(\tilde{\alpha}(t))\dot{v}^2(t)$, lo que suele escribirse como

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2,$$

y se dice que ds es el **elemento de arco** o **de línea** de S. En efecto,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\alpha'(r)|dr = \int_0^t \sqrt{\mathcal{I}_{\alpha(r)}(\alpha'(r))}dr \\ &= \int_0^t \sqrt{E(\tilde{\alpha}(r))u'(r)^2 + 2F(\tilde{\alpha}(r))u'(r)v'(r) + G(\tilde{\alpha}(r))v'(r)^2}dr. \end{aligned}$$

2.5.2. Parametrizaciones ortogonales

Sean S una superficie regular, (U,X) una parametrización de S, $(u_0,v_0) \in U$ y $\alpha : I \to S$ y $\beta : J \to S$ las **curvas coordenadas** para (u_0,v_0), dadas por $\alpha(u) := X(u,v_0)$ y $\beta(v) := X(u_0,v)$. Si E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental, α y β se cortan en $X(u_0,v_0)$ formando un ángulo

$$\theta := \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Así, estas curvas son ortogonales si y sólo si $F = 0$, y si esto ocurre en todo $(u_0,v_0) \in U$, X es una **parametrización ortogonal**.

2.5.3. Áreas

Una **región** de una superficie regular S es un subconjunto $R \subseteq S$ conexo y relativamente compacto tal que cada componente conexa de su frontera es una curva regular salvo en un número finito de puntos y homeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

Si R es una región de S tal que existe una parametrización (U,X) con $R \subseteq X(U)$, definimos el **área** de R como

$$A(R) := \int_{X^{-1}(R)} |X_u \wedge X_v| du\, dv = \int_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} du\, dv.$$

El área no depende de la parametrización. **Demostración:** Sean $(\overline{U},\overline{X})$ otra parametrización de S con $R \subseteq \overline{X}(\overline{U})$ y $h := (\overline{u},\overline{v}) := \overline{X}^{-1} \circ X$, como $X(u,v) = \overline{X}(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v))$, se tiene $X_u = \overline{X}_u \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \overline{X}_v \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}$ y $X_v = \overline{X}_u \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \overline{X}_v \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}$, y usando la antisimetría del producto vectorial,

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v}(\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v) + \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}(\overline{X}_v \wedge \overline{X}_u) \\ &= \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\right)(\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v) = \det(Jh)(\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v). \end{aligned}$$

Por tanto $|\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v| = |\det(Jh)|^{-1}|X_u \wedge X_v| = |\det(Jh^{-1})||X_u \wedge X_v|$, y entonces, por el teorema del cambio de variable,

$$\iint_{\overline{X}^{-1}(R)} |\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v| d\overline{u}\, d\overline{v} = \iint_{\overline{X}^{-1}(R)} |X_u \wedge X_v||\det(Jh^{-1})| d\overline{u}\, d\overline{v} = \iint_{X^{-1}(R)} |X_u \wedge X_v| du\, dv.$$

El área del toro $X(u,v) := ((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\sin v, r\sin u)$ es $4\pi^2 ar$. **Demostración:** Se tiene

$$X_u(u,v) = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u),$$
$$X_v(u,v) = (-(r\cos u + a)\sin v, (r\cos u + a)\cos v, 0),$$

luego los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = r^2$, $F = 0$ y $G = (r\cos u + a)^2$, y $\sqrt{EG - F^2} = r(r\cos u + a)$. La parametrización dada con el abierto $U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ no cubre todo el toro, pero si definimos la región $R_\varepsilon := X((\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \times (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)) \subseteq X(U)$,

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \iint_{X^{-1}(R_\varepsilon)} r(a + r\cos u) du\, dv = \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} r(a + r\cos u) dv\, du \\ &= 2r(\pi - \varepsilon) \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} (a + r\cos u) du = 2r(\pi - \varepsilon)\left(a(2\pi - 2\varepsilon) + r(\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin\varepsilon)\right) \\ &= 4r(\pi - \varepsilon)(a(\pi - \varepsilon) + r\sin\varepsilon), \end{aligned}$$

y tomando límites, $A(\mathbb{T}^2) = A(R_0) = 4\pi^2 ar$.

Capítulo 3

Curvatura de superficies

3.1. Orientación

Dada una superficie regular S, un **campo de vectores** sobre S es una función $\xi : S \to \mathbb{R}^3$, y es **tangente** si $\xi(p) \in T_pS$ para todo $p \in S$, **normal** si $\xi(p) \in (T_pS)^\perp$ para todo $p \in S$ y **unitario** si $|\xi(p)| = 1$ para todo $p \in S$. Llamamos $\mathfrak{X}(S)$ al conjunto de campos de vectores tangentes sobre S y $\mathfrak{X}(S)^\perp$ al conjunto de campos de vectores normales sobre S.

Una **orientación** de una superficie regular S es un campo de vectores diferenciable, normal y unitario sobre S. S es **orientable** si admite una orientación, si y sólo si existe un campo ξ normal y diferenciable sobre S que no se anula en ningún punto, pues las orientaciones son de esta forma y, dado ξ, basta tomar la orientación $N(p) := \xi(p)/|\xi(p)|$. Una orientación N de S da a cada $p \in S$ un sentido de giro para T_pS dado por el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$. S está orientada cuando se ha escogido una orientación concreta, en cuyo caso dicha orientación es su **aplicación de Gauss**.

Ejemplos:

1. El plano $p_0 + \langle v \rangle^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ admite la orientación $N(p) := v/|v|$.

2. Dados $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ y un valor regular c de f, la superficie de nivel $S := f^{-1}(c)$ admite la orientación
$$N(p) := \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|},$$
donde $\nabla f(p) := (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))$ es el **gradiente** de f en p.

   Sean $p \in S$, $\alpha := (x, y, z) : I \to S$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $v := \alpha'(0) \in T_pS$, para $t \in I$ es $f(\alpha(t)) = c$ por ser $\alpha(t) \in S$, luego derivando, $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha(t))z'(t) = 0$ y $\nabla f(p) \perp v$. Además, $\nabla f(p) \neq 0$ porque $p \in S = f^{-1}(c)$ y c es un valor regular de f, y claramente ∇f es diferenciable.

3. $\mathbb{S}^2(r)$ admite la orientación $N(p) = \frac{1}{r}p$.

   Sea $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$, r^2 es un valor regular de f y $\mathbb{S}^2$ es la superficie de nivel

$\{p \mid f(p) = r^2\}$, luego admite la orientación

$$N(x,y,z) = \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} = \frac{(2x,2y,2z)}{|(2x,2y,2z)|} = \frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|} = \frac{1}{r}(x,y,z).$$

4. El cilindro $\{x^2 + y^2 = r^2\}$ admite la orientación $N(x,y,z) = (x,y,0)$.

   Es una superficie de nivel y tiene pues orientación $N(p) = \frac{(2x,2y,0)}{|(2x,2y,0)|} = \frac{(x,y,0)}{|(x,y,0)|} = \frac{1}{r}(x,y,0)$.

