Geometría Global de Superficies

Bibliografía:

- Luis Alías. *Bloque 1. Geodésicas en superficies.*

- 3Blue1Brown. *A quick trick for computing eigenvalues—Essence of linear algebra, Chapter 15* (https://www.youtube.com/watch?v=e50Bj7jn9IQ).

Capítulo 1

Campos paralelos

Una función real es **diferenciable** si es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Una función $F : A \to B$ diferenciable entre abiertos de superficies o de $\mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo local en $p \in A$ si y sólo si dF_p es un isomorfismo lineal.

GCS

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a., si $\mathbf{t}(s) := \alpha'(s)$ y $\mathbf{n}(s) := J\mathbf{t}(s)$ [...], [...] $\kappa_\alpha(s) := \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ [...].

Las **fórmulas de Frenet** son

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s). \end{cases}$$

[...] Una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ [...], [...] la curvatura [...] es

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^3}.$$

[...] Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., si $\mathbf{t}(s)$ es su vector tangente, [...] $\kappa(s) := |\mathbf{t}'(s)|$. [...] $\mathbf{n}(s) := \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$[...],[...] $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ [...]. [...] $\tau(s)$[...] $= \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$. [...]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \kappa\mathbf{n} \\ -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \\ \tau\mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & -\tau \\ & \tau & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

[...]

$$\kappa_\alpha(t) := \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \qquad \tau_\alpha(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.$$

$$\begin{aligned}
e &:= \langle N, X_{uu} \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle, \\
f &:= \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \\
g &:= \langle N, X_{vv} \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle
\end{aligned}$$

[...]. [...] Si

$$dN_p \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

respecto de la base (X_u, X_v), entonces

$$\begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

y tenemos las **fórmulas de Weingarten:**

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \qquad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \qquad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \qquad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

[...]

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad\qquad H(p) = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

[...]. Las **fórmulas de Gauss** son

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN, \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \end{cases}$$

donde los Γ_{ij}^k son los **símbolos de Christoffel** [...]. $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ [...]. Además,

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix}.$$

Si $F = 0$, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right].$$

Demostración:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{G_v}{2E} \\ -\frac{E_v}{2G} & \frac{G_u}{2G} & \frac{G_v}{2G} \end{pmatrix},$$

y por la ecuación de Gauss,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{E}\left(\frac{E_uG_u}{4EG} - \frac{E_{vv}}{2G} + \frac{E_vG_u}{2G^2} - \frac{E_vG_v}{4G^2} + \frac{E_v^2}{4EG} - \frac{G_{uu}}{2G} + \frac{G_u^2}{2G^2} - \frac{G_u^2}{4G^2}\right) \\
&= \left(\frac{E_uG_u}{4E^2G} - \frac{E_{vv}}{4EG} + \frac{E_vG_u}{2EG^2} - \frac{E_vG_v}{4EG^2} - \frac{G_{uu}}{2EG} + \frac{G_u^2}{4EG^2}\right),
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v &= \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v(E_vG + EG_v)}{2(EG)^{3/2}} = \sqrt{EG}\left(\frac{E_{vv}}{EG} - \frac{E_v^2}{2E^2G} - \frac{E_vG_v}{2EG^2}\right), \\
\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u &= \frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{G_u(E_uG + EG_u)}{2(EG)^{3/2}} = \sqrt{EG}\left(\frac{G_{uu}}{EG} - \frac{E_uG_u}{2E^2G} - \frac{G_u^2}{2EG^2}\right),
\end{aligned}$$

de modo que

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right] = K.$$

1.1. La derivada covariante

GCS

Sean S una superficie regular y $\alpha : I \to S$ una curva regular, un **campo de vectores a lo largo de** α es una función $V : I \to \mathbb{R}^3$, y es **tangente** a S (a lo largo de α) si para $t \in S$ es $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$.

Para un $t \in I$, $V(t)^\top := \pi_{T_{\alpha(t)}S}V(t)$ y $V(t)^\perp := \pi_{(T_{\alpha(t)}S)^\perp}V(t)$. Llamamos $\mathfrak{X}(\alpha)$ al conjunto de campos de vectores a lo largo de α diferenciables y tangentes. Así:

1. La velocidad $\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.
2. La rotación de la velocidad $N \wedge \alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.
3. La aceleración $\alpha''(t)$ es un campo de vectores diferenciable.
4. Dado un campo de vectores diferenciable $V : I \to \mathbb{R}^3$, V' es otro campo de vectores, pero $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ no implica $V' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Un **campo normal unitario** a lo largo de α es un campo $N : I \to \mathbb{R}^3$ diferenciable y unitario tal que todo $N(t)$ es normal a S en $\alpha(t)$.

GCS

Sea $V : I \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores tangente y diferenciable, llamamos **derivada covariante** [o **intrínseca**] a

$$\frac{DV}{dt}(t) := \pi_{T_{\alpha(t)}S}V'(t)$$

Propiedades: Sean $V, W : I \to T_pS$ y $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciables, siendo I un intervalo:

1. $\frac{D(fV)}{dt} = f'V + f\frac{DV}{dt}$.

Si $\pi := \pi_{T_{\alpha(t)}S}$, $\frac{D(fV)}{dt} = \pi((fV)') = \pi(fV' + f'V) = f\pi(V') + f'\pi(V) = f\frac{DV}{dt} + f'V$.

2. $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
   $\frac{D(V+W)}{dt} = \pi((V+W)') = \pi(V') + \pi(W') = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

3. $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt} W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$.
   $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{dV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{dW}{dt}\rangle$, pero dada una base ortonormal (v_1, v_2, v_3) con $T_pS = \text{span}\{v_1, v_2\}$, si $\frac{dV}{dt}(t) = \sum_i x_i v_i$ y $W(t) = \sum_i y_i v_i$, $\langle \frac{dV}{dt}(t), W(t)\rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \overset{y_3=0}{=} x_1y_1 + x_2y_2 = \langle \pi(\frac{dV}{dt}(t)), W(t)\rangle = \langle \frac{DV}{dt}(t), W(t)\rangle$, y análogamente para $\langle V, \frac{dW}{dt}\rangle$, luego $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{dV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{dW}{dt}\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$.

Sean (U, X) una carta local de S, $\alpha : I \to X(U)$ una curva sobre S, $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, $\tilde{\alpha} := (u, v) := X^{-1} \circ \alpha : I \to U$ y $(a, b) : I \to U$ con $V(t) = a(t)X_u(\tilde{\alpha}(t)) + b(t)X_v(\tilde{\alpha}(t))$, entonces, para $t \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt} &= \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right) X_u(\tilde{\alpha}) \\ &\quad + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right) X_v(\tilde{\alpha}).\end{aligned}$$

Demostración: Sean $t \in I$, $p := \alpha(t)$, $q := X^{-1}(p)$ y $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ un campo normal tal que la base $(X_u(q), X_v(q), N(p))$ está orientada positivamente, derivando en $V = aX_u(u, v) + bX_v(u, v)$,

$$\begin{aligned}V'(t) &= a'X_u(u,v) + a\left(X_{uu}(u,v)u' + X_{uv}(u,v)v'\right) + b'X_v(u,v) + b\left(X_{vu}(u,v)u' + X_{vv}(u,v)v'\right) \\ &= a'X_u(u,v) + a\left[(\Gamma_{11}^1 X_u(u,v) + \Gamma_{11}^2 X_v(u,v) + eN)u' + (\Gamma_{12}^1 X_u(u,v) + \Gamma_{12}^2 X_v(u,v) + fN\right. \\ &\quad + b'X_v(u,v) + b\left[(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)u' + (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN)v'\right],\end{aligned}$$

y entonces $\frac{DV}{dt}$ es la parte tangente de esto último,

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt} &= \left(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{12}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v'\right) X_u(u,v) \\ &\quad + \left(a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b' + b\Gamma_{12}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v'\right) X_v(u,v).\end{aligned}$$

1.2. Campos paralelos

Sean S una superficie regular y $\alpha : I \to S$ una curva regular, $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es **paralelo (a lo largo de** α**)** si $\frac{DV}{dt} = 0$. Si $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ son paralelos:

1. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $aV + bW$ es paralelo.
   $\frac{D(aV+bW)}{dt} = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt} = 0$.
2. $\langle V(t), W(t)\rangle$ es constante, por lo que también lo son $\|V(t)\|$ y $\angle(V, W)$.
   $\langle V, W\rangle' = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle = 0 + 0 = 0$.

E.d.o extrínseca de los campos paralelos: $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si

$$V'(t) + \langle V(t), N'(t)\rangle N(t) = 0,$$

donde $N : I \to \mathbb{R}^3$ es un campo normal unitario de S a lo largo de α. **Demostración:** V es paralelo si y sólo si $V'(t)$ es proporcional a $N(t)$ en todo $t \in I$, si y sólo si $V'(t) = \langle V'(t), N(t)\rangle$, pero como $\langle V(t), N(t)\rangle = 0$ en todo punto, derivando es $\langle V'(t), N(t)\rangle + \langle V(t), N'(t)\rangle = 0$, luego $V'(t) = \langle V'(t), N(t)\rangle$ si y sólo si $V'(t) - \langle V'(t), N(t)\rangle = V'(t) + \langle V(t), N'(t)\rangle = 0$.

E.d.o intrínseca de los campos paralelos: Sean (U, X) una carta local de la superficie regular S, $\alpha : I \to X(U)$ una curva sobre S, $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, $(u, v) := X^{-1} \circ \alpha : I \to U$ y $(a, b) : I \to U$ tal que $V = aX_u(\tilde{\alpha}) + bX_v(\tilde{\alpha})$, entonces V es paralelo a lo largo de α si y sólo si satisface

$$\begin{cases} a' + au'\Gamma_{11}^1(u,v) + (av' + bu')\Gamma_{12}^1(u,v) + bv'\Gamma_{22}^1(u,v) = 0, \\ b' + au'\Gamma_{11}^2(u,v) + (av' + bu')\Gamma_{12}^2(u,v) + bv'\Gamma_{22}^2(u,v) = 0, \end{cases}$$

ecuaciones que resultan de sustituir la fórmula intrínseca de la derivada covariante en $\frac{DV}{dt} = 0$ y usar que $X_u(\tilde{\alpha})$ y $X_v(\tilde{\alpha})$.

EDO

Una e.d.o. es **lineal** si es de la forma $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, con $A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ [...]. [...] Si A y b son continuas, para $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ [...]

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única definida en todo I [...].

1.3. Transporte paralelo

Como **teorema**, sean S una superficie regular, $\alpha : I \to S$ una curva, $t_0 \in I$ y $v \in T_{\alpha(t_0)}S$, existe un único $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo tal que $V(t_0) = v$. **Demostración:** Sea N un campo normal unitario de S a lo largo de α, $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo si y sólo si

$$0 = V' + \langle V, N'\rangle N = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^3 V_j N_j' \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1N_1' & N_1N_2' & N_1N_3' \\ N_2N_1' & N_2N_2' & N_2N_3' \\ N_3N_1' & N_3N_2' & N_3N_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix},$$

lo que nos da una e.d.o. lineal que, añadiendo la condición inicial $V(t_0) = v$, tiene solución única definida en todo I. Para ver que realmente la solución es tangente, sabemos que $\langle V, N\rangle(t_0) = \langle v, N(t_0)\rangle = 0$, y como por la ecuación es $V' = -\langle V, N'\rangle N$,

$$\langle V, N\rangle' = \langle V', N\rangle + \langle V, N'\rangle = -\langle V, N'\rangle\langle N, N\rangle + \langle V, N'\rangle \overset{\langle N,N\rangle=1}{=} 0.$$

Sean S una superficie regular, $\alpha : I \to S$ una curva regular, $a, b \in I$, $p := \alpha(a)$, $q := \alpha(b)$ y $v \in T_pS$ y $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ el único campo paralelo con $V(a) = v$, el **transporte paralelo** de v a lo largo de α en el punto q es $V(b)$.

La **aplicación transporte paralelo** es la $P_\alpha := P_a^b(\alpha) : T_pS \to T_qS$ que a cada $v \in T_pS$ le asigna su transporte paralelo a lo largo de α en q. Como **teorema**, P_α es una isometría lineal. **Demostración:** Para $v \in T_pS$, sea $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ el único campo paralelo con $V(a) = v$, este también es el único campo paralelo con $V(b) = P_a^b(\alpha)(v)$, por lo que $v = P_b^a(\alpha)(P_a^b(\alpha)(v))$

y, por simetría, para $w \in T_qS$, $w = P_a^b(\alpha)(P_b^a(\alpha)(v))$, de modo que P_α es invertible. Sean ahora $v, w \in T_pS$, V el único campo paralelo con $V(a) = v$ y W el único con $W(a) = w$, entonces $V + W$ es otro campo paralelo con $(V + W)(a) = v + w$ y por tanto el único, luego $P_\alpha(v + w) = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P_\alpha(v) + P_\alpha(w)$. Del mismo modo, si $\lambda \in \mathbb{R}$, λV es un campo paralelo con $(\lambda V)(a) = \lambda v$, luego $P_\alpha(\lambda v) = \lambda V(a) = \lambda P_\alpha(v)$, y con esto P_α es lineal. Finalmente, como $\langle V(t), W(t)\rangle$ es constante en t, $\langle v, w\rangle = \langle V(a), W(a)\rangle = \langle V(b), W(b)\rangle = \langle P_\alpha(v), P_\alpha(v)\rangle$ y P_α es una isometría.

Capítulo 2

Geodésicas

Una curva $\gamma : I \to S$ es una **geodésica** de la superficie regular S si γ' es paralelo. Propiedades: Sea $\gamma : I \to S$ una geodésica:

1. $\|\gamma'(t)\|$ es constante.
2. γ es constante si y sólo si existe $t_0 \in I$ con $\gamma'(t_0) = 0$, por lo que toda geodésica no constante es una curva regular.

   $\Longrightarrow$] Obvio.

   $\Longleftarrow$] Para $t \in I$, $\|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(t_0)\| = 0$.
3. La condición de geodésica se conserva por isometrías locales.

   La derivada covariante se conserva por ser un concepto intrínseco.
4. Si γ no es constante, una reparametrización suya es una geodésica si y sólo si el cambio de parámetro es afín.

   Sea $h : J \to I$ un cambio de parámetro y $\alpha := \gamma \circ h$, entonces $\alpha'(s) = h'(s)\gamma'(h(s))$ y

   $$\begin{aligned}\frac{D\alpha'}{ds}(s) &= (h''(s)\gamma'(h(s)) + h'(s)^2\gamma''(h(s)))^\top = h''(s)\gamma'(h(s)) + h'(s)^2\frac{D\gamma'}{dt}(h(s)) = \\ &= h''(s)\gamma'(h(s)),\end{aligned}$$

   pues $\frac{D\gamma'}{dt}(h(s)) = 0$ por ser γ una geodésica. Como γ no es constante, $\gamma'(h(s)) \neq 0$ en todo s, luego $\frac{D\alpha'}{ds}(s) = h''(s)\gamma'(h(s)) = 0 \iff h''(s) = 0 \iff \exists a, b \in \mathbb{R} : h(s) = as + b$.

Sean S una superficie regular, $\alpha : I \to S$ una curva regular y $N : I \to \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario a lo largo de α, entonces α es una geodésica si y sólo si

$$\alpha''(t) + \langle \alpha'(t), N'(t)\rangle N(t) = 0,$$

sustituyendo en la e.d.o. extrínseca de los campos paralelos.

