

Grafos y Optimización Discreta

Copyright © 2020 Juan Marín Noguera, juan.marinn@um.es.

Esta obra está bajo la licencia Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons (CC-BY-SA 4.0). Para ver una copia de esta licencia, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

Bibliografía:

- Manuel Andrés Pulido Cayuela (Universidad de Murcia). Apuntes de Grafos y Optimización Discreta.
- Pascual Fernández Hernández (Universidad de Murcia). Apuntes de Grafos y Optimización Discreta.
- Wikipedia, the Free Encyclopedia (<https://en.wikipedia.org/>). *Borůvka's algorithm*, *Christofides algorithm*.
- Richard C. Larson & Amadeo R. Odoni (1999). *Urban Operations Research*, chapter 6.4.4 (http://web.mit.edu/urban_or_book/www/book/chapter6/6.4.4.html).

Capítulo 1

Grafos

Un **grafo dirigido** es un par (V, A) formado por un conjunto de **vértices** o **nodos** V y un subconjunto $A \subseteq V \times V$ de **arcos**. Un **grafo no dirigido** es un par (V, E) definido de forma similar, pero $E \subseteq \{S \in \mathcal{P}(V) \mid |S| \in \{1, 2\}\}$ es un conjunto de **aristas** o **ejes**, que representamos como pares de elementos no ordenados. Podemos equiparar un grafo no dirigido (V, E) a uno dirigido $(V, \{(i, j) \in V \times V \mid \{i, j\} \in E\})$.

Dado un grafo $G = (V, E)$, ordenado o no, llamamos **orden** de G a $|V|$ y **tamaño** de G a $|E|$. Un **bucle** es un par en E de la forma (i, i) . Un **multigrafo** es un grafo en que el segundo elemento no es un conjunto sino un multiconjunto, en que puede aparecer el mismo elemento repetido un número finito de veces. Un grafo es **simple** si no tiene bucles, y es **finito** si tiene un número finito de nodos y aristas. Consideramos grafos no dirigidos finitos y simples.

Dados un grafo $G = (V, E)$ y $e := (i, j) \in E$, i y j son **vértices extremos** de e , e es **incidente** a i y j e i es **adyacente** a j .

1.1. Grafos y subgrafos

Un grafo $G = (V, E)$ es **completo** si $\forall i, j \in V, (i \neq j \implies (i, j) \in E)$, y es **bipartito** si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de V tal que $\forall e \in E, \exists a \in V_1, b \in V_2 : e = (a, b)$. Llamamos K_n al grafo completo de orden n , que tiene tamaño $\binom{n}{2}$, y $K_{n,m}$ al mayor grafo bipartito con partición $\{V_1, V_2\}$ del conjunto de nodos tal que $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$, que tiene tamaño nm .

El **grafo complementario** a G es

$$G^c := (V, E^c) := (V, \{S \in \mathcal{P}(V) \mid |S| = 2, S \notin E\}).$$

Un grafo $G' := (V', E')$ es un **subgrafo** de $G := (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Si además $V' = V$, G' es un **subgrafo generador** de G .

Llamamos **subgrafo** de G **inducido** por $V' \subseteq V$ a $G_{V'} := (V', E_{V'})$, donde $E_{V'} := \{S \in E \mid S \subseteq V'\}$, y V es **independiente** si $E_{V'} = \emptyset$. Dado un grafo $G = (V, E)$, si $V' \subseteq V$, llamamos $G - V'$ al subgrafo de G inducido por $V \setminus V'$, y si $E' \subseteq E$, llamamos $G - E'$ a $(V, E \setminus E')$. Si $v \in V$, $G - v := G - \{v\}$, y si $e \in E$, $G - e := G - \{e\}$.

Un **cliqué** de G es un subgrafo completo de G , y es **maximal** si no está contenido en otro cliqué de G .

Dos grafos $G := (V, E)$ y $G' := (V', E')$ son **isomorfos** si existe una biyección $\sigma : V \rightarrow V'$ tal que $\forall u, v \in V, ((u, v) \in E \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in E')$, en cuyo caso φ es un **isomorfismo de grafos**.

1.2. Grado de un nodo

Dado un grafo $G := (V, E)$, el **entorno** de $v \in V$, $N(v)$, es el conjunto de nodos adyacentes a v . Llamamos **grado** de v , $o(v)$, al número de ejes incidentes a v , más el número de bucles en v en grafos o multigrafos no simples para que los bucles «sumen 2 al grado». Así, en un grafo simple, $o(v) = |N(v)|$.