5. Dada $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el abierto U, el grafo $S := \{(x,y,f(x,y))\}_{x,y\in U}$ admite la orientación
$$N(u,v) = \frac{(-f_u,-f_v,1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}(u,v).$$

   Dada la parametrización (U,X) con $X(u,v) := (u,v,f(u,v))$, $X_u = (1,0,f_u)$ y $X_v = (0,1,f_v)$, y $X_u \wedge X_v = (-f_u,-f_v,1)$.

Las superficies orientables tienen exactamente dos orientaciones, una opuesta de la otra.

Dos cartas (U,X) y (U',X') de S son **compatibles** si $V := X(U)$ y $V' := X'(U')$ son disjuntos o $\det(Jh) > 0$, donde $h : X^{-1}(V') \to (X')^{-1}(V)$ es el cambio de coordenadas de V a V'. Un **atlas** para S es una familia $\{(U_i,X_i)\}_{i\in I}$ de cartas tales que $\bigcup_{i\in I} X_i(U_i) = S$. Entonces una superficie es orientable si y sólo si existe un atlas cuyas cartas son compatibles.

$\Longleftarrow$] Sean $\mathcal{A} := \{(U_i,X_i)\}_{i\in I}$ un atlas de cartas compatibles en S, $p \in S$, $(U,X) \in \mathcal{A}(I)$ con $p \in X(U)$ y $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$N(X(u,v)) := N(u,v) := \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(u,v),$$

N está bien definido y es diferenciable, normal y unitario. Sean ahora $(\overline{U},\overline{X}) \in \mathcal{A}(I)$ con $p \in \overline{X}(\overline{U})$, $\overline{N}(\overline{X}(u,v)) := \overline{N}(u,v) := \frac{\overline{X}_u \cap \overline{X}_v}{|\overline{X}_u \cap \overline{X}_v|}(u,v)$ y h el cambio de coordenadas de (U,X) a $(\overline{U},\overline{X})$, para $(u,v) \in X^{-1}(V_0)$,

$$dX(u,v) = d(\overline{X} \circ h)(u,v) = d\overline{X}(h(u,v)) \circ dh(u,v),$$

luego

$$N(u,v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{\det(Jh(u,v))}{|\det(Jh(u,v))|}\frac{\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v}{|\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v|}(h(u,v)) \overset{Jh(u,v)>0}{=} \overline{N}(u,v),$$

de modo que $N(p)$ es diferenciable, normal, unitario y no depende de la carta del atlas escogida.

$\Longrightarrow$] Sea N una orientación de S, para toda carta (U,X) de S es $N(X(q)) = \pm\frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q)$ para todo $q \in U$. Entonces, para $p \in S$, podemos tomar una carta (U_p,X_p) de S con $N(X(q)) = \frac{(X_p)_u \wedge (X_p)_v}{|(X_p)_u \wedge (X_p)_v|}(q)$ para $q \in U$, pues si el normal fuese el opuesto basta cambiar $X_p(u,v)$ por $X_p(v,u)$ y U_p por $\{(u,v)\}_{(v,u)\in U}$, y el resultado se tiene por la antisimetría del producto vectorial. Con esto, dados $a,b \in S$ con $V := X_a(U_a) \cap X_b(U_b) \neq \emptyset$, queremos ver que el determinante del cambio de coordenadas $h : X_a^{-1}(V) \to X_b^{-1}(V)$ de (U_a, X_a) a (U_b, X_b) tiene jacobiano con determinante positivo. En efecto, $\det(Jh)$ debe ser no nulo, pero si fuera negativo, para un $p \in V$, sean $q_a := X_a^{-1}(p)$ y $q_b := X_b^{-1}(p)$, entonces

$$N(p) = \frac{X_{au} \wedge X_{av}}{|X_{au} \wedge X_{av}|}(q_a) = \frac{\det(Jh)}{|\det(Jh)|} \frac{X_{bu} \wedge X_{bv}}{|X_{bu} \wedge X_{bv}|}(q_b) = -N(p),$$

luego $N(p) = 0\#$. Por tanto $\det(Jh) > 0$ y las cartas del atlas $\{(U_p, X_p)\}_{p \in S}$ son compatibles.

En adelante, cuando consideremos una parametrización (U, X), escribiremos $N(u, v) := N(X(u, v$ $N_u := \frac{\partial(N \circ X)}{\partial u}$ y $N_v := \frac{\partial(N \circ X)}{\partial v}$. En general, para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_{x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

3.2. La segunda forma fundamental

Sea S una superficie orientada con aplicación de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$, llamamos **imagen esférica** de S a $\mathrm{Im}N \subseteq \mathbb{S}^2$. Ejemplos:

1. La imagen esférica de un plano es unipuntual.

   Dado el plano $\Pi := p_0 + \langle v \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, donde podemos suponer v unitario, la imagen de $N(p) := v$ es $\{v\}$.

2. La imagen esférica de $\mathbb{S}^2$ es $\mathbb{S}^2$.

   La aplicación de Gauss es $\pm 1_{\mathbb{S}^2}$.

3. La imagen esférica de un grafo $\{(x, y, f(x, y))\}_{(x,y) \in U}$ con $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable está contenida en el hemisferio (estricto) norte o sur.

   Una orientación es $N(u, v) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}(u, v)$, y como la coordenada z de N es siempre positiva, $\mathrm{Im}N$ está en el hemisferio norte estricto. Con la orientación opuesta está en el hemisferio sur estricto.

4. La imagen esférica de un cilindro es un circulo máximo de la esfera.

   Los cilindros se obtienen por un movimiento de $S_r := \{x^2 + y^2 = r^2\}$ para algún $r > 0$, y como su orientación es $N(x, y, z) = \pm \frac{1}{r}(x, y, 0)$, $N(S_r) = \{\frac{1}{r}(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = r^2\} = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

5. El **catenoide**, $C := \{x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$, tiene imagen esférica $\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathsf{N}, \mathsf{S}\}$, donde $\mathsf{N} := (0, 0, 1)$ es el **polo norte** y $\mathsf{S} := (0, 0, -1)$ es el **polo sur**.