Si (U,X) es una parametrización de S, $\alpha : I \to X(U)$ es una curva y $(u,v) \coloneqq X^{-1} \circ \alpha : I \to U$, α es una geodésica de S si y sólo si

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1(u,v) + 2u'v'\Gamma_{12}^1(u,v) + (v')^2\Gamma_{22}^1(u,v) = 0, \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2(u,v) + 2u'v'\Gamma_{12}^2(u,v) + (v')^2\Gamma_{22}^2(u,v) = 0. \end{cases}$$

En efecto, como $\alpha = X(u,v)$, $\alpha' = dX_{(u,v)}(u',v') = u'X_u(u,v) + v'X_v(u,v)$, y solo hay que sustituir en la e.d.o. intrínseca de los campos paralelos.

2.1. Geodésicas maximales

EDO

Teorema de Picard en un abierto: Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente lipschitziana respecto a la segunda variable, para $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe $K \coloneqq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, b) \subseteq \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única definida en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ con gráfica contenida en K.

[...] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto, si para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe un intervalo en que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única, entonces para cualesquiera soluciones x e y de $\dot{x} = f(t,x)$ definidas respectivamente en I_x e I_y, si ambas coinciden en un $\xi \in I_x \cap I_y$, coinciden en toda la intersección.

Dados un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, f es localmente lipschitziana. En efecto, para $x \in \Omega$ existe ε tal que $\overline{B}(x,\varepsilon) \subseteq \Omega$, y al ser f' continua, $(f')(\overline{B}(x,\varepsilon))$ está acotada por un cierto M y, para $a,b \in B(x,\varepsilon)$, $\|f(a) - f(b)\| \leq M\|a-b\|$.

Como **teorema**, sean S es una superficie regular, $p \in S$ y $v \in T_pS$, existe una única geodésica $\gamma_v : I_v \to S$ tal que $0 \in I_v$, $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$ y cualquier otra geodésica que cumpla estas condiciones es una restricción de esta a un subintervalo, y llamamos **geodésica maximal** con **condiciones iniciales** p y v a γ_v e **intervalo maximal de existencia** a I_v.

Demostración: Sea $\mathcal{J}_{p,v} \coloneqq \{(I,\alpha) \mid \alpha \mid I \to S \text{ geodésica}, 0 \in I, \alpha(0) = p, \alpha'(0) = v\}$. Sean (X,U) una carta local de S en p, $(u_0,v_0) \coloneqq X^{-1}(p)$ y $a,b \in \mathbb{R}$ con $v = aX_u(u_0,v_0) + bX_u(u_0,v_0)$, por el teorema de Picard, existe una solución $(u,v) : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ de la e.d.o. intrínseca de los campos paralelos con $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $u'(0) = a$ y $v'(0) = b$, y entonces $\alpha(t) \coloneqq X(u(t),v(t))$ es una geodésica con $\alpha(0) = X(u_0,v_0) = p$ y $\alpha'(0) = dX_{(u_0,v_0)}(a,b) = aX_u(u_0,v_0) + bX_v(u_0,v_0) = v$, de modo que $\alpha \in \mathcal{J}_{p,v} \neq \emptyset$.

Sean ahora $(I_1,\alpha_1),(I_2,\alpha_2) \in \mathcal{J}_{p,v}$, y queremos ver que $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$. Como $0 \in I_1 \cap I_2$ e I_1 e I_2 son abiertos conexos, $I_1 \cap I_2$ es abierto y, por el teorema del peine, también conexo, luego es un intervalo. Sea $A \coloneqq \{t \in I_1 \cap I_2 \mid \alpha_1(t) = \alpha_2(t), \alpha_1'(t) = \alpha_2'(t)\}$, y queremos ver que A es abierto y cerrado en $I_1 \cap I_2$ y no vacío y por tanto $A = I_1 \cap I_2$.

Claramente es no vacío, pues $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$ y $\alpha_1'(0) = \alpha_2'(0) = v$, y es cerrado por ser la anti-imagen del 0 por la función continua $F(t) := \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\| + \|\alpha_1'(t) + \alpha_2'(t)\|$.

Sean ahora $t_0 \in A$ y (X, U) una parametrización de S en $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$, existen $\varepsilon_1 > 0$ tal que para $t \in (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$ es $\alpha_1(t) \in X(U)$ y $\varepsilon_2 > 0$ tal que para $t \in (t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2)$ es $\alpha_2(t) \in X(U)$, y si $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $(u_1, v_1) := X^{-1} \circ \alpha_1$ y $(u_2, v_2) := X^{-1} \circ \alpha_2$, entonces (u_1, v_1) y (u_2, v_2) son soluciones de la e.d.o. intrínseca de las geodésicas con las mismas condiciones iniciales en t_0. Por el teorema de Picard, la e.d.o. tiene solución única local para cualesquiera $(u, v)(t_0) \in U$ y $(u', v')(t_0) \in \mathbb{R}^2$, por lo que (u_1, v_1) y (u_2, v_2) coinciden en todo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ y A es abierto.

Así, $A = I_1 \cap I_2$. Sea entonces $I_v := \bigcup_{(I,\alpha) \in \mathcal{J}_{p,v}} I$, I_v es un intervalo abierto por ser unión de intervalos abiertos que contienen al 0, y definiendo $\gamma_v : I_v \to S$ como $\gamma_v(t) = \alpha(t)$ para $(I, \alpha) \in \mathcal{J}_{p,v}$ con $t \in I$, entonces γ_v está bien definido por lo anterior y cumple las propiedades.

Lema de homogeneidad de las geodésicas: Sean S una superficie regular, $p \in S$, $v \in T_pS$, $\gamma_v : I_v \to S$ la geodésica maximal con condiciones iniciales p y v y $\lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces $\gamma_{\lambda v} : I_{\gamma v} \to S$ viene dada por $I_{\lambda v} = \frac{1}{\lambda} I_v = \{\frac{t}{v}\}_{t \in I_v}$ y $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ para todo $t \in I_{\lambda v}$. **Demostración:** Sea $\alpha : I \to S$ con $\alpha(t) := \gamma_v(\lambda t)$, claramente $I = \frac{1}{\lambda} I_v$, pero α es una reparametrización afín de γ y por tanto es una geodésica, $\alpha(0) = \gamma(0) = p$ y $\alpha'(0) = \lambda \gamma_v'(0) = \lambda v$, de modo que por unicidad es $\alpha \equiv \gamma_{\lambda v}|_I$e $I = \frac{1}{\lambda} I_v \subseteq I_{\lambda v}$. Ahora bien, sea $w := \lambda v$ y $\beta : I' \to S$ dada por $\beta(t) := \gamma_w(\frac{1}{\lambda} v)$, por el mismo argumento es $I' = \lambda I_w = \lambda I_{\lambda v} \subseteq I_v$, de modo que $I_{\lambda v} \subseteq \frac{1}{\lambda} I_v$ e $I_{\lambda v} = \frac{1}{\lambda} I_v$, con $\alpha = \gamma_{\lambda v}$.

2.2. Ecuaciones diferenciales lineales

EDO

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ [...], el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única definida en todo $\mathbb{R}$ y dada por $x(t) = e^{(t-t_0)T} x_0$. [...]

Cálculo de e^{At} [...] Si el polinomio característico de $T \in \mathcal{L}(E)$, con E real o complejo, es [...] $\prod_{k=1}^{p} (t - \lambda_k)^{n_k}$, [...] $E(T, \lambda_k) := \ker(T - \lambda_k I)^{n_k}$, y [...] $E = E(T, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(T, \lambda_p)$ [...]. [...]

1. Hallar los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_r, a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, \dots, a_s + ib_s, a_s - ib_s$ $[\lambda_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}]$ de $A_{\mathbb{C}}$.

2. Hallar bases $(w_{k1}, \dots, w_{kp_k})$ de $\mathbb{R}^n(A, \lambda_k)$ y $(u_{k1} + iv_{k1}, \dots, u_{kq_k} + v_{kq_k})$ de $\mathbb{C}^n(A_{\mathbb{C}}, a_k + ib_k)$.

3. Respecto de la base

$$\begin{aligned} \mathcal{B} := &(w_{11}, \dots, w_{1p_1}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{rp_r}, \\ &v_{11}, u_{11}, \dots, v_{1q_1}, u_{1q_1}, \dots, v_{s1}, u_{s1}, \dots, v_{sq_s}, u_{sq_s}), \end{aligned}$$

la matriz semisimple es

$$S_0 := \begin{pmatrix} \boxed{D_1} &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \boxed{D_r} &&& \\ &&& \boxed{M_1} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \boxed{M_s} \end{pmatrix},$$

donde

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_k && \\ & \ddots & \\ && \lambda_k \end{pmatrix}, \qquad M_k := \begin{pmatrix} a_k & -b_k &&& \\ b_k & a_k &&& \\ && \ddots && \\ &&& a_k & -b_k \\ &&& b_k & a_k \end{pmatrix}.$$

4. Sea $P := M_{\mathcal{CB}}$, entonces la parte semisimple es $S := PS_0P^{-1}$ y la nilpotente es $N := A - S$.

5. Finalmente,

$$e^{At} = Pe^{S_0 t}P^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{N^k t^k}{k!}.$$

[...] Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(E)$, existe una base de E respecto a la que T tiene una matriz compuesta de bloques diagonales de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda &&& \\ 1 & \ddots && \\ & \ddots & \ddots & \\ && 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{D} & \ddots && \\ \boxed{I_2} & \ddots & \ddots & \\ && \boxed{I_2} & \boxed{D} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si A es [de la primera forma][...], [...]

$$e^{tA}[...] = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ t & 1 &&& \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 && \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Si [es de la segunda][...],

$$[e^{tA}] = e^{at}\begin{pmatrix} \tilde{D} & & & & \\ t\tilde{D} & \tilde{D} & & & \\ \frac{t^2}{2}\tilde{D} & t\tilde{D} & \tilde{D} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\tilde{D} & \cdots & \frac{t^2}{2}\tilde{D} & t\tilde{D} & \tilde{D} \end{pmatrix}$$

[...]

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

[...] Llamamos **base de soluciones** de $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x = 0$ a una familia $x_1, \dots, x_n$ de soluciones linealmente independiente.

[...] Dada la ecuación homogénea $x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_nx = 0$, una combinación lineal de soluciones de esta ecuación es también solución, así como la derivada de una solución.

La matriz de la ecuación vectorial asociada [con coeficientes $(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$] es

$$\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

que llamamos **asociada** al polinomio $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)$, [...] el polinomio característico de la matriz.

2.3. Superficies geodésicamente completas

Una superficie regular S es **geodésicamente completa** en un $p \in S$ si para $v \in T_pS$ es $I_v = \mathbb{R}$ en p, y es geodésicamente completa si lo es en todo $p \in S$.

1. Dado el plano $S = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, a\rangle = c\}$, la geodésica maximal de S con condiciones iniciales $p \in S$ y $v \in T_pS$ es la recta $\gamma : \mathbb{R} \to S$ dada por $\gamma(t) := p + tv$.

   Tomando la normal $N(p) := a$, como N es constante, debe ser

   $$0 = \gamma''(t) + \langle \gamma'(t), (N \circ \gamma)'(t)\rangle N(\gamma(t)) = \gamma''(t),$$

   de modo que γ es de la forma $\gamma(t) = a + bt$, pero $p = \gamma(0) = a$ y $v = \gamma'(0) = b$.

2. Dado $r > 0$, la geodésica maximal de la esfera $S := \mathbb{S}^2(r)$ con condiciones iniciales $p \in S$ y $v \in T_pS \setminus 0$ es el círculo máximo $\gamma : \mathbb{R} \to S$ dado por

   $$\gamma(t) = \cos\left(\frac{\|v\|}{r}t\right)p + \frac{r}{\|v\|}\sin\left(\frac{\|v\|}{r}t\right)v.$$

Tomando la normal $N(p) := \frac{p}{r}$ y llamando $N(t) := N(\gamma(t))$, $N(t) = \frac{\gamma(t)}{r}$ y $N'(t) = \frac{1}{r}\gamma'(t)$, y debe ser

$$0 = \gamma''(t) + \left\langle \gamma'(t), \frac{1}{r}\gamma'(t) \right\rangle \frac{1}{r}\gamma(t) = \gamma''(t) + \frac{1}{r^2}\|\gamma'(t)\|^2\gamma(t) \overset{\|\gamma'(t)\|=\|\gamma'(0)\|}{=} \gamma''(t) + \frac{\|v\|^2}{r^2}\gamma(t),$$

Si $c := \frac{\|v\|^2}{r^2} = 0$, $v = 0$, y en otro caso, en cada coordenada, el polinomio asociado a la ecuación lineal homogénea $p(\lambda) = \lambda^2 + c$, los valores propios son $\pm\sqrt{c}i$ y una base de soluciones es pues $\{\cos(\sqrt{c}t), \sin(\sqrt{c}t)\}$. Por tanto existen $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ con $\gamma_i(t) = a_i \cos(\sqrt{c}t) + b_i \sin(\sqrt{c}t)$, pero

$$p_i = \gamma_i(0) = a_i, \qquad v_i = \gamma_i'(0) = b_i\sqrt{c},$$

luego en resumen $\gamma(t) = p\cos(\sqrt{c}t) + \frac{v}{\sqrt{C}}\sin(\sqrt{c}t)$, y $\sqrt{c} = \frac{\|v\|}{r}$.

3. Sean $r > 0$, $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ un cilindro, $p \in S$ y $v \in T_pS$, la geodésica maximal de S con condiciones iniciales p y v es la recta $\gamma : \mathbb{R} \to S$ dada por

$$\gamma(t) := p + tv$$

si $v_1 = v_2 = 0$ o la hélice $\gamma : \mathbb{R} \to S$ dada por

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} p_1 \cos(ct) + \frac{v_1}{c}\sin(ct) \\ p_2 \cos(ct) + \frac{v_2}{c}\sin(ct) \\ p_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

en otro caso, donde $c := \frac{\sqrt{\|v\|^2 - v_3^2}}{r}$, que es una circunferencia horizontal si $v_3 = 0$.
Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, como $f'(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$, los puntos críticos de f son aquellos con $z = 0$, el único valor crítico es 0 y r^2 es un valor regular, de modo que $S = \{f(x, y, z) = r^2\}$ es una superficie de nivel con normal

$$N(x, y, z) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2x, 2y, 0)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}(x, y, 0).$$

Entonces, sean $N(t) := N(\gamma(t))$ y $\gamma(t) =: (x(t), y(t), z(t))$, $N'(t) = \frac{1}{r}(x'(t), y'(t), 0)$ y γ debe cumplir

$$\gamma''(t) + \langle\gamma'(t), N'(t)\rangle N(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2}(x'(t)^2 + y'(t)^2)\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Así, $z''(t) = 0$ y por tanto $z(t) = a + bt$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, con $p_3 = z(0) = a$ y $v_3 = z'(0) = b$. Si $v_1 = v_2 = 0$ entonces x es constante en p_1 e y lo es en p_2. En otro caso $c > 0$, y como z' es constante en v_3 y $\|\gamma'\|$ lo es en $\|v\|$, se tiene

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \|\gamma'(t)\|^2 - z'(t)^2 = \|v\|^2 - v_3^2$$

y $\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{r^2} = c^2$, y queda

$$(x''(t), y''(t)) + c^2(x'(t), y'(t)) = 0.$$

Para la coordenada x, el polinomio asociado es $p(\lambda) = \lambda^2 + c^2$ y los valores propios son $\pm ci$, de modo que una base de soluciones es $\{\cos(ct), \sin(ct)\}$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x(t) = a\cos(ct) + b\sin(ct)$, pero

$$p_1 = x(0) = a, \qquad v_1 = x'(0) = bc,$$

de modo que $x(t) = p_1 \cos(ct) + \frac{v_1}{c}\sin(ct)$, y análogamente $y(t) = p_2\cos(ct) + \frac{v_2}{c}\sin(ct)$.