Un nodo v es **aislado** si $o(v) = 0$, y es **hoja** si $o(v) = 1$, en cuyo caso el único eje incidente a v es un **eje colgante**. Llamamos $\delta_G := \min_{v \in V} o(v)$ y $\Delta_G := \max_{v \in V} o(v)$. G es **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado, y **k -regular** si este grado es k .

La **secuencia de grados** de G es la secuencia formada por los grados de los vértices de G puestos en orden decreciente. Como **teorema**, la suma de los grados de los vértices es el doble del tamaño del grafo, pues

$$\sum_{v \in V} o(v) = \sum_{v \in V} |\{S \in E \mid v \in S\}| = \sum_{S \in E} |S| = 2|E|.$$

Si el grafo no es simple, es fácil ver que esto también se cumple. Así, todo grafo tiene un número par de nodos de grado impar, pues la suma de los grados es par.

1.3. Secuencias gráficas

Dada una secuencia de naturales S , una **subrealización** de S es un grafo $(\{1, \dots, n\}, E)$ tal que $o(i) \leq d_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, y el **índice crítico** de la subrealización es el mayor $h \in \{1, \dots, n+1\}$ tal que $\forall i < h, o(i) = d_i$. Una **secuencia gráfica** es una secuencia de enteros que es la secuencia de grados de algún grafo.

Teorema de Erdős y Gallai (1961): Una secuencia $S := (d_1, \dots, d_n)$ monótona decreciente de naturales es una secuencia gráfica si y sólo si $\sum_{i=1}^n d_i$ es par y para $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}.$$

En tal caso, el algoritmo 1 permite obtener un grafo con secuencia gráfica S .

\implies] Sea $G = (\{1, \dots, n\}, E)$ un grafo tal que $o(i) = d_i$ para todo i . Sabemos que la suma de los grados de los nodos es par. Por otro lado, la suma de los grados de los vértices $\{1, \dots, k\}$ es el doble del número de ejes en el subgrafo generado por $\{1, \dots, k\}$ más el número de vértices que conectan $\{1, \dots, k\}$ con $\{k+1, \dots, n\}$, pero a lo sumo hay $\binom{k}{2}$ ejes en el subgrafo generado y el número de ejes de $\{1, \dots, k\}$ que conectan con un $i > k$ no puede ser mayor a k ni a d_i , luego $\sum_{i=1}^k o(i) \leq 2\binom{k}{2} + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$.

\impliedby] Queremos ver que el algoritmo funciona en estas condiciones. La idea es que, en cada iteración del bucle interno, $o(h)$ aumenta al menos en 1, y que este tiene como invariante

Entrada: Secuencia gráfica $S = (d_1, \dots, d_n)$.

Salida: Grafo $G = (\{1, \dots, n\}, E)$ con $o(i) = d_i$ para cada i .

$E \leftarrow \emptyset$;

para $h \leftarrow 1$ **a** n **hacer**

mientras $o(h) < d_h$ **hacer**

si existe $i > h$ con $o(i) < d_i$ y $(h, i) \notin E$ **entonces**

 Añadir (h, i) a E ;

sinó, **si** existe $i < h$ con $(h, i) \notin E$ **entonces**

 Encontrar $u \in N(i) \setminus N(h)$;

 Añadir $(i, h), (h, u)$ a E y quitar (i, u) ;

si $d_h < o(h)$ **entonces**

 Encontrar $k > h$ con $o(k) < d_k$;

 Quitar (h, k) de E ;

sinó, **si** existe $k > h$ con $o(k) < h, d_k$ **entonces**

 Encontrar $i < h$ con $i \notin N(k)$ y $u \in N(i) \setminus N(h)$;

 Añadir $(h, u), (i, k)$ a E y quitar (u, i) ;

sinó

 Encontrar $i, j < h$ distintos no adyacentes;

 Encontrar $u \in N(i) \setminus N(h)$ y $w \in N(j) \setminus N(h)$ mayores que h ;

 Añadir $(i, j), (h, u)$ a E y quitar $(i, u), (j, w)$;

Algoritmo 1: Obtención de un grafo con una secuencia de grados determinada.

que para $i < h$ es $o(i) = d_i$ y que $\{h + 1, \dots, n\}$ es un conjunto de nodos independiente, con lo que el algoritmo va aumentando $o(h)$ hasta que llega a d_h , sin pasarse, y entonces pasa al siguiente h . Veamos los casos:

1. Si existe $i > h$ con $o(i) < d_i$ y $(h, i) \notin E$, basta añadir (h, i) .
2. Si existe $i < h$ con $(h, i) \notin E$, como $o(i) = d_i \geq d_h > o(h)$, existe $u \in N(i) \setminus N(h)$ ($u \neq h, i$), y añadir (i, h) y (h, u) y quitar (i, u) conserva los invariantes salvo que, al añadir 2 a $o(h)$, podría ser $o(h) = d_h + 1$. En tal caso, como $\sum_{i=1}^n d_i$ y $\sum_{i=1}^n o(i)$ son pares, $\sum_{i=1}^n (d_i - o(i))$ es par, y como $d_h - o(h) = -1$, existe un $k \neq h$ con $o(k) \neq d_k$, y será $o(k) < d_k$ y $k > h$. Si $(h, k) \notin E$ estaríamos en el caso (1) (no lo hemos quitado después), luego $(h, k) \in E$ y basta quitar (h, k) .
3. Si existe $k > h$ con $o(k) < h, d_k$, por ser $o(k) < h$ existe $i \in \{1, \dots, h\}$ con $(i, k) \notin E$. Si fuera $h = i$, como $o(k) < d_k$, estaríamos en el caso (1), luego $i < h$. Como $o(i) = d_i \geq d_h > o(h)$, existe $u \in N(i) \setminus N(h)$, $u \neq h$ ($u \neq i, k$), y basta añadir (h, u) e (i, k) y quitar (u, i) .
4. En otro caso, al no darse (3), para $k > h$, como $o(k) \leq h$ por ser $\{h + 1, \dots, n\}$ independiente y $o(k) \leq d_k$ por ser G una subrealización de S , $o(k) = \min\{h, d_k\}$, y al no darse (2) se tiene $1, \dots, h - 1 \in N(h)$. Afirmando que existen $i, j < h$ distintos y adyacentes. En efecto, si no existieran, el subgrafo generado por $\{1, \dots, h\}$ sería completo, luego los ejes adyacentes a los $i \in \{1, \dots, h\}$ serían los de K_h más lo que

conectan con los $j \in \{h + 1, \dots, n\}$ y

$$\sum_{i=1}^h o(i) = h(h-1) + \sum_{i=h+1}^n o(i) = h(h-1) + \sum_{i=h+1}^n \min\{h, d_i\} \geq \sum_{i=1}^h d_i,$$

de modo que $d_h = o(h)$ y no se estaría ejecutando el interior del bucle. Entonces, como $o(i) = d_i \geq d_h > o(h)$, existe $u \in N(i) \setminus N(h)$, $u \neq h$, y análogamente existe $w \in N(j) \setminus N(h)$, $w \neq h$, y necesariamente $u, w > h$ al no conectar con h . Entonces, independientemente de si $u = w$ o no, añadir (i, j) y (h, u) y eliminar (i, u) y (j, w) mantiene los invariantes.

Teorema de Havel (1955) y Hakimi (1962): Una secuencia $S = (d_1, \dots, d_n)$ decreciente de naturales con $n \geq 2$ y $d_1 \geq 1$ es una secuencia gráfica si y sólo si lo es el resultado de ordenar de forma decreciente la secuencia

$$S' := (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n).$$

\Leftarrow] Si G es un grafo con secuencia de grados S' , añadiendo a G un nodo y conectándolo a d_1 vértices con grados $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1$, se obtiene un grafo con secuencia de grados S .

\Rightarrow] Sea $G := (\{1, \dots, n\}, E)$ un grafo con $o(i) = d_i$ para cada i y tal que $\sum_{i \in N(1)} d_i$ es máximo entre los nodos que cumplen la propiedad. Entonces 1 es adyacente a nodos de grados d_2, \dots, d_{d_1+1} . En efecto, si esto no fuera cierto, existirían $i, j > 1$ tales que $1 \in N(j) \setminus N(i)$ y $d_i > d_j$, pero como $o(i) > o(j)$, existe un $k \in N(i) \setminus N(j)$, $k \neq j$, y $(V, (E \cup \{(1, i), (k, j)\}) \setminus \{(1, j), (k, i)\})$ es un grafo que cumple la propiedad y tiene mayor $\sum_{i \in N(1)} d_i \#$. Por tanto la secuencia de grados de $G - 1$ es la que resulta de ordenar S' .