   Sea $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - \cosh^2 z$, como $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ y $f_z = -2 \cosh z \sinh z$, el único punto crítico de f es el origen, con $f(0) = -1$, de modo que 0 es un valor regular de $f \in \mathcal{C}^\infty$ y $C = \{f(x, y, z) = 0\}$ es una superficie de nivel regular y

$$\begin{aligned} N(x, y, z) &= \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|} = \frac{(2x, 2y, -2 \cosh z \sinh z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + \cosh^2 z \sinh^2 z}} \\ &= \frac{(x, y, -\cosh z \sinh z)}{\sqrt{\cosh^2 z + \cosh^2 z \sinh^2 z}} = \frac{(x, y, -\cosh z \sinh z)}{\cosh^2 z}. \end{aligned}$$

Como $N_1(p)^2 + N_2(p)^2 = \frac{x^2+y^2}{\cosh^4 z} = \frac{1}{\cosh^2 z} > 0$, no se cubren los polos norte y sur. Sean ahora $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathsf{N}, \mathsf{S}\}$, $z := \arg\tanh(-\hat{z})$ (que existe porque $\hat{z} \in (-1, 1)$), $x := \hat{x} \cosh^2 z$ e $y := \hat{y} \cosh^2 z$, es claro que $N(x, y, z) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Ahora bien,

$$x^2 + y^2 = (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \cosh^4 z = (1 - \hat{z}^2) \cosh^4 z = \left(1 - \tanh^2 z\right) \cosh^4 z = \\ = \frac{\cosh^2 z - \sinh^2 z}{\cosh^2 z} \cosh^4 z = \frac{\cosh^4 z}{\cosh^2 z} = \cosh^2 z,$$

luego $(x, y, z) \in C$ y $N(x, y, z)$ cubre $\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathsf{N}, \mathsf{S}\}$.

Para $p \in \mathbb{S}^2$ es $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_p\mathbb{S}^2$, pues $N(p) = \pm p$ y $T_{-p}\mathbb{S}^2 = \langle N(-p)\rangle^\perp = \langle p\rangle^\perp = \langle N(p)\rangle^\perp = T_p\mathbb{S}^2$.

Sea S una superficie regular orientada por N, llamamos **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en $p \in S$ a $A_p := -dN_p : T_pS \to T_pS$. En efecto, como $N : S \to \mathbb{S}^2$, $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, pero como la normal en $\mathbb{S}^2$ es $1_{\mathbb{S}^2}$, $T_{p'}\mathbb{S}^2 = \langle p'\rangle^\perp$ para todo $p' \in \mathbb{S}^2$ y en particular $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \langle N(p)\rangle^\perp = T_pS$.

A_p es **autoadjunto**, es decir, $\langle A_pv, w\rangle = \langle v, A_pw\rangle$. **Demostración:** Por linealidad, basta demostrarlo para una base de T_pS. Sean (U, X) una parametrización de S en p y $q := (u_0, v_0) := X^{-1}(p)$, tomamos la base $(X_u(q), X_v(q))$ y queremos ver que $\langle dN_p(X_u(q)), X_v(q)\rangle = \langle X_u(q), dN_p(X_v(q))\rangle$. Sea entonces $\alpha(u) := X(u_0 + u, v_0)$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_u(q)$, luego $dN_p(X_u(q)) = \frac{\partial(N\circ\alpha)}{\partial u}(0) = \frac{\partial(N\circ X)}{\partial u}(u_0, v_0) = N_u(u_0, v_0)$. Análogamente $dN_p(X_v(q)) = N_v(u_0, v_0)$, por lo que queda ver que $\langle N_u, X_v\rangle(q) = \langle N_v, X_u\rangle(q)$. Sabemos que $\langle N, X_u\rangle = \langle N, X_v\rangle = 0$, y derivando, $\langle N_v, X_u\rangle + \langle N, X_{uv}\rangle = \langle N_u, X_v\rangle + \langle N, X_{vu}\rangle = 0$, pero $X_{uv} = X_{vu}$.

Ejemplos:

1. Para un plano, $A_p \equiv 0$.

   N es fijo, luego $-dN_p \equiv 0$.

2. Para $\mathbb{S}^2(r)$ orientada con $N(p) = \pm\frac{1}{r}p$, $A_p = \mp\frac{1}{r}1_{T_p\mathbb{S}^2(r)}$.

3. Para el cilindro $X(\mathbb{R}^2)$ con $X(u, v) := (r\cos u, r\sin u, v)$, si $p \in C$ y $q \in X^{-1}(p)$, $A_p = \operatorname{diag}(-\frac{1}{r}, 0)$ respecto a la base $(X_u(q), X_v(q))$.

   Si $p =: (x, y, z)$ y $q =: (u, v)$, $X_u(q) = (-r\sin u, r\cos u, 0)$, $X_v(q) = (0, 0, 1)$ y, como $N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0) = (\cos u, \sin u, 0)$, $N_u(q) = (-\sin u, \cos u, 0) = -\frac{1}{r}X_u$ y $N_v(q) = 0$.

4. Para el **paraboloide hiperbólico** o **silla de montar**, $S := \{y^2 - x^2 = z\} = \{(u, v, v^2 - u^2)\}_{(u,v)\in\mathbb{R}^2}$, $A_p(0) \equiv \operatorname{diag}(-2, 2)$ respecto a la base $(X_u(0), X_v(0))$.

   S es una superficie porque es el grafo de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) := v^2 - u^2$. Entonces

   $$N(u, v) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{(2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}},$$

   luego

   $$N_u(u, v) = \frac{(2(1 + 4u^2 + 4v^2) - 8u^2, 8uv, -4u)}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}} = \frac{(2(1 + 4v^2), 8uv, -4u)}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}},$$

   $$N_v(u, v) = \frac{(-8uv, -2(1 + 4u^2 + 4v^2) + 8v^2, -4v)}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}} = \frac{(-8uv, -2(1 + 4u^2), -4v)}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}},$$

y en particular $N_u(0) = (2,0,0)$ y $N_v(0) = (0,-2,0)$, pero $X_u(0) = (1,0,0)$ y $X_v(0) = (0,1,0)$, luego $N_u(0) = 2X_u(0)$ y $N_v(0) = 2X_v(0)$.

El operador forma A_p lleva asociada unívocamente una forma bilineal simétrica $\sigma_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ dada por $\sigma_p(v,w) := \langle A_p v, w\rangle$, así como una forma cuadrática $\mathcal{II}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{II}_p(v) := \sigma_p(v,v) = \langle A_p v, v\rangle$. $\mathcal{II}_p$ es la **segunda forma fundamental** de S en p.