Así, el plano, la esfera y el cilindro son geodésicamente completos; de hecho toda superficie de nivel de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lo es.

2.4. Pregeodésicas

GCS

Sean S una superficie regular orientada por N y $\alpha : I \to S$ una curva, [...]

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt}(t) + \langle \alpha''(t), N(\alpha(t))\rangle N(\alpha(t)).$$

Sea $\alpha : I \to S$ una curva parametrizada por [...] arco, el **triedro de Darboux** es la base [...] $(\alpha'(s), J\alpha'(s) := \alpha'(s) \wedge N(\alpha(s)), N(\alpha(s)))$. Entonces

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = \kappa_g(s) J\alpha'(s),$$

donde $\kappa_g := \langle \alpha'', J\alpha'\rangle : I \to \mathbb{R}$, es la **curvatura geodésica** de α, cuyo signo depende de N[, y $\kappa_n := \langle \alpha'', N(\alpha)\rangle$ es la **curvatura normal** de α].

Una curva $\alpha : I \to S$ p.p.a. es una geodésica si y sólo si $\kappa_g \equiv 0$, pues $\frac{D\alpha'}{ds}(s) = 0$ si y sólo si $\kappa_g(s)J\alpha'(s) = 0$, pero $J\alpha'(s) \neq 0$.

Si S es una superficie regular, $\alpha : I \to S$ es una curva y $h : J \to I$ es un cambio de parámetro que conserva la orientación con $\beta := \alpha \circ h$ p.p.a., la curvatura geodésica de α es

$$\kappa_g^\alpha(t) := \kappa_g^\beta(h^{-1}(t)) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Demostración: $1 = \|\beta'(s)\| = h'(s)\|\alpha'(h(s))\|$, luego $h'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}$ y para $t \in I$, sea $s := h^{-1}(t)$,

$$\begin{aligned}\kappa_g^\alpha(t) &= \kappa_g^\beta(s) = \langle \beta''(s), J\beta'(s)\rangle = \langle h''(s)\alpha'(h(s)) + h'(s)^2\alpha''(h(s)), h'(s)J\alpha'(h(s))\rangle \\ &= h'(s)^3\langle \alpha''(h(s)), J\alpha'(h(s))\rangle = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3},\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se usa que $\langle \alpha'(h(s)), J\alpha'(h(s))\rangle = 0$.

Una curva $\alpha : I \to S$ es una **pregeodésica** de S si existe un cambio de parámetro $h : J \to I$ tal que $\beta \coloneqq \alpha \circ h$ es una geodésica de S, si y sólo si $\kappa_g^\alpha \equiv 0$.

$\Longrightarrow$] Sea h un cambio de parámetro tal que $\beta \coloneqq \alpha \circ h$ es una geodésica, entonces $\|\beta'\|$ es constante en algún $c > 0$, luego $\gamma(s) \coloneqq \beta(\frac{s}{c})$ es una geodésica y es p.p.a. al ser $\|\gamma'(s)\| = \|\frac{1}{c}\beta'(s)\| = 1$. Sea entonces $\tilde{h}(s) \coloneqq h(\frac{s}{c})$, entonces $\gamma = \alpha \circ \tilde{h}$ y $\kappa_g^\alpha(t) = \kappa_g^\gamma(\tilde{h}^{-1}(t)) = 0$.

$\Longleftarrow$] Sea $\beta = \alpha \circ h$ la reparametrización por arco de α, como $\kappa_g^\alpha(t) = \kappa_g^\beta(h^{-1}(t))$, $\kappa_g^\beta(s) = \kappa_g^\alpha(h(s)) = 0$, luego β es una geodésica y por tanto α es una pregeodésica.

Capítulo 3

La aplicación exponencial

Sean S una superficie regular y $p \in S$, la **aplicación exponencial** en p es $\exp_p : \mathcal{D}_p \to S$ dada por

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1),$$

donde $\mathcal{D}_p := \{v \in T_pS \mid 1 \in I_v\}$. Propiedades:

1. $0 \in \mathcal{D}_p$ y $\exp_p(0) = p$.
2. $\forall v \in T_pS, t \in I_v, (tv \in \mathcal{D}_p \land \exp_p(tv) = \gamma_v(t))$.

   Si $t = 0$, $\exp_p(0) = \gamma_v(0) = p$, y si $v = 0$, $\exp_p(0) = \gamma_0(t) = p$. Si $t, v \neq 0$, $1 = \frac{1}{t}t \in \frac{1}{t}I_v = I_{tv}$, luego $tv \in \mathcal{D}_p$ y $\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$.
3. $\mathcal{D}_p$ es estrellado respecto a 0.

   Sean $v \in \mathcal{D}_p$ y $t \in [0,1]$, como $1 \in I_v$, $t \in [0,1] \subseteq I_v$ y por tanto $tv \in \mathcal{D}_p$.
4. $\forall v \in T_pS, \exists \lambda > 0 : \lambda v \in \mathcal{D}_p$.

   Existe $\varepsilon > 0$ con $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I_v$, y tomando $|\lambda| < \varepsilon$ es $\lambda \in I_v$ y $\lambda v \in \mathcal{D}_p$.
5. $\mathcal{D}_p$ es abierto y $\exp_p$ es diferenciable.
6. $d(\exp_p)_0 = 1_{T_pS}$, y en particular $\exp_p$ es un difeomorfismo local en 0.

   Como $\mathcal{D}_p \subseteq T_pS$ y el plano tangente a un plano es él mismo, $T_0\mathcal{D}_p = T_0(T_pS) = T_pS$. Entonces, para $w \in T_pS$, sea $\alpha(t) := tw$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \mathcal{D}_p$, de modo que $d(\exp_p)_0 : (T_0\mathcal{D}_p = T_pS) \to (T_{\exp_{p(0)}}S = T_pS)$ viene dada por

$$d(\exp_p)_0(w) = \frac{d}{dt}(\exp_p(\alpha(t)))(0) = \frac{d}{dt}(\exp_p(tw))(0) = \frac{d}{dt}(\gamma_w(t))(0) = \gamma_w'(0) = w.$$

Un entorno V de $p_0 \in S$ es **estrellado** respecto a p_0 si para $p \in V$ existe un segmento de geodésica que une p_0 con p.

Un **entorno normal** de $p_0 \in S$ es un entorno V de p_0 en S para el que existe un entorno $\mathcal{U}$ del 0 en $T_{p_0}S$ estrellado respecto al 0 tal que $\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to V$ es un difeomorfismo. En estas condiciones, para $p \in V$, sean $v_p := \exp_{p_0}^{-1}(p) \in \mathcal{U}$ y el segmento de geodésica

$\gamma_p := \gamma_{v_p}|_{[0,1]} : [0,1] \to V$, entonces $\gamma_p(t) = \exp_{p_0}(tv_p)$ para $t \in [0,1]$, $\gamma_p(0) = p_0$ y $\gamma_p(1) = p$, por lo que γ_p es el **segmento de geodésica radial** que une p_0 con p. Así, todo entorno normal de p_0 es estrellado respecto a p_0.

3.1. Lema de Gauss

Sean S una superficie regular, $p \in S$, $v \in \mathcal{D}_p \setminus 0$ y $w \in T_pS$, entonces

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Demostración: Supongamos que v y w son colineales y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $w = \lambda v$. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{D}_p$ dada por $\alpha(t) := v + tw = (1 + \lambda t)v$, entonces

$$d(\exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}(\exp_p(\alpha(t)))(0) = \frac{d}{dt}(\exp_p((1+\lambda t)v))(0) = \frac{d}{dt}(\gamma_v(1+\lambda t)) = \lambda\gamma_v'(1+\lambda t),$$

luego $\|d(\exp_p)_v(w)\| = \|\lambda\gamma_v'(1)\| = |\lambda|\|\gamma_v'(1)\| = |\lambda|\|v\| = \|w\|$.

Para el caso general, sea $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to T_pS$ dada por $\tau(s,t) := s\alpha(t) := s(v + tw)$, para todo t es $\tau(0,t) = 0$ y $\tau(1,t) = v + tw$, y como τ es lineal sobre la primera variable, si $\tau(1,t) \in \mathcal{D}_p$, $\tau([0,1] \times \{t\}) = [\tau(0,t), \tau(1,t)] = [0, v + tw] \in \mathcal{D}_p$.

Como $\tau(1,0) = v \in \mathcal{D}_p$, se tiene $\tau([0,1] \times \{0\}) \subseteq \mathcal{D}_p$. Para cada $s \in [0,1]$ existe un entorno de $\tau(s,0)$ contenido en $\mathcal{D}_p$ y, por ser τ continua, existe un $\varepsilon_s > 0$ con $\tau(B_\infty((s,0),\varepsilon_s)) \subseteq \mathcal{D}_p$. Ahora bien, $\{B_\infty((s,0),\varepsilon_s)\}_{s\in[0,1]}$ es un cubrimiento por abiertos de $[0,1] \times \{0\}$ que admite pues un subrecubrimiento finito $\{B_\infty((s_i,0),\varepsilon_{s_i})\}_{i=1}^k$. Proyectando el subrecubrimiento $A := \bigcup_{i=1}^k B_\infty((s_i,0),\varepsilon_{s_i})$ en $\mathbb{R} \times 0$ queda un abierto que contiene a $[0,1]$ y por tanto contiene un intervalo $(-\varepsilon', 1+\varepsilon')$. Sea $\varepsilon := \text{mín}\{\varepsilon_{s_1}, \ldots, \varepsilon_{s_k}, \varepsilon'\}$, para $s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon')$ se tiene

$$(\text{máx}\{s-\varepsilon, -\varepsilon'\}, \text{mín}\{s+\varepsilon, 1+\varepsilon'\}) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq A,$$

luego $\tau((-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq \mathcal{D}_p$.

Sea ahora $\varphi := \exp_p \circ \tau : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) &= \frac{\partial}{\partial s}(\exp_p(s\alpha(t)))(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}(\gamma_{\alpha(t)}(s))(s,t) = \gamma_{\alpha(t)}'(s)\\ &= \frac{d}{ds}(\exp_p(s\alpha(t)))(s,t) = d(\exp_p)_{s\alpha(t)}(\alpha(t)),\end{aligned}$$

donde la última igualdad es por la regla de la cadena, luego

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right\|^2 = \|\gamma_{\alpha(t)}'(s)\|^2 = \|\gamma_{\alpha(t)}'(0)\|^2 = \|\alpha(t)\|^2 = \|v\|^2 + 2t\langle v, w\rangle + t^2\|w\|^2,$$

y por otro lado

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) = d(\exp_p)_{sv}(v), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,0) = d(\exp_p)_0(v) = v, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0) = d(\exp_p)_v(v).$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\exp_p(0)) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(1,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\exp_p(v+tw)) = d(\exp_p)_{v+tw}(w),$$

de modo que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0) = d(\exp_p)_v(w)$. Sea $f : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) := \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0) \right\rangle,$$

de modo que en particular $f(0) = \langle v, 0\rangle = 0$, $f(1) = \langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle$ y queremos ver que $f(1) = \langle v, w\rangle$. Como $\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) = \gamma'_{\alpha(t)}(s)$,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(s,t) = \gamma''_{\alpha(t)}(s), \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''_{\alpha(0)}(s) = \gamma''_v(s) \in T_{\gamma_v(s)}S^\perp,$$

pues γ_v es una geodésica y $\frac{D\gamma'_v}{ds} = 0$. Por otro lado, para $s \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, sea $\beta_s(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ dada por $\beta_s(t) := \exp_p(s\alpha(t))$, β_s es una curva porque $\exp_p$ es un difeomorfismo y $\alpha(t) = v + tw \neq 0$ para ningún t (si lo fuera, v y w serían colineales), de modo que, como $\beta_s(0) = \exp_p(sv) = \gamma_v(s)$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0) = \frac{\partial}{\partial t}(\exp_p(s\alpha(t)))(s,0) = \beta'_s(0) \in T_{\beta_s(0)}S = T_{\gamma_v(s)}S,$$

y entonces

$$\begin{aligned} f'(s) &= \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(s,0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}(s,0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle\right)(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\|^2\right)(0) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\|v\|^2 + 2t\langle v,w\rangle + t^2\|w\|^2)(0) = \frac{1}{2}(t \mapsto 2\langle v,w\rangle + 2t\|w\|^2)(0) = \frac{1}{2}2\langle v,w\rangle = \langle v,w\rangle. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(s)ds = [s\langle v,w\rangle]_{s=0}^1 = \langle v,w\rangle.$$

3.2. Propiedad minimizante de las geodésicas

Sean S una superficie regular, $p \in S$, $v \in \mathcal{D}_p \setminus 0$ y $w \in T_pS$:

1. Si v y w son colineales, $\|d(\exp_p)_v(w)\| = \|w\|$.

   Si $w = 0$ esto es obvio. Sea $\lambda \neq 0$ con $w = \lambda v$, se tiene $v = \frac{1}{\lambda}w$ y, por el lema de Gauss,

   $$\begin{aligned} \langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle &= \langle \tfrac{1}{\lambda}d(\exp_p)_v(w), d(\exp_p)_v(w)\rangle = \tfrac{1}{\lambda}\|d(\exp_p)_v(w)\|^2 \\ &= \langle v,w\rangle = \langle \tfrac{1}{\lambda}w, w\rangle = \tfrac{1}{\lambda}\|w\|^2, \end{aligned}$$

   y despejando se obtiene el resultado.

2. Si v y w son ortogonales, entonces $d(\exp_p)_v(v)$ y $d(\exp_p)_v(w)$ también.

   Por el lema de Gauss, $\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v,w\rangle = 0$.

Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(0,r) := \{v \in T_pS \mid \|v\| < r\} \subseteq \mathcal{D}_p$, llamamos **disco geodésico** de centro p y radio r a $D(p,r) := \exp_p(\mathcal{D}(0,r))$, y si r cumple que $\mathcal{S}(0,r) := \{v \in T_pS \mid \|v\| = r\} \subseteq \mathcal{D}_p$, llamamos **circunferencia geodésica** de centro p y radio r a $S(p,r) := \exp_p(\mathcal{S}(0,r))$. Llamamos **radio geodésico** que sale de p con dirección $v \in T_pS$ a $\exp_p(\{\lambda v\}_{v\geq 0} \cap \mathcal{D}_p)$.

Como **teorema**, si V es un entorno normal de $p_0 \in S$ y $p \in V \setminus \{p_0\}$, el segmento de geodésica $\gamma_p : [0,1] \to V$ que une p_0 a p es la única curva en V de menor longitud que une p_0 a p, salvo reparametrización, y si existe $r > 0$ con $p \in D(p_0,r) \subseteq V$, entonces γ_p es una curva de menor longitud que une p_0 a p.

Demostración: Sea $v_p := \exp_{p_0}^{-1}(p)$, entonces

$$L(\gamma_p) = \int_0^1 \|\gamma_p'(t)\|dt = \int_0^1 \|\gamma_p'(0)\|dt = \|\gamma_p'(0)\| = \|v_p\|.$$

Sea $\alpha : [a,b] \to V$ otra curva que une p_0 a p, y queremos ver que $L(\alpha) \geq L(\gamma_p)$ y que la igualdad solo la alcanzan las reparametrizaciones.