Entrada: Secuencia $S = (d_1, \dots, d_n)$ decreciente de naturales.

Salida: Si S es o no una secuencia gráfica.

si $n = 0$ **entonces devolver** *sí*;

mientras $\sum_{i=1}^n d_i$ *es par* y $d_1 \in [1, n - 1]$ **hacer**

$S \leftarrow (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$;
 Ordenar S ;
 $n \leftarrow n - 1$;

devolver $d_1 = 0$;

Algoritmo 2: Algoritmo de Havel-Hakimi.

El **algoritmo de Havel-Hakimi** (algoritmo 2) permite determinar si una secuencia decreciente de naturales es gráfica.

1.4. Caminos y ciclos

Dado un grafo $G = (V, E)$, una secuencia de la forma

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{k-1} e_k v_k$$

con cada $v_i \in V$ y $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ es un **paseo** de v_0 a v_k , y normalmente lo representaremos como $v_0v_1 \cdots v_k$ o como $e_1e_2 \cdots e_k$. Entonces k es la **longitud** del paseo. Un paseo es **simple** si todos sus ejes son distintos y **cerrado** si $v_0 = v_k$. Un **circuito** es un paseo cerrado, un **camino** o **cadena** es un paseo en que

$$\forall i, j \in \{0, \dots, k\}, (i \neq j \wedge \{i, j\} \neq \{0, k\}) \implies v_i \neq v_j,$$

y un **ciclo** es un camino cerrado de longitud al menos 3.

Propiedades:

1. Todo paseo no trivial (de longitud no nula) entre dos vértices contiene un camino no trivial entre ellos. Por tanto todo paseo entre dos vértices contiene un camino entre ellos.

Sea $v_0e_1v_1 \cdots e_kv_k$ un paseo no trivial. Sea $p \in \{1, \dots, k\}$ mínimo con $v_p = v_k$, nos quedamos con $v_0e_1v_1 \cdots e_pv_p$. Entonces, si existen $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$ con $i < j$ y $v_i = v_j$, eliminamos $e_{i+1}v_{i+1} \cdots e_jv_j$ y repetimos hasta que esto no suceda. El resultado es claramente un camino, y es no trivial porque contiene al menos a e_p .

2. Todo paseo cerrado de longitud impar contiene un ciclo con el mismo inicio y fin que el paseo.

Al tener longitud impar es no trivial, y como no tiene longitud 1 por ser cerrado, su longitud es al menos 3. Sea $v_0v_1 \cdots v_{k-1}v_0$ su lista de vértices, si fuera $\{v_0, \dots, v_{k-1}\} = \{v_0, v_1\}$ el ciclo sería de la forma $v_0v_1 \cdots v_1v_0$ y su longitud sería par, luego existe $i \geq 2$ con $v_i \neq v_0, v_1$, que podemos tomar mínimo. Entonces los paseos $v_1 \cdots v_i$ y $v_i \cdots v_{k-1}v_0$ contienen caminos no triviales respectivos P y Q entre los mismos nodos, de modo que $(v_0, v_1)PQ$ es un ciclo.

1.5. Representaciones matriciales

Dado un grafo no dirigido $G := (\{1, \dots, n\}, E)$, la **matriz de adyacencia** de G es la matriz $(\chi_E(i, j))_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Como **teorema**, para todo natural k , $(A^k)_{ij}$ es el número de paseos de longitud k entre los vértices i y j . **Demostración:** Para $k = 0$, y para $k = 1$, esto es obvio. Sea $k > 1$ y supongamos esto probado para $k-1$. Entonces $(A^k)_{ij} = (AA^{k-1})_{ij} = \sum_{h=1}^n A_{ih}(A^{k-1})_{hj}$, que es la suma para h incidente a i del número de paseos de longitud $k-1$ de h a j , o lo que es lo mismo, el número de pasos de longitud k de i a j .

Si $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, la **matriz de incidencia** de G es $(\chi_{e_j}(i))_{ij} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{Z})$.

Capítulo 2

Conectividad

Dado un grafo $G = (V, E)$, $u, v \in V$ están **conectados** si existe un camino de u a v . G es **conexo** si todo par de vértices de V está conectado y **disconexo** en otro caso. $V' \subseteq V$ es una **componente conexa** de G si es maximal con $G_{V'}$ conexo.

La pertenencia a una misma componente conexa es una relación de equivalencia, por lo que las componentes conexas particionan V y un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.

Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo de orden n y $u, v \in V$, una **geodésica** entre u y v es un paseo entre u y v de longitud mínima, llamada **distancia** entre u y v , $d(u, v)$. Este paseo será un camino, pues si no lo fuera contendría un camino de longitud estrictamente menor. El **diámetro** de G , $\text{diám}G$, es la máxima distancia entre dos vértices de G .

Si G es un grafo conexo de orden n y tamaño m , $m \geq n - 1$. **Demostración:** Sea $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$, para $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ existe una geodésica P_i de v_i a v_n no trivial que tendrá pues un primer eje e_i , y basta ver que los e_i son todos distintos. Pero para $i \neq j$, si $P_i = e_i a_1 \dots a_t$ y $P_j = e_j b_1 \dots b_s$, $a_1 \dots a_t$ es un camino de v_j a v_i y por tanto $t \geq s + 1$ (por ser P_j una geodésica) y $t > s$, y análogamente $s > t \#$.

Como **teorema**, un grafo G de orden al menos 3 es conexo si y sólo si contiene dos nodos $u \neq v$ tales que $G - u$ y $G - v$ son conexos.

\implies] Sean $u, v \in V$ con $d(u, v) = \text{diám}G$, y queremos ver que $G - u$ y $G - v$ son conexos. Sea P una geodésica en G entre $i \neq u$ y v , si P pasara por u sería $d(i, v) = d(i, u) + d(u, v) > d(u, v) = \text{diám}G \#$, luego P está en $G - u$, $G - u$ es conexo y $G - v$ también lo es por simetría.

\impliedby] Sean $i, j \in V$ con $i \neq j$, si $\{i, j\} \neq \{u, v\}$ entonces $i, j \neq u$ o $i, j \neq v$. Si, por ejemplo, $i, j \neq u$, i conecta con j en $G - u$ y por tanto en G , y si $i, j \neq v$ es análogo. Si $\{i, j\} = \{u, v\}$, sea $k \in V \setminus \{u, v\}$, i conecta con k y k con j y por tanto i conecta con j .

2.1. Recorrido de componentes conexas

Sean $G := (V, E)$ un grafo de orden n con matriz de adyacencia A y $\bar{A} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$, $i, j \in V$ están en la misma componente conexa si y sólo si $\bar{a}_{ij} > 0$.

- \implies] Como existe un camino de i a j , existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(A^p)_{ij} > 0$, y podemos tomar $p \leq n - 1$ porque la distancia máxima entre dos nodos es $n - 1$, dado que un camino mayor repetiría nodos. Entonces, como $(A^k)_{ij} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $\bar{a}_{ij} > 0$.
- \impliedby] Si $\bar{a}_{ij} > 0$, como $(A^k)_{ij} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ con $(A^p)_{ij} > 0$ y por tanto un camino de i a j .

La **búsqueda en anchura (BFS, *breadth-first search*)**, ideada 1945 por Konrad Zuse, consistente en visitar un nodo inicial, a continuación los nodos adyacentes a él, después todos los adyacentes a estos que no hayan sido ya explorados, etc.

La **búsqueda en profundidad (DFS, *depth-first-search*)** es otro algoritmo para explorar una componente conexa. En este, explorar un nodo consiste en visitarlo y explorar todos los nodos adyacentes a este que no hayan sido visitados previamente, de forma recursiva, y el algoritmo es explorar el nodo inicial.

2.2. Conjuntos separadores

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. $V' \subseteq V$ es un **conjunto separador de vértices** de G si $G - V'$ es desconexo, y un **conjunto k -separador** si además $|V'| = k$. Un **vértice de corte** de G es un $v \in V$ tal que $\{v\}$ es un conjunto separador de vértices de G . Como **teorema**:

1. Un $u \in V$ es un vértice de corte de G si y sólo si existen $v, w \in V \setminus \{u\}$ tales que cualquier camino de v a w pasa por u .

\implies] Si para todo $v, w \in V \setminus \{u\}$ existiera un camino de v a w que no pasa por u , v y w estarían conectados en $G - u$ y u no sería vértice de corte.

\impliedby] En $G - u$ no hay ningún camino de v a w , luego $G - u$ es desconexo y u es un vértice de corte.

2. Si $|V| \geq 2$, V contiene al menos dos vértices no de corte.

Si $|V| = 2$ esto es claro, y si $|V| \geq 3$, existen $u, v \in V$, $u \neq v$, tales que $G - u$ y $G - v$ son conexos.