Las tres formas dan la misma información usando la **identidad de polarización:**

$$\sigma_p(v,w) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{II}_p(v+w) - \mathcal{II}_p(v) - \mathcal{II}_p(w)\right).$$

3.3. Curvas geodésica y normal

Sean S una superficie regular y $\alpha : I \to S$ una curva regular, un **campo de vectores a lo largo de** α es una función $V : I \to \mathbb{R}^3$, y es **tangente** a S (a lo largo de α) si para $t \in S$ es $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$. Sea $V : I \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores tangente y diferenciable, llamamos **derivada covariante** a

$$\frac{DV}{dt}(t) := \pi_{T_{\alpha(t)}S} V'(t),$$

la proyección de $V'(t)$ en T_pS. Propiedades: Sean $V, W : I \to T_pS$ y $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciables, siendo I un intervalo:

1. $\frac{D(fV)}{dt} = f'V + f\frac{DV}{dt}$.

   Si $\pi := \pi_{T_{\alpha(t)}S}$, $\frac{D(fV)}{dt} = \pi((fV)') = \pi(fV' + f'V) = f\pi(V') + f'\pi(V) = f\frac{DV}{dt} + f'V$.

2. $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

   $\frac{D(V+W)}{dt} = \pi((V+W)') = \pi(V') + \pi(W') = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

3. $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt} W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$.

   $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{dV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{dW}{dt}\rangle$, pero dada una base ortonormal (v_1, v_2, v_3) con $T_pS = \text{span}\{v_1, v_2\}$, si $\frac{dV}{dt}(t) = \sum_i x_i v_i$ y $W(t) = \sum_i y_i v_i$, $\langle \frac{dV}{dt}(t), W(t)\rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \overset{y_3=0}{=} x_1y_1 + x_2y_2 = \langle \pi(\frac{dV}{dt}(t)), W(t)\rangle = \langle \frac{DV}{dt}(t), W(t)\rangle$, y análogamente para $\langle V, \frac{dW}{dt}\rangle$, luego $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{dV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{dW}{dt}\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$.

Sean S una superficie regular orientada por N y $\alpha : I \to S$ una curva, entonces $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para $t \in I$, pero en general $\alpha''(t) \notin T_{\alpha(t)}S$, aunque se escribe de forma única como la suma de una **aceleración tangencial** o **intrínseca** $\alpha''(t)^\top \in T_{\alpha(t)}S$ y una **aceleración normal** o **extrínseca** $\alpha''(t)^\perp \in \text{span}\{N(\alpha(t))\}$. Como $\alpha''(t)^\top = \frac{D\alpha'}{dt}$,

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt}(t) + \langle \alpha''(t), N(\alpha(t))\rangle N(\alpha(t)).$$

Sea $\alpha : I \to S$ una curva parametrizada por longitud de arco, el **triedro de Darboux** es la base ortonormal positivamente orientada $(\alpha'(s), J\alpha'(s) := \alpha'(s) \wedge N(\alpha(s)), N(\alpha(s)))$. Entonces

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = \kappa_g(s) J\alpha'(s),$$

donde $\kappa_g := \langle \alpha'', J\alpha' \rangle : I \to \mathbb{R}$, es la **curvatura geodésica** de α, cuyo signo depende de N. En efecto, $\langle \frac{D\alpha'}{ds}(s), \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s) - \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle - \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle \langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0$, y $\kappa_g(s) = \langle \frac{D\alpha'}{ds}(s), J\alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle$, pero $J\alpha'(s)$ puede ser un vector o su opuesto según lo sea N.

Dada una curva $\alpha : I \to S$, $\mathcal{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle$. En efecto, como $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para cada t, $\langle \alpha'(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0$ y, derivando, $\langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle \alpha'(t), (N \circ \alpha)'(t) \rangle = 0$, pero $(N \circ \alpha)'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$, luego $\langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle = -\langle \alpha'(t), dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \rangle = \langle \alpha'(t), A_{\alpha(t)}\alpha'(t) \rangle$ $\mathcal{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$.

Entonces, dados $p \in S$ y $v \in T_pS$ unitario, llamamos **curvatura normal** de S en p en la dirección de v a $\kappa_n(v,p) := \mathcal{II}_p(v) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle$, siendo $\alpha : (-\delta, \delta) \to S$ una curva con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Ejemplos:

1. Un plano tiene curvatura normal 0 en todo punto y dirección.

   Como $A_p = 0$, $\kappa_n(v,p) = \mathcal{II}_p(v) = \langle A_p v, v \rangle = 0$.

2. $\mathbb{S}^2(r)$ tiene curvatura normal constante $-\frac{1}{r}$.

   Como $N(p) = \frac{1}{r}p$, $\kappa_n(v,p) = \langle A_p v, v \rangle = \langle -\frac{1}{r}v, v \rangle = -\frac{1}{r}|v|^2 = -\frac{1}{r}$.

Dados $p \in S$, $v \in T_pS$ unitario y $\Pi_v := \text{span}\{v, N(p)\}$, llamamos **sección normal** C_v a la curva regular plana resultante de intersecar S con Π_v. Sea entonces $\alpha : I \to S$ una parametrización por arco de C_v con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $\kappa_n(v,p) = \kappa(0)$, siendo κ la curvatura de α como curva plana. En efecto, como $v \in T_pS$, $v \perp N(p)$ y el vector normal es $\mathbf{n} = J_{\Pi_v} v = \pm N(p)$, y como todavía no hemos orientado el plano podemos tomar $\mathbf{n} = N(p)$, pero entonces $\kappa_n(v,p) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = \langle \kappa(0)\mathbf{n}(0), N(p) \rangle = \kappa(0)$.

Si $\alpha : I \to S$ es una curva parametrizada por arco, $\alpha''(s) = \kappa_g(s) J\alpha'(s) + \kappa_n(s) N(\alpha(s))$, siendo $\kappa_n(s) := \kappa_n(\alpha'(s), \alpha(s)) = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle$, luego

$$\kappa(s)^2 = \kappa_g(s)^2 + \kappa_n(s)^2.$$

3.4. Curvaturas principales

AAlG

Toda matriz simétrica real $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ admite una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = P^tAP$ es diagonal.

Dados una superficie regular S orientada y $p \in S$, existe una base ortonormal (e_1, e_2) en la que A_p es diagonal, pues A_p es simétrica. Si $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ son los valores propios asociados respectivamente a e_1 y e_2, podemos suponer que $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$, y llamamos **curvaturas principales** de S en p a $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ y **direcciones principales** a e_1 y e_2, o a todos los vectores unitarios de T_pS si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$, pues en tal caso todos los vectores no nulos son propios al ser A_p una homotecia. Se tiene $\kappa_1(p) = \kappa_n(e_1, p)$ y $\kappa_2(p) = \kappa_n(e_2, p)$, pues $\kappa_n(e_i, p) = \langle A_p e_i, e_i \rangle = \langle \kappa_i(p) e_i, e_i \rangle = \kappa_i(p)$.