Sean $A := \alpha^{-1}(\{p_0\})$ y $t_0 := \sup A$, existe una sucesión $\{t_n\}_n \subseteq A$ que converge a t_0 y por tanto $\alpha(t_0) = \alpha(\text{lím}_n t_n) = \text{lím}_n \alpha(t_n) = p_0$ y $t_0 \in A$, luego $t_0 = \text{máx}\{t \in [a,b] \mid \alpha(t) = p_0\} < b$ (pues $\alpha(b) = p \neq p_0$), de modo que podemos restringir α a $[t_0,b]$ y reparametrizar para obtener una curva $\alpha' : [0,1] \to \alpha$ que une p_0 a p. Como $L(\alpha') = L_{t_0}^b(\alpha) \geq L(\alpha)$, basta demostrar la propiedad para $\alpha := \alpha'$.

Sean $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}_p$ un abierto estrellado en 0 con $V = \exp_{p_0}(\mathcal{U})$ y $\tilde{\alpha} := \exp_{p_0}^{-1} \circ \alpha : [0,1] \to \mathcal{U}$, que cumple $\tilde{\alpha}(0) = 0$, $\tilde{\alpha}(1) = v_p$ y $\forall t > 0, \tilde{\alpha}(t) \neq 0$. Sean entonces $r(t) := \|\tilde{\alpha}(t)\|$ y, para $t > 0$, $V(t) := \frac{\tilde{\alpha}(t)}{\|\tilde{\alpha}(t)\|}$, de modo que $\alpha(T) = \exp_{p_0}(r(t)V(t))$ para $t > 0$ y

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\exp_{p_0}(\tilde{\alpha}(t))\right)(0) = d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(\tilde{\alpha}'(t)) = d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(r'(t)V(t) + r(t)V'(t)) \\ &= r'(t)d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V(t)) + r(t)d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V'(t)).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\|^2 =& r'(t)^2\|d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V(t))\|^2 \\ &+ 2r(t)r'(t)\langle d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V(t)), d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V'(t))\rangle + r(t)^2\|d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V'(t))\|^2.\end{aligned}$$

Como $V(t)$ es colineal con $\tilde{\alpha}(t) = r(t)V(t)$, $\|d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V(t))\| = \|V(t)\| = 1$, luego

$$\langle r(t)V(t), V'(t)\rangle = r(t)\langle V(t), V'(t)\rangle = 0$$

y

$$\begin{aligned}&\langle d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V(t)), d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V'(t))\rangle = \\ &\qquad = \frac{1}{r(t)}\langle d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}(r(t)V(t)), d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}(V'(t))\rangle = 0.\end{aligned}$$

Así, $\|\alpha'(t)\|^2 = r'(t)^2 + r(t)^2\|d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V'(t))\|^2 \geq r'(t)^2$, luego $\|\alpha'(t)\| \geq |r'(t)|$ para todo $t \in (0,1]$ y, para $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\int_\varepsilon^1 \|\alpha'(t)\|dt \geq \int_\varepsilon^1 r'(t)dt = r(1) - r(\varepsilon) = \|v_p\| - r(\varepsilon) = \|L(\gamma_p)\| - r(\varepsilon),$$

y por continuidad de r,

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\|dt \geq \lim_{\varepsilon\to 0}(\|L(\gamma_p)\| - r(\varepsilon)) = \|L(\gamma_p)\|.$$

Si $L(\alpha) = L(\gamma_p)$, como

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\|dt = \int_0^1 r'(t)dt = \|v_p\|$$

y $\|\alpha'(t)\| \geq r'(t)$ para todo $t \in (0,1]$, por monotonía de la integral es $\|\alpha'(t)\| = r'(t)$ para todo $t \in (0,1]$, pero entonces $r(t)^2\|d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}}(V'(t))\|^2 = 0$ y, por tanto, $d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V'(t)) = 0$, pero $\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}}$ es un difeomorfismo, luego $d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}$ es inyectiva y $V'(t) = 0$. Así, para $t > 0$, $V(t) = V(1) = \frac{v_p}{\|v_p\|}$, luego

$$\alpha(t) = \exp_{p_0}\left(r(t)\frac{v_p}{\|v_p\|}\right) = \gamma_{v_p}\left(\frac{r(t)}{\|v_p\|}\right) = \gamma_p\left(\frac{r(t)}{\|v_p\|}\right),$$

y además $\alpha(0) = p_0 = \gamma_p(0) = \gamma_p(\frac{r(t)}{\|v_p\|})$, luego α es una reparametrización de γ_p.

Finalmente, sea r tal que $p \in D(p_0, r) \subsetneq V$, de modo que $\exp_{p_0} : \mathcal{D}(0,r) \subseteq \mathcal{U} \to D(p_0, r) \subseteq V$ es un difeomorfismo y $\|v_p\| < r$. Sea ahora $\alpha : [a,b] \to S$ con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$. Si $\alpha([a,b]) \subseteq V$, ya sabemos que $L(\gamma_p) \leq L(\alpha)$. En otro caso, sea $r^* := \frac{r+\|v_p\|}{2}$, de modo que $v_p \in \overline{D(p_0, r^*)} \subsetneq D(p_0, r)$, y si $\tilde{\alpha} := \exp_{p_0}^{-1} \circ \alpha$, como $\|\tilde{\alpha}(a)\| = 0$ y existe un $t \in (a,b)$ con $\|\tilde{\alpha}(a)\| \geq r > r^*$, por continuidad de $\|\tilde{\alpha}\|$ es

$$A := \{t \in (a,b) \mid \|\tilde{\alpha}(t)\| = r^*\} = \{t \in [a,b] \mid \alpha(t) \in S(p_0, r^*)\} \neq \emptyset.$$

Entonces, como $\{r^*\}$ es compacto, A también lo es y existe $t^* := \min A$, y llamando $p^* := \alpha(t^*) \in S(p_0, r^*)$,

$$L(\gamma_p) = \|v_p\| < r^* = \|v_{p^*}\| = L(\gamma_{p^*}) \leq L_a^{t^*}(\alpha) \leq L(\alpha).$$

3.3. Coordenadas normales

Sean V un entorno normal de $p_0 \in S$ dado por un entorno $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}_{p_0}$, (e_1, e_2) una base ortonormal de $T_{p_0}S$ y $\phi : \mathbb{R}^2 \to T_{p_0}S$ dado por $\phi(u,v) = ue_1 + ve_2$, entonces $\phi(0,0) = 0$ y $U := \phi^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, luego $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq S$ dada por $X(u,v) := \exp_{p_0}(\phi(u,v))$ es una parametrización llamada **sistema de coordenadas normales** en p_0. Propiedades: $\forall (u,0), (0,v) \in U$:

1. $X(0,0) = p_0$.

   $X(0,0) = \exp_{p_0}(0) = p_0$.

2. $X_u(u,0) = \gamma_{e_1}'(u)$ y $X_v(0,v) = \gamma_{e_2}'(v)$.

   $X_u(u,0) = \frac{d}{du}(\exp_{p_0}(ue_1))(u) = \frac{d}{du}(\gamma_{e_1}(u))(u) = \gamma_{e_1}'(u)$, y para X_v es análogo.

3. $X_u(0,0) = e_1$ y $X_v(0,0) = e_2$.

4. $E(u,0)=G(0,v)=1,\ F(0,0)=0.$

$$\begin{aligned}
E(u,0) &= \langle X_u, X_u\rangle(u,0) = \|\gamma'_{e_1}(u)\|^2 = \|e_1\|^2 = 1,\\
F(0,0) &= \langle X_u, X_v\rangle(0,0) = \langle e_1, e_2\rangle = 0,\\
G(0,v) &= \langle X_v, X_v\rangle(0,v) = \|\gamma'_{e_2}(v)\|^2 = \|e_2\|^2 = 1.
\end{aligned}$$

3.4. Coordenadas polares

Sean V un entorno normal de $p_0 \in S$ dado por un entorno $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}_{p_0}$, (e_1, e_2) una base ortonormal de $T_{p_0}S$, $\ell \coloneqq \{\lambda e_1\}_{\lambda \geq 0}$, $\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to T_{p_0}S \setminus \ell$ el difeomorfismo dado por

$$\phi(r,\theta) \coloneqq r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2,$$

$V_0 \coloneqq \exp_{p_0}(\mathcal{U} \setminus \ell)$ y $U_0 \coloneqq \phi^{-1}(\mathcal{U} \setminus \ell)$, entonces $X : U_0 \to V_0$ dado por $X(r,\theta) \coloneqq \exp_{p_0}(\phi(r,\theta))$ es una parametrización llamada **sistema de coordenadas (geodésicas) polares centrado en** p_0, aunque $p_0 \notin V_0$.

Como **teorema**, sea $X : U_0 \to V_0$ el sistema de coordenadas polares centrado en p_0, entonces, para $(r,\theta) \in U_0$:

1. $E(r,\theta) = 1.$

   Sea $v_\theta \coloneqq (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)$, de modo que $X(r,\theta) = \exp_{p_0}(rv_\theta) = \gamma_{v_\theta}(r)$. Entonces $X_r(r,\theta) = \gamma'_{v_\theta}(r)$ y $E(r,\theta) = \|X_r(r,\theta)\|^2 = \|\gamma'_{v_\theta}(r)\| = \|v_\theta\|^2 = 1.$

2. $F(r,\theta) = 0.$

$$\begin{aligned}
X_r(r,\theta) &= \frac{d}{dr}(\exp_{p_0}(rv_\theta))(r) = d(\exp_{p_0})_{rv_\theta}(v_\theta),\\
X_\theta(r,\theta) &= \frac{d}{d\theta}(\exp_{p_0}(rv_\theta))(\theta) = d(\exp_{p_0})_{rv_\theta}(rv'_\theta),
\end{aligned}$$

   y por el lema de Gauss,

$$F(r,\theta) = \langle X_r(r,\theta), X_\theta(r,\theta)\rangle = \left\langle \frac{1}{r} d(\exp_{p_0})_{rv_\theta}(rv_\theta), d(\exp_{p_0})_{rv_\theta}(rv'_\theta)\right\rangle = \frac{1}{r}\langle rv_\theta, rv'_\theta\rangle = 0.$$

3. $G(r,\theta) > 0$

   $G(r,\theta) = \|X_\theta(r,\theta)\|^2 = \|rd(\exp_{p_0})_{rv_\theta}(v'_\theta)\|^2 = r^2\|d(\exp_{p_0})_{rv_\theta}(v'_\theta)\|^2$, que es positivo porque $r > 0$, $v'_\theta \neq 0$ y $d(\exp_{p_0})_{rv_\theta}$ es un isomorfismo al ser $\exp_{p_0}$ un difeomorfismo en $\mathcal{U}$.

4. $\lim_{r\to 0} G(r,\theta) = 0.$

   Para un θ fijo,

$$\lim_{r\to 0} G(r,\theta) = \lim_{r\to 0} r^2\|d(\exp_{p_0})_{rv_\theta}(v'_\theta)\|^2 = 0^2 \cdot \|d(\exp_{p_0})_0(v'_\theta)\|^2 = 0.$$

5. $\lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G(r)})(r,\theta) = 1.$

   Sean $\overline{X}(u,v) := \exp_{p_0}(ue_1 + ve_2)$ la parametrización normal centrada en p_0 a partir de V y $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ los parámetros de su primera forma fundamental, como $X(r,\theta) = \overline{X}(r_\theta) := \overline{X}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, se tiene

$$X_r(r,\theta) = \overline{X}_u(r_\theta)\cos\theta + \overline{X}_v(r_\theta)\sin\theta, \quad X_\theta(r,\theta) = -\overline{X}_u(r_\theta)r\sin\theta + \overline{X}_v(r_\theta)r\cos\theta,$$

   pero $\|X_r \wedge X_\theta\| = \sqrt{EG - F^2} \overset{E=1}{\underset{F=0}{=}} \sqrt{G}$ y $\|\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v\| = \sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}$, y como

$$X_r \wedge X_\theta = r\cos^2\theta \overline{X}_u \wedge \overline{X}_v - r\sin^2\theta \overline{X}_v \wedge \overline{X}_u = r\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v,$$

   queda $\sqrt{G}(r,\theta) = \|X_r \wedge X_\theta\| = r\|\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v\| = r\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G} = \sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r_\theta) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r_\theta)\right),$$

   pero

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r_\theta)\right) =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial r}(\overline{E}(r_\theta))\overline{G}(r_\theta) + \overline{E}(r_\theta)\frac{\partial}{\partial r}(\overline{G}(r_\theta)) - 2\overline{F}(r_\theta)\frac{\partial}{\partial r}(\overline{F}(r_\theta))}{2\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r_\theta)} \in \mathbb{R},$$

   pues $\lim_{r\to 0}\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r_\theta) = \sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(0,0) = 1$ y la parte superior del cociente es continua y está definida para $r = 0$. Así,

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G} = \lim_{r\to 0}\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r_\theta) + \lim_{r\to 0} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}(r_\theta)\right) = 1 + 0 = 0.$$

6. La curvatura de Gauss, K, satisface

$$\sqrt{G(r,\theta)}K(X(r,\theta)) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G(r,\theta)}) = 0.$$

   Como $F = 0$,

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}}\right)_\theta + \left(\frac{G_r}{\sqrt{EG}}\right)_r\right] \overset{E_\theta\equiv 0}{=} -\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(\frac{G_r}{\sqrt{G}}\right)_r = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr},$$

   pues $(\sqrt{G})_r = \frac{1}{2}\frac{G_r}{\sqrt{G}}$, y multiplicando por $\sqrt{G}$ y despejando, $\sqrt{G}K + (\sqrt{G})_{rr} = 0$.

7. Si K es constante,

$$G(r,\theta) = \begin{cases} r^2, & K = 0; \\ \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}r), & K > 0; \\ -\frac{1}{K}\sinh^2(\sqrt{-K}r), & K < 0. \end{cases}$$

Fijado θ, sea $u(r) := \sqrt{G(r,\theta)}$, de modo que $G(r,\theta) = u(r)^2$. Se tiene

$$\begin{cases} u(r)K + \ddot{u} = 0, \\ \lim\limits_{r\to 0} u(r) = 0, \\ \lim\limits_{r\to 0} \dot{u}(r) = 1, \end{cases}$$

lo que podemos tratar como un problema de Cauchy con una e.d.o. homogénea. Así:

a) Si $K = 0$, queda $\ddot{u} = 0$ y $u(r) = ar + b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 = u(0) = b$ y $1 = u'(0) = a$. Por tanto $u(r) = r$ y $G(r,\theta) = r^2$.

b) Si $K > 0$, el polinomio asociado es $p(\lambda) = \lambda^2 + K$ y $\lambda = \pm\sqrt{K}i$, luego una base de soluciones es $\{\cos(\sqrt{K}r), \sin(\sqrt{K}r)\}$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $u(r) = a\cos(\sqrt{K}r) + b\sin(\sqrt{K}r)$, pero $0 = u(0) = a$ y $1 = u'(0) = b\sqrt{K}$, luego $u(r) = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}r)$ y $G(r,\theta) = \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}r)$.

c) Si $K < 0$, el polinomio asociado es $p(\lambda) = \lambda^2 - K$ y $\lambda = \pm\sqrt{K}$, luego una base de soluciones es $\{e^{\sqrt{K}t}, e^{-\sqrt{K}t}\}$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $u(r) = ae^{\sqrt{K}t} + be^{-\sqrt{K}t}$. Ahora bien, $0 = u(0) = a + b$ y $1 = u'(0) = \sqrt{K}(a - b)$, luego $2a = \frac{1}{\sqrt{K}}$, $2b = -\frac{1}{\sqrt{K}}$ y, por tanto, $u(r) = \frac{1}{2\sqrt{K}}(e^{\sqrt{K}t} - e^{-\sqrt{K}t}) = \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh(\sqrt{K}t)$, y $G(r,\theta) = \frac{1}{K}\sinh^2(\sqrt{K}t)$.

Teorema de Minding: Dos superficies regulares con igual curvatura de Gauss constante son localmente isométricas.

Demostración: Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares con curvatura de Gauss constante $K \in \mathbb{R}$, $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ entornos estrellados del 0 para los que existen difeomorfismos $\exp_{p_1} : \mathcal{U}_1 \to U_1$ y $\exp_{p_2} : \mathcal{U}_2 \to U_2$, $\varepsilon > 0$ con $\mathcal{D}(0_{p_1}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{D}(0_{p_2}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_2$, $V_1 := D(p_1, \varepsilon)$ y $V_2 := D(p_2, \varepsilon)$, entonces $\exp_{p_1} : \mathcal{D}(0_{p_1}, \varepsilon) \to V_1$ y $\exp_{p_2} : \mathcal{D}(0_{p_2}, \varepsilon) \to V_2$ son difeomorfismos.

Sean ahora (e_1, e_2) una base ortonormal de $T_{p_1}S_1$, (f_1, f_2) una de $T_{p_2}S_2$ y $\tilde{\varphi} : T_{p_1}S_1 \to T_{p_2}S_2$ una isometría lineal dada por $\tilde{\varphi}(e_1) := f_1$ y $\tilde{\varphi}(e_2) := f_2$, entonces $\tilde{\varphi}(\mathcal{D}(0_{p_1}, \varepsilon)) = \mathcal{D}(0_{p_2}, \varepsilon)$ y

$$\varphi := \exp_{p_2} \circ \tilde{\varphi}|_{\mathcal{D}(0_{p_1},\varepsilon)} \circ \exp_{p_1}^{-1} : D(p_1, \varepsilon) \to D(p_2, \varepsilon)$$

es un difeomorfismo, y queremos ver que también es una isometría.

Para ello, tomando coordenadas geodésicas polares $X(r,\theta)$ en $D(p_1, \varepsilon)$ con base (e_1, e_2) y $\overline{X}(r,\theta)$ en $D(p_2, \varepsilon)$ con base (f_1, f_2), sean E, F, G y $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ los coeficientes de la primera forma fundamental de X y $\overline{X}$, $E = \overline{E} = 1$, $F = \overline{F} = 0$ y, como G y $\overline{G}$ vienen dados por K, $G = \overline{G}$. Además,

$$\begin{aligned} \varphi(X(r,\theta)) &= \varphi(\exp_{p_1}(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)) = \exp_{p_2}(\tilde{\varphi}(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)) = \\ &= \exp_{p_2}(r\cos\theta f_1 + r\sin\theta f_2) = \overline{X}(r,\theta), \end{aligned}$$

luego $d\varphi_{X(r,\theta)} : T_{X(r,\theta)}S_1 \to T_{\varphi(X(r,\theta))}S_2$ cumple

$$d\varphi_{X(r,\theta)}(X_r(r,\theta)) = \frac{d}{dr}(\varphi(X(r,\theta))) = \overline{X}_r(r,\theta), \qquad d\varphi_{X(r,\theta)}(X_\theta(r,\theta)) = \overline{X}_\theta(r,\theta),$$

de modo que

$$\langle d\varphi_X(X_r), d\varphi_X(X_r)\rangle = \left\langle \overline{X}_r, \overline{X}_r \right\rangle = \overline{E} = E = \langle X_r, X_r\rangle$$

y, análogamente, $\langle d\varphi_X(X_r), d\varphi_X(X_\theta)\rangle = \langle X_r, X_\theta\rangle$ y $\langle d\varphi_X(X_\theta), d\varphi_X(X_\theta)\rangle = \langle X_\theta, X_\theta\rangle$. Como (X_r, X_θ) es una base de T_XS_1, φ es una isometría.

Capítulo 4

Distancia intrínseca en una superficie

Dada una superficie regular S, un **segmento de curva diferenciable** en S es una función $\alpha : [a, b] \to S$ para la que existen $\varepsilon > 0$ y una curva diferenciable (no necesariamente regular) $\beta : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to S$ de modo que $\beta|_{[a,b]} = \alpha$.

Un **segmento de curva diferenciable a trozos** en S es una función continua $\alpha : [a, b] \to S$ para la que existe una partición $a = t_0 < \dots < t_k = b$ tal que, para $i \in \{1, \dots, k\}$, $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$ es un segmento de curva diferenciable. Entonces, para $i \in \{1, \dots, k-1\}$, llamamos $\alpha'_-(t_i) = \lim_{t\to t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'_i(t_i)$ y $\alpha'_+(t_i) = \lim_{t\to t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'_{i+1}(t_i)$. Entonces $\alpha(t_i)$ es un **vértice** de α si $\alpha'_-(t_i) \neq \alpha'_+(t_i)$.

4.1. Distancia

Si S es una superficie regular conexa, dados $p, q \in S$, llamamos $\Omega(p, q)$ al conjunto de segmentos de curvas diferenciables a trozos $\alpha : [a, b] \to S$ con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, que no es vacío, y llamamos **distancia intrínseca** en S a la $d : S \times S \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(p, q) := \inf_{\alpha\in\Omega(p,q)} L(\alpha),$$

siendo $L(\alpha)$ la longitud de α, que es una distancia. Además, $\|p - q\| \leq d(p, q)$ para $p, q \in S$.

Demostración: Primero hay que ver que está bien definida, es decir, que para $p, q \in S$, $\{L(\alpha)\}_{\alpha\in\Omega(p,q)}$ tiene ínfimo.

Primero vemos que $A := \{q \in S \mid \Omega(p, q) \neq \emptyset\} = S$ viendo que es abierto, cerrado y no vacío. La curva constante en p está en $\Omega(p, p)$, luego $p \in A \neq \emptyset$.

Para ver que A es abierto, sea $q \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(q, \varepsilon)$ es un entorno normal de q, de modo que si $\alpha \in \Omega(p, q)$, para $q' \in D(q, \varepsilon)$, sea $\gamma_{q'}$ el segmento de geodésica que une q con q', entonces $\alpha \wedge \gamma_{q'} \in \Omega(p, q')$, $q' \in A$ y, como q' es arbitrario, $D(q, \varepsilon) \subseteq A$.

Para ver que A es cerrado, vemos que $A^{\complement} = S \setminus A$ es abierto. Sea $q \in A^{\complement}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $D(q, \varepsilon)$ es un entorno normal de q, entonces $D(q, \varepsilon) \subseteq A^{\complement}$, pues si hubiera $q' \in D(q, \varepsilon) \cap A$, sea $\beta \in \Omega(p, q')$ y $\gamma_{q'}$ el segmento de geodésica que une q con q', entonces $\beta \wedge \overline{\gamma_{q'}} \in \Omega(p, q)\#$. Como A es abierto, cerrado y no vacío en el conexo S, $A = S$.

Con esto, como $\Omega(p,q) \neq \emptyset$ y $\{L(\alpha)\}_{\alpha\in\Omega(p,q)}$ está acotado inferiormente por 0, el ínfimo existe. Queda ver que d es una distancia. Sean $p,q,r \in S$:

1. $d(p,q) \geq 0$.
2. $d(p,q) = 0 \iff p = q$.

$\Longrightarrow]$ Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, sean $\alpha : [a,b] \to S$ en $\Omega(p,q)$ y $v := \frac{\overrightarrow{q-p}}{\|\overrightarrow{q-p}\|}$, entonces

$$\begin{aligned}\|p-q\| = \langle q-p, v\rangle = \langle q, v\rangle - \langle p, v\rangle = \langle \alpha(b), v\rangle - \langle \alpha(a), v\rangle = \\ = \int_a^b \langle \alpha'(t), v\rangle dt \leq \int_a^b |\langle \alpha'(t), v\rangle| dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha),\end{aligned}$$

y tomando el ínfimo, $\|p-q\| \leq \inf_{\alpha\in\Omega(p,q)} L(\alpha) = d(p,q) = 0$, luego $p = q$.

$\Longleftarrow]$ Basta tomar la curva constante, de longitud 0.

3. $d(p,q) = d(q,p)$.

   $\Omega(q,p) = \{\overline{\alpha}\}_{\alpha\in\Omega(p,q)}$, pero $L(\overline{\alpha}) = L(\alpha)$.

4. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

   Para $\alpha \in \Omega(p,r)$ y $\beta \in \Omega(r,q)$, $\alpha \wedge \beta \in \Omega(p,q)$, luego

$$d(p,q) = \inf_{\gamma\in\Omega(p,q)} L(\gamma) \leq L(\alpha \wedge \beta) = L(\alpha) + L(\beta).$$

   Entonces $d(p,q) - L(\beta) \leq L(\alpha)$ y tomando el ínfimo $d(p,q) - L(\beta) \leq d(p,r)$, luego $d(p,q) - d(p,r) \leq L(\beta)$ y tomando el ínfimo $d(p,q) - d(p,r) \leq d(r,q)$.

4.2. Propiedades

Sean S una superficie regular conexa y $p \in S$ y $r > 0$ con $\mathcal{D}(0_p, r) \subseteq \mathcal{D}_p$:

1. $D(p,r) \subseteq B_d(p,r)$.

   Para $q \in D(p,r) = \exp_p(\mathcal{D}(0_p, r))$, existe $v \in \mathcal{D}(0_p, r)$, no necesariamente único, con $q = \exp_p(v)$. Sea entonces $\gamma : [0,1] \to D(p,r)$ el segmento de geodésica radial de p a q, como $\gamma \in \Omega(p,q)$,

$$d(p,q) \leq L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma'(0)\| = \|v\| < r,$$

   luego $q \in B_d(p,r)$.

2. Existe $\delta > 0$ tal que, para $r \in (0,\delta)$, $D(p,r)$ es un entorno normal de p.

   Existe un entorno $\mathcal{U}$ estrellado respecto al 0 con $\exp_p : \mathcal{U} \to (V := \exp_p(\mathcal{U}))$ difeomorfismo, luego existe $\delta > 0$ con $\mathcal{D}(0,\delta) \subseteq \mathcal{U}$ y, para $r < \delta$, $\mathcal{D}(0,r) \subseteq \mathcal{U}$ y $\exp_p : \mathcal{D}(0,r) \to D(0,r)$ es un difeomorfismo.

3. Si $D(p,r)$ es normal, $D(p,r) = B_d(p,r)$.

   Queremos ver que $B_d(p,r) \subseteq D(p,r)$. Supongamos que esto no ocurre, con lo que existe $q \in B_d(p,r) \setminus D(p,r)$. Entonces, para $\alpha : [a,b] \to S$ en $\Omega(p,q)$ y $r^* \in (0,r)$, como $q \notin D(p,r^*)$, existe $t^* := \text{ínf}\{t \in [a,b] \mid \alpha(t) \notin D(p,r^*)\}$, pero $t \neq a$, por tanto $t > a$, existe una sucesión creciente $\{t_n\}_n \subseteq (a,t)$ que tiende a t y, por continuidad,

   $$p^* := \alpha(t^*) = \lim_n \alpha(t_n) \in \overline{D(p,r^*)},$$

   de modo que $p^* \in \partial D(p,r^*) = S(p,r^*)$. Entonces existe $v^* \in \mathcal{S}(0,r)$ con $p^* = \exp_p(v^*)$ y $\|v^*\| = r^*$. Con esto, $L(\alpha) \geq L(\alpha|_{[a,t^*]}) \geq L(\gamma_{p^*}) = \|v^*\| = r^*$, pero como $\alpha \in \Omega(p,q)$ es arbitrario, $d(p,q) \geq r^*$, y como $r^* \in (0,r)$ es arbitrario, $d(p,q) \geq r\#$.

La topología inducida en S por la usual en $\mathbb{R}^3$ coincide con la inducida por la distancia intrínseca en S. **Demostración:** Sean $\mathcal{T}_S$ y $\mathcal{T}_d$ respectivamente estas topologías:

- $\subseteq$] Para $A \in \mathcal{T}_S$ y $p \in A$, existe $\delta > 0$ con $B_{d_{\mathbb{R}^3}}(p,\delta) \cap S \subseteq A$, pero para $q \in B_d(p,\delta)$ es $\|p-q\| \leq d(p,q) < \delta$ y por tanto $q \in B_{d_{\mathbb{R}^3}}(p,\delta) \cap S \subseteq A$, luego $B_d(p,\delta) \subseteq A$ y, como p es arbitrario, $A \in \mathcal{T}_d$.

- $\supseteq$] Para $A \in \mathcal{T}_d$ y $p \in A$, existe $\delta_p > 0$ con $B_d(p,\delta_p) \subseteq A$, y haciendo δ suficientemente pequeño, $D(p,\delta_p)$ es normal e igual a $B_d(p,\delta_p)$, pero $D(p,\delta_p)$ es abierto en $\mathcal{T}_S$ ya que $\exp_p : \mathcal{D}(0_p,\delta_p) \to D(p,\delta_p)$ es un difeomorfismo, de modo que $A = \bigcup_{p \in A} D(p,\delta_p) \in \mathcal{T}_S$ por ser unión de abiertos.

Capítulo 5

El teorema de Hopf-Rinow

Dada una superficie regular S, un entorno $W \subseteq S$ de $p \in S$ es **convexo** si es normal en todos sus puntos. Todo $p \in S$ tiene un entorno convexo.

Sea V un entorno normal de $p_0 \in S$, para cada $p \in V$, el segmento de geodésica radial $\gamma_p : [0,1] \to V$ es el único segmento de geodésica contenido en V con $\gamma_p(0) = p_0$ y $\gamma_p(1) = p$, salvo reparametrizaciones. **Demostración:** Sea $\alpha : [a,b] \to V$ un segmento de geodésica que une p_0 a p, por reparametrización afín podemos suponer que $\alpha : [0,1] \to V$. Sea $w := \alpha'(0)$, la geodésica maximal $\gamma_w : I_w \to S$ debe cumplir $[0,1] = \text{Dom}\alpha \subseteq I_w$, luego $1 \in I_w$, $w \in \mathcal{D}_p$ y $\alpha(t) = \gamma_w(t) = \exp_{p_0}(tw)$ para $t \in [0,1]$. Por otro lado, $\gamma_p(t) = \exp_{p_0}(tv_p)$, y queda probar que $w = v_p$. Se tiene $\exp_{p_0}(w) = \gamma_w(1) = \alpha(1) = p = \gamma_p(1) = \exp_{p_0}(v_p)$. Sea $\mathcal{U}$ un entorno de 0_{p_0} tal que $\exp_{p_0} : \mathcal{U} \to V$ es un difeomorfismo, basta ver que $w \in \mathcal{U}$, pues entonces, como $v_p \in \mathcal{U}$, por el difeomorfismo $w = v_p$. Sean $\tilde{\alpha}(t) := (\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}})^{-1}(\alpha(t)) \in \mathcal{U}$ y $A := \{t \in [0,1] \mid \tilde{\alpha}(t) = tw\}$, queremos ver que $A = [0,1]$. Como $\tilde{\alpha}(0) = (\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}})^{-1}(p) = 0 = 0w$, $0 \in A$, y $A = (t \mapsto \tilde{\alpha}(t) - tw)^{-1}(\{0\})$ es cerrado. Ahora bien, para $t_0 \in A$, $t_0 w = \tilde{\alpha}(t_0) \in \mathcal{U}$ y, como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que para $t \in B(t_0, \varepsilon)$ es $tw \in \mathcal{U}$ y por tanto $\alpha(t) = \exp_{p_0}(tw) = \exp_{p_0}(\tilde{\alpha}(t))$. Como A es abierto, cerrado y no vacío, $A = [0,1]$.