1. Todas las direcciones del plano y la esfera son principales.

   Como κ_n es constante, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

2. El cilindro $\{x^2+y^2=r^2\}$ tiene como curvaturas principales $-\frac{1}{r}$ y 0.

   Sean $C:=\{x^2+y^2=r^2\}=\{X(u,v):=(r\cos u, r\sin u, v)\}_{u,v\in\mathbb{R}}$, $p=(x,y,z)\in C$ y la orientación $N(p):=\frac{1}{r}(x,y,0)$, entonces $X_u=(-r\sin u, r\cos u, 0)$, $X_v=e_3$ y $N(u,v)=(\cos u,\sin u,0)$, luego $A_p=-(-\sin u,\cos u,0)=-\frac{1}{r}X_u$ y por tanto $A_p\equiv\text{diag}(-\frac{1}{r},0)$ con la base (X_u,X_v) de T_pS.

3. La silla de montar tiene curvaturas principales -2 y 2 en el origen.

   $A_p\equiv\text{diag}(-2,2)$.

Una **línea de curvatura** en una superficie regular orientada S es una curva $\alpha:I\to S$ tal que $\alpha'(t)$ es una dirección principal de $\alpha(t)$ para todo $t\in I$. Si las curvaturas principales son distintas en todo punto de un abierto $V\subseteq S$, por cada $p\in V$ pasan dos únicas líneas de curvatura y estas se cortan de forma ortogonal.

Fórmula de Euler: Sean S una superficie regular orientada, $p\in S$, $\kappa_1(p)\leq\kappa_2(p)$ las curvaturas principales de S en p, e_1 y e_2 las respectivas direcciones principales, $v\in T_pS$ y θ tal que $\cos\theta=\langle e_1,v\rangle$, entonces $\kappa_n(v,p)=\kappa_1(p)\cos^2\theta+\kappa_2(p)\sin^2\theta$. En efecto, sea $v=:\cos\omega e_1+\sin\omega e_2$, $\kappa_n(v,p)=\langle A_pv,v\rangle=\langle\kappa_1(p)\cos\omega e_1+\kappa_2(p)\cos\omega e_2,\cos\omega e_1+\sin\omega e_2\rangle=\kappa_1(p)\cos^2\omega+\kappa_2(p)\sin^2\omega$, y aunque $\omega=\pm\theta+2k\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$, el coseno y por tanto el cuadrado del seno coinciden.

Con esto, $\kappa_1(p)=\text{mín}\{\kappa_n(v,p)\}_{|v|=1}$ y $\kappa_2(p)=\text{máx}\{\kappa_n(v,p)\}_{|v|=1}$, pues por la fórmula, si $|v|=1$, $\kappa_n(v,p)=\kappa_1(p)(1-\sin^2\theta)+\kappa_2(p)\sin^2\theta$ para algún θ. Llamamos **curvatura mínima** a $\kappa_1(p)$ y **curvatura máxima** a $\kappa_2(p)$. La **curvatura de Gauss** de S en $p\in S$ es $K(p):=\det A_p=\kappa_1(p)\kappa_2(p)$, y la **curvatura media** es $H(p):=\frac{1}{2}\text{tr}A_p=\frac{1}{2}(\kappa_1(p)+\kappa_2(p))$.

Las curvaturas máxima, mínima y media cambian de signo al cambiar de orientación. La curvatura de Gauss no, pues es el producto de dos curvaturas que cambian de signo a la vez.

Sea S una superficie regular, $p\in S$ es **elíptico** si $K(p)>0$, **hiperbólico** si $K(p)<0$, **parabólico** si $K(p)=0$ pero $A_p\not\equiv 0$ y **llano** o **plano** si $A_p\equiv 0$. Ejemplos:

1. Los puntos de un plano son planos.

2. Los puntos de una esfera son elípticos.

   Si r es el radio, $K(p)=(-\frac{1}{r})^2=\frac{1}{r^2}>0$.

3. El origen en la silla de montar es hiperbólico.

   $A_p\equiv\text{diag}(-2,2)$ respecto de cierta base, luego $K(p)=-4$.

4. Los puntos de un cilindro son parabólicos.

   Si r es el radio, $A_p\equiv\text{diag}(-\frac{1}{r},0)$.

5. En $\{z=(x^2+y^2)^2\}$, el origen es un punto plano.

En una superficie regular S orientada, $p\in S$ es un **punto umbilical** si $\kappa_1(p)=\kappa_2(p)$. S es **totalmente umbilical** si todos sus puntos son umbilicales. Así, el plano y la esfera son totalmente umbilicales.

Como **teorema**, toda superficie regular, orientable con orientación $\mathcal{C}^2$, conexa y totalmente umbilical es un trozo de esfera o plano.

Demostración: Sea S la superficie y N una orientación de S, para $p\in S$ es $H(p)=\kappa_1(p)=\kappa_2(p)$, luego $A_p\equiv\text{diag}(H(p),H(p))$ y $A_p=H(p)1_{T_pS}$. $H:S\to\mathbb{R}$ es diferenciable, y queremos ver que es constante. Sean $p \in S$, (U, X) una parametrización de S en p, $q := (u_0, v_0) := X^{-1}(p)$ y $\alpha(u) := X(u_0 + u, v_0)$, como $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = q$, $dH_p(X_u(q)) = \frac{d(H\circ\alpha)}{dt}(0) = \frac{d}{dt}(H(X(u_0 + u, v_0)))(0) = (H \circ X)_u(q)$, y por simetría $dH_p(X_v(q)) = \frac{\partial(H\circ X)}{\partial v}(q)$.

Como $A_p = H(p)1_{T_pS}$, $(H \circ X)(q)X_u(q) = H(p)X_u(q) = A_p(X_u(q)) = -dN_p(X_u(q)) = -(N \circ X)(q)$, y como esto es cierto para todo $q \in U$, $(N \circ X)_u = -(H \circ X)X_u$, y por simetría $(N \circ X)_v = -(H \circ X)X_v$. Derivando, $(N \circ X)_{uv} = -(H \circ X)_v X_u - (H \circ X)X_{uv}$ y $(N \circ X)_{vu} = -(H\circ X)_u X_v - (H\circ X)X_{vu}$, y como las derivadas cruzadas coinciden, $(H\circ X)_v X_u = (H\circ X)_u X_v$. Como $(X_u(q), X_v(q))$ es una base en cada $q \in U$, necesariamente $(H \circ X)_u, (H \circ X)_v \equiv 0$, luego $dH_p(X_u(q)), dH_p(X_v(q)) = 0$ y al ser S conexa, $H \equiv c$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

Si $c = 0$, $H \equiv 0$ y $dN_p = -A_p \equiv 0$, luego N es constante en algún $a \in \mathbb{R}^3$. Sean ahora $\phi(p) := \langle p, a\rangle$, $p \in S$, $v \in T_pS$ y $\alpha : I \to S$ una curva con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $d\phi_p(v) = \frac{d(\phi\circ\alpha)}{dt}(0) = \frac{d}{dt}(\langle\alpha(t), a\rangle)(0) = \langle\alpha'(0), a\rangle = \langle v, a\rangle \overset{a=N(p)}{=} 0$, luego ϕ es constante en algún $d \in \mathbb{R}$ y $S \subseteq \{\langle p, a\rangle = d\} = \{\langle p - p', a\rangle = 0\}$ para algún p' con $\langle p', a\rangle = d$, pero $\{\langle p - p', a\rangle = 0\} = p' + \langle a\rangle^\perp$, luego S esta contenido en un plano.