Sea $\gamma : [0,b) \to S$ un segmento de geodésica para el que existe $\lim_{t \to b^-} \gamma(t) = p$, existe $\varepsilon > 0$ para el que γ se puede extender a una geodésica $\gamma : [0, b+\varepsilon) \to S$ con $\gamma(b) = p$. **Demostración:** Existen un entorno convexo W de p y $a \in [0,b)$ de modo que $\gamma(t) \in W$ para todo $t \in [a,b)$. Dado segmento de geodésica $\gamma_p : [0,1] \to W$ que une $\gamma(a)$ a p, para $t \in [a,b)$, $\gamma|_{[a,t]}$ es una reparametrización de $\gamma_p|_{[0,\frac{t-a}{b-a}]}$, con lo que $\gamma|_{[a,b)}$ es reparametrización de $\gamma_p|_{[0,1)}$ y, como γ_p se existe a un segmento de geodésica $\gamma_p : [0, 1+\varepsilon) \to W$ para un $\varepsilon > 0$, podemos usar la reparametrización afín para extender γ como $\gamma : [0, b + \frac{\varepsilon}{b-a}) \to S$.

Para $p, q \in S$, $\alpha \in \Omega(p,q)$ es **minimizante** o **realiza la distancia** entre p y q si $d(p,q) = L(\alpha)$. Si $\alpha : [a,b] \to S$ realiza la distancia entre p y q, existe una partición $a = t_0 < \dots < t_n = b$ y un cubrimiento $\{W_i\}_{i=0}^n$ de $\alpha([a,b])$ por entornos convexos de forma que, para $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es diferenciable e $\text{Im}\alpha_i \subseteq W_i$.

Todo segmento de curva minimizante es una reparametrización de un segmento de geodésica, y en particular no tiene vértices.

Demostración: Sean $\alpha : [a,b] \to S$ un segmento de curva minimizante y $a = t_0 < \dots < t_n = b$ y $\{W_i\}_{i=0}^n$ un cubrimiento de $\alpha([a,b])$ por entornos convexos con cada $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ diferenciable con imagen en W_i, como cada α_i es minimizante entre $\alpha(t_{i-1})$ y $\alpha(t_i)$, $L(\alpha_i) =$

$d(\alpha(t_{i-1}),\alpha(t_i))$, pero $\text{Im}\alpha_i\subseteq W_i$, luego viendo W_i como entorno normal de $\alpha(t_{i-1})$, α_i es una reparametrización de un segmento de geodésica radial de $\alpha(t_{i-1})$ a $\alpha(t_i)$ y α es una concatenación de geodésicas potenciales. Además, por continuidad, si $i<n$, existe $\varepsilon>0$ con $\alpha([t_{i-1},t_i+\varepsilon])\subseteq W$ y por tanto un segmento de geodésica radial γ en W de $\alpha(t_{i-1})$ a $\alpha(t_i+\varepsilon)$. Como $\alpha|_{[t_{i-1},t_i+\varepsilon]}$ es minimizante, por unicidad es una reparametrización de γ, de modo que α es $\mathcal{C}^\infty$ en t_i y reparametriza una misma geodésica en todo punto.

Si S es conexa y geodésicamente completa en un $p_0\in S$, entonces para todo $p\in S$ existe un segmento de geodésica minimizante que une p_0 a p.

TEM

Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es **de Hausdorff** o T_2 si $\forall p,q\in X,p\neq q;\exists U\in\mathcal{E}(p),V\in\mathcal{E}(q):U\cap V=\emptyset$. [...] Todo espacio metrizable es [...] T_2 [...]. [...]

Todo [...] compacto [...] de un espacio [...] Hausdorff [...] es cerrado. [...]

Todo [...] compacto K de un espacio métrico (X,d) es acotado. **Demostración:** Dado $a\in X$, para todo $x\in K$ existe un $n_x\in\mathbb{N}$ con $d(x,a)<n_x$, de modo que $\{B(a;n)\}_{n=1}^\infty$ es un recubrimiento abierto de K del que podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{B(a;n_1),\dots,B(a;n_r)\}$, pero entonces $K\subseteq B(a;n_1)\cup\dots\cup B(a;n_r)=B(a;\text{máx}\{n_1,\dots,n_r\})$.

Un espacio métrico (X,d) cumple la **propiedad de Heine-Borel** si para $A\subseteq S$, A es compacto si y sólo si es cerrado y acotado con la distancia d. Todo espacio métrico que cumple esta propiedad es completo. **Demostración:** Sean $\{p_n\}_n\subseteq X$ una sucesión de Cauchy y $A\coloneqq\{p_n\}_n$ su conjunto de puntos, para $\varepsilon>0$ existe $N>0$ tal que $\forall n,m\geq N,d(p_n,p_m)<\varepsilon$. Dados $p\in X$ y $n\geq N$, $d(p,p_n)\leq d(p,p_N)+d(p_N,p_n)\leq d(p,p_N)+\varepsilon$, y dado $r_0>d(p,p_N)+\varepsilon$, $d(p,p_n)<r_0$ para todo $n\geq N$. Tomando $r\coloneqq\text{máx}\{r_0,d(p,p_1),\dots,d(p,p_{N-1})\}$, es $d(p,p_n)<r$ para todo $n\in\mathbb{N}$, luego A es acotado. Por tanto $\overline{A}$ es cerrado y acotado, con lo que $\overline{A}$ es compacto por la propiedad de Heine-Borel y, como $\{p_n\}_n\subseteq\overline{A}$, existe una subsucesión convergente de $(p_n)_n$, pero al ser de Cauchy con una subsucesión convergente, es convergente.

Teorema de Hopf-Rinow: Dada una superficie regular conexa S, (S,d) es un espacio métrico completo si y sólo si S es geodésicamente completa, si y sólo si existe un $p_0\in S$ en el que S es geodésicamente completa, si y sólo si (S,d) cumple la propiedad de Heine-Borel, en cuyo caso diremos que S es **completa**.

$1\implies 2$] Supongamos que S no es geodésicamente completa, con lo que existen $p_0\in S$ y $v\in T_{p_0}S$ tales que $\gamma\coloneqq\gamma_v$ no está definida en todo $t\in\mathbb{R}$. Podemos suponer que existe $b>0$ tal que γ está definida en $[0,b)$ y no se puede extender más allá de b, pues si I_v solo estuviera acotado inferiormente, cambiamos v por $-v$. Sea $\{t_n\}_n\subseteq[0,b)$ una sucesión con $\text{lím}_n t_n=b$, como $(t_n)_n$ es de convergente es de Cauchy, luego para $\varepsilon>0$ existe $n_0>0$ tal que para $n,m\geq n_0$ es $|t_m-t_n|<\varepsilon$. Ahora bien,

$$d(\gamma(t_n),\gamma(t_m))\leq L_{t_n}^{t_m}(\gamma|_{[t_n,t_m]})=\left|\int_{t_n}^{t_m}\|\gamma'(t)\|dt\right|=|t_m-t_n|\|\gamma'(0)\|=|t_m-t_n|\|v\|,$$

luego si $n,m\geq n_0$, entonces $d(\gamma(t_n),\gamma(t_m))\leq\|v\|\varepsilon$. Por tanto $(\gamma(t_n))_n$ es de Cauchy en (S,d) y, como (S,d) es completo, $(\gamma(t_n))_n$ es convergente, luego existe $p\in S$ con $p=\text{lím}_n\gamma(t_n)$. Como $\{t_n\}_n$ es arbitrario, si $\{s_n\}_n\subseteq[0,b)$ es otra sucesión con $\text{lím}_n s_n=b$, existe $p'\in S$ con $p'=\text{lím}_n\gamma(s_n)\in S$, y como

$$0\leq d(\gamma(s_n),\gamma(t_n))\leq L_{s_n}^{t_n}(\gamma)=\|v\||t_n-s_n|,$$

cuando $n \to \infty$, $|t_n - s_n| \to 0$ y $d(p', p) = 0$, con lo que $p' = p$ y, como esto se cumple para cualquier $\{s_n\}_n$, $\lim_{t \to b^-} \gamma(t) = p$. Por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que γ se puede extender a una geodésica $\gamma : [0, b + \varepsilon) \to S\#$.

$2 \implies 3$] Obvio.

$3 \implies 4$] Como S es geodésicamente completa en p_0, $\exp_{p_0}$ está definida en todo $T_{p_0}S$, y queremos ver que, para $A \subseteq S$, A es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

$\implies$] Si A es compacto, es cerrado por estar en un espacio Hausdorff y acotado por estar en uno métrico.

$\impliedby$] Como A es acotado, existe $M > 0$ con $A \subseteq B_d(p_0, M)$, y como S es conexa y geodésicamente completa en p_0, para $p \in A$ existe un segmento de geodésica minimizante $\gamma : [0, a] \to S$ que une p_0 a p. Sea $v := \gamma'(0)$, entonces

$$M > d(p_0, p) = L_0^a(\gamma) = \int_0^a \|\gamma'(t)\| dt = a\|\gamma'(0)\| = a\|v\|,$$

luego $av \in \mathcal{D}(0, M)$ y $p = \gamma(a) = \exp_{p_0}(av) \in \exp_{p_0}(\mathcal{D}(0, M)) \subseteq \exp_{p_0}(\overline{\mathcal{D}(0, M)})$. Pero $\exp_{p_0}(\overline{\mathcal{D}(0, M)})$ es compacto en S por serlo $\overline{\mathcal{D}(0, M)}$ en $T_{p_0}S$ y por ser $\exp_{p_0}$ continua, luego $A \subseteq \exp_{p_0}(\overline{\mathcal{D}(0, M)})$ es un cerrado dentro de un compacto y por tanto un compacto.

$4 \implies 1$] Visto para todo espacio métrico.

Así, si una superficie regular conexa S es completa, dos puntos $p, q \in S$ se pueden unir con un segmento de geodésica minimizante, no necesariamente único. Todo espacio métrico compacto es completo, pues sus subespacios cerrados y acotados, por ser cerrados, son compactos, cumpliendo la propiedad de Heine-Borel. En particular toda superficie regular, conexa y compacta es completa.

Toda superficie regular conexa y cerrada en $\mathbb{R}^3$ es completa. **Demostración:** Sea S esta superficie, dada una sucesión de Cauchy $\{p_n\}_n \subseteq S$, como $\|p_n - p_m\| \leq d(p_n, p_m)$ para $n, m \in \mathbb{N}$, $(p_n)_n$ también es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$, pero este espacio es completo y por tanto $(p_n)_n$ converge en $\mathbb{R}^3$ a un $p \in \mathbb{R}^3$. Pero como S es cerrada y $\{p_n\}_n \subseteq S$, el límite $p \in S$, luego la sucesión converge también en S.

Capítulo 6

Variaciones de la longitud

Dadas una superficie regular S y un $\varepsilon > 0$, una **variación** de un segmento de curva parametrizada $\alpha : [a,b] \to S$ es una función diferenciable $\phi : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\phi_0(u) := \phi(u,0) = \alpha(u)$ para todo $u \in [a,b]$.

Para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, llamamos $\alpha_t := (u \mapsto \phi(u,t)) : [a,b] \to S$ y **curvas de la variación** a $\{\alpha_t\}_{t \in (-\varepsilon,\varepsilon)}$, con $\alpha_0 = \alpha$. Para $u \in [a,b]$, llamamos $\beta_u := (t \mapsto \phi(u,t)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ y **curvas transversales de la variación** a $\{\beta_u\}_{u \in [a,b]}$. La variación es **propia** o **tiene extremos fijos** si β_a y β_b son constantes, es decir, $\phi(a,t) = \alpha(a)$ y $\phi(\beta,t) = \alpha(b)$ para todo t.

Llamamos **campo variacional** de ϕ a $Z : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$Z(u) := \beta_u'(0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(u,0) \in T_{\alpha(u)}S,$$

pues $\beta_u(0) = \alpha(u)$. Entonces ϕ es una **variación normal** si $\langle Z, \alpha' \rangle \equiv 0$, de modo que si N es una normal a S, $Z(u)$ es paralelo a $\alpha'(u) \wedge N(\alpha(u))$ para $u \in [a,b]$.

6.1. Primera fórmula de variación del arco

Dada una variación $\phi : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ de la curva α, el **funcional longitud de arco** de ϕ es $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por $L(t) := L(\alpha_t)$.

Si α es regular, $L(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_a^b \frac{1}{\|\alpha_t'(u)\|} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u,t) du \\ &= \int_a^b \frac{1}{\|\alpha_t'(u)\|} \left(\frac{d}{du} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle \right) (u,t) du. \end{aligned}$$

Demostración: Sea $f : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(u,t) := \|\alpha_t'(u)\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\| (u,t) = \sqrt{\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u,t) du},$$

entonces, para los t en que L es derivable,

$$L'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b f(u,t)du = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(u,t)du,$$

de modo que $L'(t)$ está definida si y solo si lo está $\frac{\partial f}{\partial t}(u,t)$ para todo $u \in [a,b]$, si y solo si $\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u,t) > 0$ (pues las derivadas de ϕ son diferenciables), si y sólo si $\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,t) \right\| > 0$. Ahora bien, como α es regular, para $u \in [a,b]$, $\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,0) \right\| = \|\alpha_0'(u)\| = \|\alpha'(u)\| > 0$, y como $[a,b]$ es compacto, $\|\alpha'\|([a,b])$ alcanza su máximo y su mínimo y existe $c > 0$ tal que $\forall u \in [a,b], f(u,0) = \|\alpha'(u)\| \geq c > \frac{c}{2} > 0$. Así, para $u \in [a,b]$ existe δ_u tal que $\forall t \in (-\delta_u, \delta_u), f(u,t) > \frac{c}{2}$. Sea ahora una $\delta : [a,b] \to [0,\varepsilon)$ tal que $f(u,t) > \frac{c}{2}$ para todo $u \in [a,b]$ y $t \in (-\delta_u, \delta_u)$ y tal que, para cada $u \in [a,b]$, δ_u sea lo mayor posible. Si $\varepsilon_0 := \inf_{u[a,b]} \delta_u = 0$, entonces existe una sucesión $(u_n)_n$ tal que $\lim_n \delta_{u_n} = 0$, pero como la sucesión está acotada en $[a,b]$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión convergente $(u_{n_k})_k$, de modo que $\lim_k \delta_{u_{n_k}} = 0$. Existe un N tal que, para $k \geq N$, $\delta_{u_{n_k}} < \varepsilon$ y por tanto $f(u_{n_k}, \delta_{u_{n_k}}) = \frac{c}{2}$, pues no puede ser menor ya que f es continua y $f(u_{n_k}, t) > \frac{c}{2}$ para $t < \delta(u_{n_k})$ y, si fuera positivo, existiría un $\delta_u' > 0$ tal que $f(u_{n_k}, t) > \frac{c}{2}$ para $t < \delta_{u_{n_k}} + \delta_u'$, contradiciendo que δ_u sea lo mayor posible. Entonces la sucesión $((u_{n_k}, \delta_{u_{n_k}}))_k$ tiende a un cierto $(u,0)$ y, por continuidad de f,

$$c \leq f(u,0) = f\left(\lim_k (u_{n_k}, \delta_{u_{n_k}})\right) = \lim_k f(u_{n_k}, \delta_{u_{n_k}}) = \lim_k \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\#.$$

Por tanto $m > 0$ y $f(u,t) > \frac{c}{2}$ para $(u,t) \in [a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. En este intervalo, $L'(t)$ está definida, y para $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$,

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(u,t)du = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u,t)}\right) du = \\ &= \int_a^b -\frac{2\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle}{2\sqrt{\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle}}(u,t)du = \int_a^b \frac{1}{\|\alpha_t'(u)\|} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle (u,t)du, \end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle\right) = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle,$$

y despejando y sustituyendo se obtiene el resultado.

Primera fórmula de variación del arco: Si $\alpha : [a,b] \to S$ es un segmento de curva regular p.p.a. con $a < b$ y ϕ es una variación de α con campo variacional Z,

$$L'(0) = \langle Z(b), \alpha'(b) \rangle - \langle Z(a), \alpha'(a) \rangle - \int_a^b \left\langle Z, \frac{D\alpha'}{ds} \right\rangle,$$

por lo que si además la variación es propia o normal,

$$L'(0) = -\int_a^b \left\langle Z, \frac{D\alpha'}{ds} \right\rangle.$$

Demostración: Usando la fórmula anterior y que $\|\alpha'\| \equiv 1$,

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \left(\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} \right\rangle \right) (s,0) ds \\ &= \left[\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle (s,0) \right]_{s=a}^b - \int_a^b \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} \right\rangle (s,0) ds \\ &= [\langle Z(s), \alpha'(s) \rangle]_{s=a}^b - \int_a^b \langle Z, \alpha'' \rangle (s,0) ds, \end{aligned}$$

pero como, para $s \in [a,b]$, $Z(s) \in T_{\alpha(s)}S$, $\langle Z(s), \alpha''(s) \rangle = \langle Z(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \rangle$.

Caracterización variaciones de las geodésicas: Si $\alpha : [a,b] \to S$ es un segmento de curva regular p.p.a., α es un segmento de geodésica si y sólo si $L'(0) = 0$ para toda variación propia de α, si y sólo si $L'(0) = 0$ para toda variación normal de α.

$1 \implies 2, 3]$ Como $\frac{D\alpha'}{ds} \equiv 0$, por la primera fórmula de variación del arco para variaciones propias o normales, para todas estas variaciones es $L'(0) = 0$.

$2, 3 \implies 1]$ Suponemos que α no es geodésica y encontramos una variación normal y propia con $L'(0) \neq 0$. Como α no es geodésica, existe $s_0 \in [a,b]$ con $\frac{D\alpha'}{ds}(s_0) \neq 0$, y podemos suponer que $s_0 \in (a,b)$ ya que en otro caso habrá un $s \in (a,b)$ con $\frac{D\alpha'}{ds}(s_0) \neq 0$ por continuidad. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\left\| \frac{D\alpha'}{ds} \right\| > 0$ para todo $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Sea $Z : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ el campo tangente dado por $Z(s) := -(s^2 - s(a+b) + ab)\frac{D\alpha'}{ds}(s)$, si existe una variación $\phi : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ de α con campo variacional Z, ϕ sería normal porque, al ser $\langle \frac{D\alpha'}{ds}, \alpha' \rangle \equiv 0$, entonces $\langle Z, \alpha' \rangle \equiv 0$. Además, $f(s) := s^2 - s(a+b) + ab$ es una parábola que vale 0 en $s = a, b$, cuyo pico está en $s = \frac{a+b}{2}$ y que cumple que

$$f(\frac{a+b}{2}) = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{2} + ab = \frac{-(a+b)^2 + 4ab}{4} = \frac{-(a-b)^2}{4} \overset{a \neq b}{<} 0,$$

de modo que $f(s) < 0$ para todo $s \in (a,b)$ y

$$\begin{aligned} L'(0) = -\int_a^b \left\langle -f \frac{D\alpha'}{ds}, \frac{D\alpha'}{ds} \right\rangle = \int_a^b f \left\| \frac{D\alpha'}{ds} \right\| \leq \\ \leq \int_{s_0 - \delta}^{s_0 + \delta} f \left\| \frac{D\alpha'}{ds} \right\| = 2\delta f(\xi) \left\| \frac{D\alpha'}{ds}(\xi) \right\| < 0, \end{aligned}$$

donde $\xi \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ viene dado por el teorema del punto medio. Queda ver que tal variación existe y que, además de normal, es propia. Para $s \in [a,b]$, como $Z(s) \in T_{\alpha(s)}S$, existe una geodésica $\gamma_{Z(s)} : I_{Z(s)} \to S$, y como $0 \in I_{Z(s)}$, existe $\varepsilon_s > 0$ con $(-\varepsilon_s, \varepsilon_s) \subseteq I_{Z(s)}$. Por la forma en que se obtiene $\gamma_{Z(s)}$ y por el teorema de dependencia de una solución de una e.d.o. respecto a un parámetro[1], $s \mapsto \varepsilon_s$ es continua, de modo que por compacidad de $[a,b]$ existe $\varepsilon := \min_{s \in [a,b]} \varepsilon_s > 0$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I_{Z(s)}$ para todo $s \in [a,b]$ y podemos definir $\phi : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ como $\phi(s,t) := \gamma_{Z(s)}(t)$. Entonces ϕ es diferenciable por el mismo teorema de dependencia y su campo variacional es

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,0) = \frac{d}{dt}(\gamma_{Z(s)}(t))(0) = \gamma'_{Z(s)}(0) = Z(s).$$

[1]No recuerdo haber visto este teorema.

Finalmente, como $f(a) = f(b) = 0$, para todo t, $\phi(a,t) = \gamma_{Z(a)}(t) = \gamma_0(t) = \exp_{\alpha(a)}(0) = \alpha(a)$, y análogamente $\phi(b,t) = \alpha(b)$.

6.2. Segunda fórmula de variación del arco

Esta afirma que, si S es una superficie regular, $\gamma : [a,b] \to S$ es un segmento de geodésica p.p.a. y ϕ es una variación normal y propia de γ con campo variacional Z, entonces

$$L''(0) = \int_a^b \left(\left\| \frac{DZ}{ds}(s) \right\|^2 - K(\gamma(s)) \|Z(s)\|^2 \right) ds = -\int_a^b \left\langle \frac{D^2 Z}{ds^2}(s) + K(\gamma(s)) Z(s), Z(s) \right\rangle ds,$$

donde

$$\frac{D^2 Z}{ds^2}(s) = \frac{D}{ds}\left(\frac{DZ}{ds}\right)(s)$$

y K es la curvatura de Gauss de S.

Dado un segmento de geodésica $\gamma : [a,b] \to S$ con $K \circ \gamma \leq 0$, toda variación de γ normal y propia con campo variacional no paralelo de cumple $L''(0) > 0$, por lo que en una superficie llana todo segmento de geodésica de S es un mínimo del funcional longitud de arco.

Demostración: Sea ϕ el campo variacional, por la segunda fórmula de variación,

$$L''(0) = \int_a^b \left(\left\| \frac{DZ}{ds}(s) \right\|^2 - K(\gamma(s)) \|Z(s)\|^2 \right) ds \overset{K\circ\gamma\leq 0}{\geq} \int_a^b \left\| \frac{DZ}{ds}(s) \right\|^2 ds \geq 0,$$

pero si $L''(0) = 0$, entonces $\left\| \frac{DZ}{ds} \right\|^2 \equiv 0$, $\frac{DZ}{ds} \equiv 0$ y Z es paralelo a lo largo de γ, luego en este caso $L''(0) > 0$.

Capítulo 7

Integración en superficies

Una **región** de una superficie regular S es un $R \subseteq S$ abierto, conexo y **relativamente compacto**, es decir, con clausura compacta. Si existe una parametrización (U, X) de S con $R \subseteq X(U)$ y $f : R \to \mathbb{R}$ es continua, la **integral** de f sobre R es

$$\int_R f\, dS = \iint_{X^{-1}(R)} (f \circ X) \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| = \iint_{X^{-1}(R)} (f \circ X)\sqrt{EG - F^2}.$$

Esta no depende de la parametrización. **Demostración:** Sean (U, X) y $(\overline{U}, \overline{X})$ parametrizaciones de S con $R \subseteq X(U) \cap \overline{X}(\overline{U})$, $h := \overline{X}^{-1} \circ X$ la reparametrización y $h(u, v) =: (\overline{u}(u, v), \overline{v}(u, v))$, de modo que $X = \overline{X} \circ h$, entonces

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial v},$$

con las derivadas de $\overline{X}$ evaluadas en $h(u, v)$ y el resto en (u, v), luego

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right) = \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} + \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}} \wedge \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}} \right),$$

pero $\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = \det(Jh)$, luego

$$\begin{aligned} \iint_{X^{-1}(R)} (f \circ X) \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| &= \iint_{X^{-1}(R)} (f \circ X) |\det(Jh)| \left\| \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}} \wedge \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}} \right\| = \\ &= \iint_{h(X^{-1}(R)) = \overline{X}^{-1}(R)} (f \circ X) \left\| \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}} \wedge \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}} \right\|. \end{aligned}$$

El **área** de una región R contenida en la imagen de una parametrización de S es

$$A(R) := \int_R dS.$$

Si R no está contenida en la imagen de una parametrización, es posible extender las definiciones de área y de integral de una función con soporte compacto sobre R usando particiones diferenciables de la unidad.

Dada una función $\phi : S_1 \to S_2$ entre superficies regulares, definimos $\det(d\phi) : S_1 \to \mathbb{R}$ como $\det(d\phi)(p) := \det(J\phi_p)$. El **soporte** de una función $f : D \to \mathbb{R}$ es $\text{sop} f := \overline{\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}}$.

Teorema del cambio de variable: Si $\phi : S_1 \to S_2$ es un difeomorfismo entre superficies regulares conexas y orientadas y $f : S_2 \to \mathbb{R}$ es continua con soporte compacto, entonces

$$\int_{S_2} f\, dS_2 = \int_{S_1} (f \circ \phi)|\det(d\phi)| dS_1 = \pm \int_{S_1} (f \circ \phi) \det(d\phi) dS_1.$$

Demostración cuando una sola parametrización cubre toda la superficie**:** Sea (U, X) una parametrización de S_1 y $(U, \overline{X} := \phi \circ X)$ una parametrización de S_2, entonces

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial u} = d\phi_{X(u,v)} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \qquad \frac{\partial \overline{X}}{\partial v} = d\phi_{X(u,v)} \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right),$$

luego

$$\left\| \frac{\partial \overline{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overline{X}}{\partial v} \right\| = \left\| J\phi_{X(u,v)} \frac{\partial X}{\partial u} \wedge J\phi_{X(u,v)} \frac{\partial X}{\partial v} \right\| = |J\theta_{X(u,v)}| \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} f\, dS_2 &= \iint_{\overline{X}^{-1}(S_2)} (f \circ \overline{X}) \left\| \frac{\partial \overline{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overline{X}}{\partial v} \right\| \\
&= \iint_{X^{-1}(\phi^{-1}(S_2))} (f \circ \overline{X}) |\det(d\phi_X)| \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| \\
&= \iint_{X^{-1}(S_1)} (f \circ \phi \circ X) |\det(d\phi_X)| \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| = \int_{S_1} (f \circ \phi) |\det(d\phi)| dS_2.
\end{aligned}$$

Para la última igualdad, como ϕ es un difeomorfismo, $\det(d\phi_{X(u,v)})$ no se anula y no cambia de signo.

Como **teorema**, si S es una superficie regular orientada por $N : S \to \mathbb{S}^2$, $p \in S$ cumple $K(p) \neq 0$ y R es una región de S con $p \in R$ tal que $N : R \to N(R)$ es un difeomorfismo, entonces el área de $N(R) \subseteq \mathbb{S}^2$ es

$$A(N(R)) = \int_R |K| dS,$$

y

$$|K(p)| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(N(B(p, \varepsilon)))}{A(B(p, \varepsilon))}.$$

Demostración: Por el teorema del cambio de variable para $f(p) \equiv 1$, como $\det(dN_p) = -\det(dA_p) = -K(p)$,

$$A(N(R)) = \int_{N(R)} d\mathbb{S}^2 = \int_R |\det(dN_p)| dS = \int_R |K| dS.$$

Ahora bien, por continuidad, $K \neq 0$ en un entorno V de p, luego $\det(dN_q) \neq 0$ para $q \in V$, $N|_V$ es un difeomorfismo y existe un ε_0 tal que, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $B(p, \varepsilon) \subseteq V$ y por tanto

$$A(N(B(p, \varepsilon))) = \int_{B(p,\varepsilon)} |K| dS = |K(p_\varepsilon)| \int_{B(p,\varepsilon)} dS = |K(p_\varepsilon)| A(B(p, \varepsilon)),$$

donde $p_\varepsilon \in B(p, \varepsilon)$ se obtiene del teorema del punto medio. Despejando $|K(p_\varepsilon)|$ y tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$ se obtiene el resultado.

Capítulo 8

Variaciones del área

Una superficie regular S es **minimal** si su curvatura media $H \equiv 0$. Entonces, para $p \in S$, $K(p) \leq 0$, con igualdad si y sólo si p es **totalmente geodésico**, es decir, $A_p = 0$. En efecto, por el vídeo de 3Blue1Brown[1], las curvaturas principales de S en p son $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}\} = \{\pm\sqrt{-K(p)}\}$, pero A_p es autoadjunto y por tanto diagonalizable en $\mathbb{R}$, luego $\sqrt{-K(p)} \in \mathbb{R}$ y $K(p) \leq 0$, y $K(p) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \iff A_p = 0$.

Toda superficie compacta tiene un punto esférico, por lo que no existen superficies minimales compactas.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular y (U, X) una parametrización de S, una **variación** de X es una función diferenciable $\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ tal que, llamando $\Phi_t(q) := \Phi(q, t)$, $\Phi_0 = X$ y, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, (U, Φ_t) es una parametrización. Para $((u, v), t) \in U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v}\right)(u, v) \neq 0,$$

pues $(d\Phi_t)_{(u,v)}$ es un isomorfismo lineal.

El **campo variacional** de X es $\xi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\xi(u, v) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u, v, 0).$$

Dada una parametrización (U, X) y $\varphi : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, la **variación normal de** X **determinada por** φ es una variación $\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u, v, t) = X(u, v) + t\varphi(u, v)N(X(u, v)),$$

donde

$$N(X(u, v)) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\right\|}(u, v)$$

y $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que cada Φ_t sea una parametrización. Si φ tiene soporte compacto, dicho ε existe.

[1] *A quick trick for computing eigenvalues* (`https://www.youtube.com/watch?v=e50Bj7jn9IQ`). También puedes usar la forma tradicional si quieres, pero perderías la oportunidad de usar el minuto 4:48.

Sean R una región de S, (U,X) una parametrización de S con $\overline{R}\subseteq X(U)$, $\Phi:U\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$ una variación de X y $A(t):=A(R_t):=A(\Phi_t(X^{-1}(R)))$, entonces A es diferenciable en un entorno de $t=0$ con

$$A'(t)=\iint_{X^{-1}(R)}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial\Phi_t}{\partial u}\wedge\frac{\partial\Phi_t}{\partial v}\right\|(u,v)\,du\,dv.$$

Primera fórmula de variación del área: En estas condiciones, si Φ es la variación normal de X dada por cierta $\varphi:U\to\mathbb{R}$, entonces

$$A'(0)=-2\int_R(\varphi\circ X^{-1})H\,dS.$$

Como **teorema**, una superficie regular S es minimal si y sólo si para toda parametrización (U,X) de S, región R de S con $\overline{R}\subseteq X(U)$ y variación normal de X es $A'(0)=0$.

$\Longrightarrow]$ $H\equiv 0$ y, por la primera fórmula de variación del área, $A'(0)=0$.