Si $c \neq 0$, sea $\phi : S \to \mathbb{R}^3$ la función diferenciable dada por $\phi(p) := p + \frac{1}{c}N(p)$, para $p \in S$, $v \in T_pS$ y una curva $\alpha : I \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces

$$
\begin{aligned}
d\phi_p(v) &= \frac{d(\phi\circ\alpha)}{dt}(0) = \frac{d}{dt}\left(\alpha(t) + \frac{1}{c}N(\alpha(t))\right)(0) = \alpha'(0) + \frac{1}{c}(N \circ \alpha)'(0) \\
&= v + \frac{1}{c}dN_p(v) = v - \frac{1}{c}A_p v = v - \frac{1}{c}cv = 0,
\end{aligned}
$$

luego ϕ es constante en algún $a \in \mathbb{R}^3$. Pero para $p \in S$, $p - a = -\frac{1}{c}N(p)$, luego $\|p - a\|^2 = \frac{1}{c^2}$ y todos los puntos de S están en la esfera $a + \mathbb{S}^2(\frac{1}{c^2})$.

3.5. Parámetros de la segunda forma fundamental

Sean S una superficie regular orientada por N y (U, X) una parametrización de S, los **coeficientes de la segunda forma fundamental** son $e, f, g : U \to \mathbb{R}$ dados por

$$
\begin{aligned}
e &:= \langle N, X_{uu}\rangle = -\langle N_u, X_u\rangle, \\
f &:= \langle N, X_{uv}\rangle = -\langle N_v, X_u\rangle = -\langle N_u, X_v\rangle, \\
g &:= \langle N, X_{vv}\rangle = -\langle N_v, X_v\rangle,
\end{aligned}
$$

y para $p \in S$ y $v \in T_pS$, si $q := X^{-1}(p)$ y $v = v_1X_u(q) + v_2X_v(q)$, entonces

$$\mathcal{II}_p(v) := v_1^2 e + 2v_1v_2 f + v_2^2 g.$$

Demostración: $\langle N, X_u\rangle = \langle N, X_v\rangle = 0$, y derivando se obtiene $\langle N_u, X_u\rangle + \langle N, X_{uu}\rangle = 0$, $\langle N_v, X_u\rangle + \langle N, X_{uv}\rangle = 0$, $\langle N_u, X_v\rangle + \langle N, X_{vu}\rangle = 0$ y $\langle N_v, X_v\rangle + \langle N, X_{vv}\rangle = 0$, lo que nos da las igualdades en los coeficientes teniendo en cuenta que $\langle N, X_{uv}\rangle = \langle N, X_{vu}\rangle$.

Sea $q := X^{-1}(p) = (u(0), v(0))$, por linealidad $dN_p(v) = v_1dN_p(X_u(q)) + v_2dN_p(X_v(q)) = v_1N_u(q) + v_2N_v(q)$. Entonces, evaluando las derivadas de X y N en q, d

$$
\begin{aligned}
\mathcal{II}_p(v) &= \langle A_p v, v\rangle = -\langle dN_p(v), v\rangle = -\langle v_1N_u + v_2N_v, v_1X_u + v_2X_v\rangle \\
&= v_1^2\langle N_u, X_u\rangle - v_1v_2\langle N_u, X_v\rangle - v_1v_2\langle N_v, X_u\rangle - v_2^2\langle N_v, X_v\rangle \\
&= v_1^2 e + v_1v_2 f + v_2^2 g.
\end{aligned}
$$

Si

$$dN_p \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

respecto de la base (X_u, X_v), entonces

$$\begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

y tenemos las **fórmulas de Weingarten:**

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \qquad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \qquad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \qquad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Despejando,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

lo que nos da las fórmulas de Weingarten.

De aquí,

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H(p) = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2},$$

y las curvaturas principales son

$$\kappa_i(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} K(p) &= \det A_p = \det(dN_p) = \frac{1}{EG - F^2}((fF - eG)(fF - gE) - (gF - fG)(eF - fE)) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2}(f^2F^2 - fgEF - efFG + egEG - egF^2 + fgEF + efFG - f^2EG) \\ &= \frac{f^2F^2 + egEG - egF^2 - f^2EG}{(EG - F^2)^2} = \frac{(EG - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2}, \\ H(p) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr} A_p = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(dN_p) = -\frac{1}{2} \frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Un $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A_p si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda 1_{T_pS} - A_p) = \det(dN_p + \lambda 1_{T_pS}) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - 2H(p) + K(p), \end{aligned}$$

si y sólo si $\lambda = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$.

3.6. Isometrías locales

Una **isometría local** entre dos superficies regulares S_1 y S_2 es una función diferenciable $\phi : S_1 \to S_2$ tal que para $p \in S_1$ y $v, w \in T_pS_1$ es $\langle d\phi_p(v), d\phi_p(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, es decir, tal que $d\phi_p : T_pS_1 \to T_{\phi(p)}S_2$ es una isometría lineal. Entonces ϕ conserva ángulos, longitudes y áreas de S_1 a S_2, pero su existencia no implica que exista una isometría lineal $\psi : S_2 \to S_1$.

Una **isometría** (**global**) entre S_1 y S_2 es una isometría local que es un difeomorfismo. S_1 y S_2 son (**globalmente**) **isométricas** si existe una isometría global entre ellas, y son **localmente isométricas** si para cada $p \in S_1$ hay un entorno $V \subseteq S_1$ de p y una isometría global $\phi : V \to \phi(V) \subseteq S_2$ y para cada $q \in S_2$ hay un entorno $W \subseteq S_2$ de p y una isometría global $\psi : W \to \phi(W) \subseteq S_1$. Si existe una isometría local entre S_1 y S_2, S_1 y S_2 son localmente isométricos.

TS

$(\pi_1(X, x), *)$ es un grupo, llamado **grupo fundamental** [...] de X relativo al **punto base** x [...] X es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x)$ es el grupo trivial [...] para todo $x \in X$. [...] Todo subespacio estrellado de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo. [...] El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$. [...] $\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

Existe una isometría local entre el plano $\Pi := \{z = 0\}$ y el cilindro $C := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, pero las superficies no son globalmente isométricas. **Demostración:** Como el plano es estrellado, su grupo fundamental es el grupo trivial, y como el cilindro es $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, su grupo fundamental es $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, e_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}_1, e_1) \times \pi_1(\mathbb{R}, 0) \cong (\mathbb{Z}, +) \times 1 \cong (\mathbb{Z}, +)$. Como los grupos fundamentales no son isomorfos, Π y C no son homeomorfos y por tanto tampoco isométricos. Sea ahora $\phi : \Pi \to C$ dada por $\phi(x, y, 0) := (\cos x, \sin x, y)$, que es diferenciable. Para $p = (x, y, 0) \in \Pi$, $T_pS = \Pi$, y si $v = (v_1, v_2, 0) \in T_pS$, sea $\alpha : I \to \Pi$ dada por $\alpha(t) := p + tv$,

$$d\phi_p(v) = \frac{d(\phi \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d}{dt}(\cos(x + tv_1), \sin(x + tv_1), y + tv_2)(0) = (-v_1 \sin x, v_1 \cos x, v_2).$$

Para ver que ϕ conserva el producto escalar, basta ver que conserva módulos, pero $|d\phi_p(v)|^2 = v_1^2 + v_2^2 = |v|^2$.

Como **teorema**, sea $\phi : S_1 \to S_2$ una isometría local entre superficies regulares, para todo $p \in S_1$ existen parametrizaciones (U, X) de S_1 en p y $(U, \overline{X})$ de S_2 en $\phi(p)$ con los mismos parámetros de la primera forma fundamental. **Demostración:** Sean $(\tilde{U}, X)$ una parametrización de S_1 en p y $\overline{X} : \phi \circ X : \tilde{U} \to S_2$, como ϕ es un difeomorfismo local, existe un entorno $V \subseteq S_1$ de p en el que $\phi : V \to \phi(V)$ es un difeomorfismo, por lo que si $U := X^{-1}(V) \subseteq \tilde{U}$, restringiendo $\overline{X}$ a U, $(U, \overline{X})$ es una parametrización de S_2 en $\phi(p)$. Entonces, si $q := X^{-1}(p)$, $d\overline{X}_q = d(\phi \circ X)_q = d\phi_p \circ dX_q$, luego $\overline{X}_u(q) = d\phi_p(X_u(q))$ y $\overline{X}_v(q) = d\phi_p(X_v(q))$. Con esto, como ϕ es una isometría local, $\overline{E} = \langle \overline{X}_u(q), \overline{X}_u(q)\rangle = \langle d\phi_p(X_u(q)), d\phi(X_u(q))\rangle = \langle X_u(q), X_u(q)\rangle = E$, y análogamente $\overline{F} = F$ y $\overline{G} = G$.

Como **teorema**, dadas dos superficies regulares S_1 y S_2 y dos parametrizaciones (U, X) de S_1 y $(U, \overline{X})$ de S_2 con los mismos parámetros de la primera forma fundamental, entonces $\phi := \overline{X} \circ X^{-1} : X(U) \to \overline{X}(U)$ es una isometría. **Demostración:** Es un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos, y queda ver que conserva productos escalares. Sean $q \in U$ y $p := X(q)$, $d\phi_p \circ dX_q = d(\phi \circ X)_q = d\overline{X}_q$ por la regla de la cadena, por lo que $d\phi_p(X_u(q)) = \overline{X}_u(q)$ y $d\phi_p(X_v(q)) = \overline{X}_v(q)$. Por tanto, en q, $\langle d\phi_p(X_u), d\phi_p(X_u)\rangle = \langle \overline{X}_u, \overline{X}_u\rangle = \overline{E} = E = \langle X_u, X_u\rangle$, y de forma análoga $\langle d\phi_p(X_u), d\phi_p(X_v)\rangle = \langle X_u, X_v\rangle$ y $\langle d\phi_p(X_v), d\phi_p(X_v)\rangle = \langle X_v, X_v\rangle$, pero (X_u, X_v) es una base de T_pS, luego $d\phi_p$ conserva productos escalares.

3.7. Theorema Egregium de Gauss

Sean S una superficie regular orientada por N y (U, X) una parametrización de S con la base (X_u, X_v, N) de $\mathbb{R}^3$ positivamente orientada. Las **fórmulas de Gauss** son

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN, \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, \end{cases}$$

donde los Γ_{ij}^k son los **símbolos de Christoffel**, y se basan en que $\langle X_{uu}, N\rangle = e$, $\langle X_{uv}, N\rangle = \langle X_{vu}, N\rangle = f$ y $\langle X_{vv}, N\rangle = g$.

$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$, pues $X_{uv} = X_{vu}$. Además,

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix}.$$

Demostración: Multiplicando escalarmente las ecuaciones de Gauss por X_u y X_v,

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u\rangle &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, & \langle X_{uu}, X_v\rangle &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \langle X_{uv}, X_u\rangle &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, & \langle X_{uv}, X_v\rangle &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \\ \langle X_{vv}, X_u\rangle &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, & \langle X_{vv}, X_v\rangle &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G. \end{aligned}$$

Derivando E, F y G respecto a u y v,

$$\begin{aligned} E_u &= 2\langle X_{uu}, X_u\rangle, & F_u &= \langle X_{uu}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vu}\rangle, & G_u &= 2\langle X_{vu}, X_v\rangle, \\ E_v &= 2\langle X_{uv}, X_u\rangle, & F_v &= \langle X_{uv}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle, & G_v &= 2\langle X_{vv}, X_v\rangle, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u\rangle &= \frac{E_u}{2}, & \langle X_{uv}, X_u\rangle &= \frac{E_v}{2}, & \langle X_{vv}, X_u\rangle &= F_v - \langle X_{uv}, X_v\rangle = F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \langle X_{uv}, X_v\rangle &= \frac{G_u}{2}, & \langle X_{vv}, X_v\rangle &= \frac{G_v}{2}, & \langle X_{uu}, X_v\rangle &= F_u - \langle X_u, X_{vu}\rangle = F_u - \frac{E_v}{2}. \end{aligned}$$

Igualando queda el sistema

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}E_u, & E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}E_v, \quad E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{1}{2}G_u, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2}E_v, & F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}G_u, \quad F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}G_v, \end{cases}$$

que se divide en tres sistemas disjuntos de izquierda a derecha. Para el primero,

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{E_v}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{E_v}{2} \end{pmatrix},$$

y para los otros dos es análogo.