$\Longleftarrow]$ Demostramos el contrarrecíproco. Si S no es minimal, sea $p_0\in S$ con $H(p_0)\neq 0$, si $H(p_0)>0$, existe un $V\in\mathcal{E}(p_0)$ con $H(V)>0$ y, dada una parametrización (U,X) con $X(U)\subseteq V$, existe una bola cerrada $\overline{R}\subseteq X(U)$ cuyo interior R es una región, de modo que llamando $\varphi:=H\circ X:R\to\mathbb{R}$, como $\varphi\circ X^{-1}=H$,

$$A'(0)=-2\int_R H^2dS<0\#.$$

Para $H(p_0)<0$ es análogo.

Capítulo 9

Teorema de Gauss-Bonnet

9.1. Teorema de Liouville

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ diferenciables con $f^2 + g^2 \equiv 1$, $t_0 \in I$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ con $f(t_0) = \cos\theta_0$ y $g(t_0) = \sin\theta_0$, entonces existe una única función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ con $\theta(t_0) = \theta_0$ y, para todo $t \in I$, $f(t) = \cos\theta(t)$ y $g(t) = \sin\theta(t)$. **Demostración:** Sea

$$\theta(t) := \theta_0 + \int_{t_0}^{t} (f(u)g'(u) - f'(u)g(u))du,$$

θ es derivable una vez por el teorema fundamental del cálculo y su derivada es $\mathcal{C}^\infty$, por lo que θ es diferenciable. Sea $h : I \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) := (f(t) - \cos\theta(t))^2 + (g(t) - \sin\theta(t))^2$, entonces $h(t_0) = 0$ y

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}h' =&(f - \cos\theta)(f' + \theta'\sin\theta) + (g - \sin\theta)(g' - \theta'\cos\theta) \\
=&(f - \cos\theta)(f' + (fg' - f'g)\sin\theta) + (g - \sin\theta)(g' - (fg' - f'g)\cos\theta) \\
=&ff' + f(fg' - f'g)\sin\theta - f'\cos\theta - (fg' - f'g)\sin\theta\cos\theta + \\
&+ gg' - g'\sin\theta - g(fg' - f'g)\cos\theta + (fg' - f'g)\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}$$

pero derivando $f^2 + g^2 = 1$ queda $2ff' + 2gg' = 0$, $ff' + gg' = 0$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}h(t) &= (f(fg' - f'g) - g')\sin\theta + (-f' - g(fg' - f'g))\cos\theta \\
&= (g'(f^2 - 1) - ff'g)\sin\theta + (f'(-1 + g^2) - fgg')\cos\theta \\
&= (g^2g' - ff'g)\sin\theta + (f^2f' - fgg')\cos\theta \\
&= g(gg' - ff')\sin\theta + f(ff' - gg')\cos\theta = 0.
\end{aligned}$$

Para la unicidad, sea $\hat{\theta}$ otra función que cumple las condiciones, $\hat{\theta}$ se diferencia de θ en cada punto en un múltiplo de 2π, pero como $\hat{\theta} - \theta$ es continua con dominio conexo, su rango debe ser conexo y estar en la componente conexa de $\{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en la que está $(\hat{\theta} - \theta)(t_0) = 0$, que es $\{0\}$, luego $\hat{\theta} = \theta$.

Sean S una superficie regular orientada por N y $\alpha : I \to S$ una curva regular, $e_1, e_2, V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ unitarios con $e_2(t) = Je_1(t) = N(\alpha(t)) \wedge e_1(t)$ para todo $t \in I$, entonces $(e_1(t), e_2(t))$ es una base ortonormal de $T_{\alpha(t)}S$ y existe $\theta(t)$ diferenciable tal que $V = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, y decimos que θ es el **ángulo de rotación** de V respecto a e_1.

La curvatura geodésica de α (no necesariamente p.p.a.) es

$$\kappa_g^\alpha(s) = \frac{\langle \alpha''(u), J\alpha'(u)\rangle}{\|\alpha'(u)\|^3}.$$

Teorema de Liouville: Sean (U, X) una parametrización ortogonal de S con primera forma fundamental E, F, G, $\alpha : I \to X(U)$ una curva regular p.p.a. con curvatura geodésica κ_g, $\tilde{\alpha} := (u, v) := X^{-1} \circ \alpha : I \to U$, $e_1 : I \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$e_1(s) := \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} X_u(\tilde{\alpha}(s)),$$

$\theta : I \to \mathbb{R}$ el ángulo de rotación de α' respecto a e_1, $\alpha_v(u) := \beta_u(v) := X(u, v)$, $(\kappa_g)_1(u, v)$ la curvatura geodésica de α_v en u y $(\kappa_g)_2(u, v)$ la de β_u en v, entonces

$$\kappa_g = \theta' + \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v(\tilde{\alpha}) + v'G_u(\tilde{\alpha})) = \theta' + (\kappa_g)_1(\tilde{\alpha})\cos\theta + (\kappa_g)_2(\tilde{\alpha})\sin\theta.$$

Demostración: En efecto, e_1 es tangente y unitario, ya que

$$e_1(s) = \frac{X_u}{\|X_u\|}(\tilde{\alpha}(s)).$$

Entonces $e_2(s) := Je_1(s)$ es también tangente y unitario y ortogonal a $\frac{\partial X}{\partial u}$, luego

$$e_2(s) = \frac{X_v}{\|X_v\|}(\tilde{\alpha}(s)) = \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{\alpha}(s))}} X_v(\tilde{\alpha}(s)).$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{De_1}{ds}, e_1 \right\rangle &= \langle e_1', e_1\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\langle e_1, e_1\rangle = 0,\\
\left\langle \frac{De_1}{ds}, e_2 \right\rangle &= \langle e_1', e_2\rangle = \frac{d}{ds}\langle e_1, e_2\rangle - \langle e_1, e_2'\rangle = -\langle e_1, e_2'\rangle = -\left\langle \frac{De_2}{ds}, e_1 \right\rangle,\\
\left\langle \frac{De_2}{ds}, e_2 \right\rangle &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\langle e_2, e_2\rangle = 0,
\end{aligned}$$

luego si $\omega := \langle e_1', e_2\rangle = -\langle e_1, e_2'\rangle$

$$\frac{De_1}{ds}(s) = \left\langle \frac{De_1}{ds}, e_1 \right\rangle e_1 + \left\langle \frac{De_2}{ds}, e_2 \right\rangle e_2 = \omega(s)e_2(s), \qquad \frac{De_2}{ds}(s) = -\omega(s)e_1(s).$$

Por tanto, como $\alpha' = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$,

$$\begin{aligned}
\frac{D\alpha'}{ds} &= -\theta'\sin\theta e_1 + \cos\theta\omega e_2 + \theta'\cos\theta e_2 - \sin\theta\omega e_1 = (\theta' + \omega)(\cos\theta e_2 - \sin\theta e_1)\\
&= (\theta' + \omega)J\alpha'(s).
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\frac{D\alpha'}{ds}(s) = \kappa_g(s)J\alpha'(s)$, luego $\kappa_g(s) = \theta'(s) + \omega(s)$. Derivando la fórmula de e_1,

$$e_1' = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)X_u(\tilde{\alpha}) + \frac{1}{\sqrt{E}}\left(u'X_{uu}(\tilde{\alpha}) + v'X_{uv}(\tilde{\alpha})\right).$$

Entonces, como $X_{uu}(\tilde{\alpha}) = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN$ y $X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN$,

$$\begin{aligned}\omega = \langle e_1', e_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\langle u'(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + v'(\Gamma_{12}^2 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN), X_v\right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}}(u'\Gamma_{11}^2 G + v'\Gamma_{12}^2 G),\end{aligned}$$

pero como

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-F\frac{E_u}{2} + EF_u - E\frac{E_v}{2}}{EG - F^2} = -\frac{E\frac{E_v}{2}}{EG} = -\frac{E_v}{2G}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{-F\frac{E_v}{2} + E\frac{G_u}{2}}{EG - F^2} = \frac{E\frac{G_u}{2}}{EG} = \frac{G_u}{2G},$$

queda

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v + v'G_u),$$

la primera expresión. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\alpha_v'(u) &= X_u, & J\alpha_v'(u) &= N \wedge X_u = \|X_u\|\frac{X_v}{\|X_v\|} = \sqrt{\frac{E}{G}}X_v, & \alpha_v''(u) &= X_{uu}, \\ \beta_u'(v) &= X_v, & J\beta_u'(v) &= N \wedge X_v = -\|X_v\|\frac{X_u}{\|X_u\|} = -\sqrt{\frac{G}{E}}X_u, & \beta_u''(v) &= X_{vv},\end{aligned}$$

y como

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{G(F_v - \frac{G_u}{2}) - F\frac{G_v}{2}}{EG - F^2} = \frac{-G\frac{G_u}{2}}{EG} = -\frac{G_u}{2E},$$

queda

$$\begin{aligned}(\kappa_g)_1(u,v) &= \frac{\langle \alpha_v''(u), J\alpha_v'(u)\rangle}{\|\alpha_v'(u)\|^3} = \frac{\langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \sqrt{\frac{E}{G}}X_v\rangle}{\|X_u\|^3} = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\Gamma_{11}^2 G}{E\sqrt{E}} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \\ (\kappa_g)_2(u,v) &= \frac{\langle \beta_u''(v), J\beta_u'(v)\rangle}{\|\beta_u'(v)\|^3} = \frac{\langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, -\sqrt{\frac{G}{E}}X_u\rangle}{\|X_v\|^3} = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\Gamma_{22}^1 E}{G\sqrt{G}} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.\end{aligned}$$

Con esto, $E_v = -2E\sqrt{G}(\kappa_g)_1$ y $G_u = 2G\sqrt{E}(\kappa_g)_2$, luego

$$\kappa_g = \theta' + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(u'2E\sqrt{G}(\kappa_g)_1 + v'2G\sqrt{E}(\kappa_g)_2\right) = \theta' + u'\sqrt{E}(\kappa_g)_1 + \sqrt{G}v'(\kappa_g)_2,$$

y queda ver que $u'\sqrt{E} = \cos\theta$ y $v'\sqrt{G} = \sin\theta$, pero

$$\begin{aligned}\alpha' &= (X \circ \tilde{\alpha})' = u'X_u + v'X_v \\ &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 = \cos\theta\frac{1}{\sqrt{E}}X_u + \sin\theta\frac{1}{\sqrt{G}}X_v,\end{aligned}$$

y usando que (X_u, X_v) es base despejamos y se obtiene el resultado.

9.2. Teorema de rotación de las tangentes

Sea S una superficie regular, un **polígono curvado** es la imagen Γ de un segmento de curva $\alpha : [0, \ell] \to S$ regular a trozos p.p.a. (en cada trozo) **cerrado** ($\alpha(0) = \alpha(\ell)$) y **simple** ($\forall s, s' \in [0, \ell], (\alpha(s) = \alpha(s') \implies s = s' \vee \{s, s'\} = \{0, \ell\})$). Si Γ es la frontera de una región R de S simplemente conexa, α está **positivamente orientada** si, para $s \in [0, \ell]$ que no sea un vértice, $J\alpha'(s)$ apunta al interior de R ($\exists \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta), \alpha(s) + tJ\alpha'(s) \in R$).

Sea $0 = s_0 < \dots < s_k = \ell$ una partición en la que los $\alpha(s_i)$ con $i \in \{1, \dots, k-1\}$ son los vértices de α, la **velocidad que llega** a un vértice $\alpha(s_i)$ es $\alpha'_-(s_i)$, que en $\alpha(\ell)$ es $\alpha'_-(\ell) \coloneqq \lim_{s \to \ell^-} \alpha'(s)$, y la **velocidad que sale** es $\alpha'_+(s_i)$, que en $\alpha(0)$ es $\alpha'_+(0) = \lim_{s \to 0^+} \alpha'(s)$. El **ángulo exterior** en un $\alpha(s_i)$ es el único $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que

$$\alpha'_+(s_i) = \cos\theta \alpha'_-(s_i) = \sin\theta J\alpha'_-(s_i),$$

que en $\alpha(0) = \alpha(\ell)$ es el que cumple $\alpha'_+(0) = \cos\theta\alpha'_-(\ell) + \sin\theta J\alpha'_-(\ell)$.

Teorema de rotación de las tangentes: Sean (U, X) una parametrización ortogonal de una superficie S, $\alpha : [0, \ell] \to X(U)$ una parametrización positivamente orientada de la frontera Γ de una región R de S, $0 = s_0 < \dots < s_k = \ell$ una partición en la que los $\alpha(s_i)$ son los vértices de α, ε_i el ángulo exterior de $\alpha(s_i)$ y θ_i el ángulo de rotación de la velocidad de $\alpha_i \coloneqq \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$ respecto a $e_1(s) \coloneqq X_u(X^{-1}(\alpha(s)))/\sqrt{E(s)}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 2\pi.$$

9.3. Teorema de Gauss-Bonnet

Teorema de Green: Sea $\tilde{\alpha} \coloneqq (u, v) : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ una parametrización positivamente orientada de la frontera de un $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ acotado y $P, Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ diferenciables,

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du\, dv = \int_{\partial\Omega} (P(\tilde{\alpha})u' + Q(\tilde{\alpha})v')ds \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \int_{s_{i-1}}^{s_i} (P(\tilde{\alpha})u' + Q(\tilde{\alpha})v')ds,$$

donde $0 = s_0 < \dots < s_k = \ell$ es una partición de $[0, \ell]$ tal que los $\alpha(s_i)$ son los vértices de α.

Versión local del teorema de Gauss-Bonnet: Sean (U, X) una parametrización ortogonal positiva de S, $\alpha : [0, \ell] \to X(U)$ una parametrización positivamente orientada de la frontera de una región R de S, $0 = s_0 < \dots < s_k = \ell$ una partición en la que los $\alpha(s_i)$ son los vértices de α y ε_i el ángulo exterior de $\alpha(s_i)$, entonces

$$\int_R K\, dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 2\pi.$$

TS

Si T es un complejo simplicial n-dimensional con i_k k-símplices para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, el **número** o **característica de Euler** de T es $\chi(T) \coloneqq i_0 - i_1 + \dots + (-1)^n i_n$. [...] El **número de Euler** [o **característica de Euler-Poincaré**] de un espacio triangulable X,

$\chi(X)$, es el de cualquier complejo simplicial cuyo poliedro es homeomorfo a X, y es un invariante topológico. [...]

El **género** de una superficie compacta M, o el número de **agujeros**, es

$$g(M) := \begin{cases} \frac{1}{2}(2-\chi(M)), & M \text{ orientable;} \\ 2-\chi(M), & M \text{ no orientable.} \end{cases}$$

Tenemos $g(\mathbb{S}^2) = 0$, [...] si $T_1, \ldots, T_n$ son toros, $g(T_1 \sharp \ldots \sharp T_n) = n$ [...].

Versión global del teorema de Gauss-Bonnet: Sean (U, X) una parametrización ortogonal positiva de una superficie orientada S, $R \subseteq X(U)$ una región de S cuya frontera es la unión disjunta de los **polígonos curvados** $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, $\alpha_i : [0, \ell_i] \to S$ una parametrización positivamente orientada de α_i y $\varepsilon_{i1}, \ldots, \varepsilon_{ik_i}$ los ángulos exteriores de los vértices de α_i (incluyendo $\alpha_i(0)$), entonces

$$\int_R K\, dS + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \kappa_g^{\alpha_i} ds + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \varepsilon_i = 2\pi \mathcal{X}(R),$$

siendo $\mathcal{X}(R)$ el número de Euler de R.