La **ecuación de Gauss** es

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 = EK,$$

la primera **ecuación de Mainardi-Codazzi** es

$$e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 = e_v - f_u$$

y, además,

$$(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 = -FK.$$

Demostración: $X_{uuv} = X_{uvu}$, y sustituyendo X_{uu} y X_{vv} según las fórmulas de Gauss,

$$\begin{aligned}0 = X_{uuv} - X_{uvu} = (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + eN_v - \\ - (\Gamma_{12}^1)_u X_u - \Gamma_{12}^1 X_{uu} - (\Gamma_{12}^2)_u X_v - \Gamma_{12}^2 X_{vu} - f_u N - fN_u.\end{aligned}$$

Sustituyendo con las fórmulas de Gauss,

$$\begin{aligned}0 = (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) - \\ - (\Gamma_{12}^1)_u X_u - \Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) - (\Gamma_{12}^2)_u X_v - \Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + \\ + e_v N + e(a_{12} X_u + a_{22} X_v) - f_u N - f(a_{11} X_u + a_{21} X_v) =: A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N.\end{aligned}$$

Como (X_u, X_v, N) es base de $\mathbb{R}^3$, $A_1, B_1, C_1 = 0$. Como $B_1 = 0$, usando las fórmulas de Weingarten,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 = fa_{21} - ea_{22} = \\ = f\frac{eF - fE}{EG - F^2} - e\frac{fF - gE}{EG - F^2} = \frac{efF - f^2E - efF + egE}{EG - F^2} = E\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = EK.\end{aligned}$$

$C_1 = 0$ nos da

$$\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g - \Gamma_{12}^1 e - \Gamma_{12}^1 f + e_v - f_u = 0,$$

de donde se obtiene directamente la primera ecuación de Mainardi-Codazzi, y $A_1 = 0$ nos da

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 = (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 = \\ = fa_{11} - ea_{12} = f\frac{fF - eG}{EG - F^2} - e\frac{gF - fG}{EG - F^2} = \frac{f^2F - egF}{EG - F^2} = -FK.\end{aligned}$$

La curvatura de Gauss depende solo de la primera forma fundamental, pues como $EG - F^2 > 0$, $E \neq 0$ y por la ecuación de Gauss K se puede obtener de E y los símbolos de Christoffel, que dependen solo de la primera forma fundamental.

Theorema Egregium de Gauss: La curvatura de Gauss de una superficie regular es invariante por isometrías locales. **Demostración:** Sean $\phi : S_1 \to S_2$ una isometría local entre superficies regulares, $p \in S_1$ y (U, X) una parametrización de S_1 en p con U lo suficientemente pequeña para que $\phi|_{V := X(U)} : V \to \phi(V)$ sea un difeomorfismo, entonces $(U, \overline{X} := \phi \circ X)$ es una parametrización de S_2 en $\phi(p)$. Entonces, como los coeficientes de la primera forma fundamental son los mismos para ambas parametrizaciones y la curvatura de Gauss solo depende de estos, las curvaturas de Gauss coinciden para el mismo punto de U y en particular $K_1(p) = K_2(\phi(p))$, donde K_1 y K_2 son las curvaturas de Gauss respectivas de S_1 y S_2.

En general un difeomorfismo local que conserva la curvatura no es una isometría local. **Demostración:** Sean S_1 y S_2 parametrizadas por $X(u,v) \coloneqq (u\cos v, u\sin v, \log u)$ y $\overline{X}(u,v) \coloneqq (u\cos v, u\sin v, v)$, entonces

$$\begin{aligned} X_u &= (\cos v, \sin v, \tfrac{1}{u}), & \overline{X}_u &= (\cos v, \sin v, 0), \\ X_v &= (-u\sin v, u\cos v, 0), & \overline{X}_v &= (-u\sin v, u\cos v, 1), \\ N &= \frac{(-\cos v, -\sin v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, & \overline{N} &= \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}, \end{aligned}$$

luego N y $\overline{N}$ se diferencian en alguna transformación ortogonal. Si $\overline{N} = O \circ N$ para una transformación ortogonal O, entonces $d\overline{N}_q = dO_{N(q)} \circ dN_q = O \circ dN_q$, luego $d\overline{N}_q$ y dN_q se diferencian por O y por tanto tienen igual determinante, que será la curvatura de Gauss. Sin embargo, $\phi \coloneqq \overline{X} \circ X^{-1} = ((x,y,z) \mapsto (x,y,e^z))$ no es una isometría.

La segunda **ecuación de Mainardi-Codazzi** es

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

Demostración: Como $X_{vvu} = X_{vuv}$, aplicando las fórmulas de Gauss,

$$\begin{aligned} 0 = X_{vvu} - X_{vuv} = (\Gamma_{22}^1)_u X_u + \Gamma_{22}^1 X_{uu} + (\Gamma_{22}^2)_u X_v + \Gamma_{22}^2 X_{vu} + g_u N + g N_u - \\ - (\Gamma_{21}^1)_v X_u - \Gamma_{21}^1 X_{uv} - (\Gamma_{21}^2)_v X_v - \Gamma_{21}^2 X_{vv} - f_v N - f N_v, \end{aligned}$$

y sustituyendo de nuevo,

$$\begin{aligned} 0 = (\Gamma_{22}^1)_u X_u + \Gamma_{22}^1(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + (\Gamma_{22}^2)_u X_v + \Gamma_{22}^2(\Gamma_{12}^2 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) - \\ - (\Gamma_{12}^1)_v X_u - \Gamma_{12}^1(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) - (\Gamma_{12}^2)_v X_v - \Gamma_{12}^2(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + \\ + g_u N + g(a_{11} X_u + a_{21} X_v) - f_v N - f(a_{12} X_u + a_{22} X_v) \eqqcolon A_2 X_u + B_2 X_v + C_2 N. \end{aligned}$$

Como antes, $A_2, B_2, C_2 = 0$, luego como $C_2 = 0$, $e\Gamma_{22}^1 + f\Gamma_{22}^2 - f\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{12}^2 = f_v - g_u$.

Las **ecuaciones de compatibilidad** son la ecuación de Gauss y las dos ecuaciones de Mainardi-Codazzi. **Teorema de Bonnet:** Sean $E, F, G, e, f, g : V \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^2$ con $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$ y que verifican las ecuaciones de compatibilidad, entonces existen un abierto $U \subseteq V$ y un difeomorfismo $X : U \to X(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ tales que (U, X) es una parametrización de la superficie regular $X(U)$ en la que los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales son E, F, G y e, f, g, respectivamente, y si U es conexo y $\overline{X} : U \to \overline{X}(U)$ es otro difeomorfismo con los mismos coeficientes de las formas fundamentales primera y segunda, entonces existe un movimiento rígido M en $\mathbb{R}^3$ tal que $\overline{X} = M \circ X$.