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, si $V' \subsetneq V$ es no vacío, llamamos **cociclo** o **corte** de G asociado a V' , $\omega_G(V')$ o $[V', V \setminus V']$, al conjunto de ejes de E incidentes a un vértice de V' y a otro de $V \setminus V'$. Un corte de cardinal k es un **k -corte**. Un **eje de corte** de G es un $e \in E$ tal que $\{e\}$ es un corte de G .

$E' \subseteq E$ es un **conjunto separador de ejes** si $G - E'$ es desconexo, y $e \in E$ es un **punteo** de G si $\{e\}$ es un conjunto separador de vértices de G . Propiedades:

1. Todo corte es un conjunto separador de ejes. El recíproco no es cierto.

Si $E' = [V_1, V_2]$, todo camino de un $u \in V_1$ a un $v \in V_2$ contiene un eje que pasa de V_1 a V_2 , que estará en E' , luego $G - E'$ es desconexo.

2. Todo conjunto separador de ejes contiene un corte.

Sean E' un conjunto separador de ejes y $V' \subsetneq V$ una componente conexa de $G - E'$, ningún $(u, v) \in E \setminus E'$ está en $[V', V \setminus V']$ porque de estarlo, si por ejemplo $u \in V'$ y $v \notin V'$, u y v estarían en la misma componente conexa y V' no sería conexo maximal, luego $E \setminus E' \subseteq E \setminus [V', V \setminus V']$ y $[V', V \setminus V'] \subseteq E'$.

3. Un eje es un puente si y sólo si es un eje de corte.

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Un corte X de G es **minimal** si no existe un corte $Y \subsetneq X$ de G . Un **corte mínimo** de G es un corte de G de cardinal mínimo. Si X es un corte minimal de G , $G - X$ tiene exactamente dos componentes conexas. **Demostración:** Si $X =: [V', V \setminus V']$ y $G - X$ tiene $h \geq 3$ componentes conexas V_1, \dots, V_h , al menos $G_{V'}$ o $G_{V \setminus V'}$ tiene más de una componente conexa. Si, por ejemplo, $V' = V_1 \cup \dots \cup V_t$ con $t \in \{2, \dots, h-1\}$, $Y := [V_1, V \setminus V_1]$ es un corte contenido estrictamente en X , pues todo eje de Y irá de $V_1 \subseteq V'$ a $V \setminus V'$ y, sin embargo, existen $u \in V_2$ y $v \in V \setminus V'$ con $(u, v) \in E$, de modo que $(u, v) \in X \setminus Y$, pues de lo contrario, como V_2 no conecta con $V_1, V_3, V_4, \dots, V_t$ ni con V' , V_2 sería una componente conexa de G , pero G es conexo. #

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, $e \in E$ es un puente de G si y sólo si existen $u, v \in V$ tales que todo camino de u a v en G pasa por e , si y sólo si e no pertenece a ningún ciclo de G . En particular, en un grafo conexo sin ciclos, cada eje es un puente.

1 \implies 2] Sean $[V_1, V_2] := \{e\}$, $u \in V_1$ y $v \in V_2$, todo camino de u a v debe pasar por un eje que conecte V_1 a V_2 , que será e .

2 \implies 3] Sea $e =: (u, v)$, si hubiera un ciclo que contiene a e , que podemos suponer de la forma $e_1 \dots e_s e$ siendo $e_1 \dots e_s$ un camino de u a v , $e_1, \dots, e_s \neq e$, pero entonces todo par de vértices se podría conectar por un paseo que no pase por e tomando un paseo arbitrario que los una y cambiando e por $e_1 \dots e_s$ o por $e_s \dots e_1$ #.

3 \implies 1] Sea $e =: (u, v)$, si $G - e$ fuera conexo, existiría un camino P de u a v en $G - e$ y por tanto Pe sería un ciclo que contiene a e .

2.3. Conectividad en grafos

Sea G un grafo no vacío, la **conectividad** de G , $\kappa(G)$, es el mínimo número de nodos que hay que quitar de G para que sea desconexo o trivial (de orden 1). Así, si G es desconexo o trivial, $\kappa(G) = 0$, y si es completo de orden n , $\kappa(G) = n - 1$. G es **k -conexo** si $\kappa(G) \geq k$.

La **conectividad por ejes** de G , $\lambda(G)$, es el menor número de ejes que hay que eliminar de G para que sea desconexo o trivial, de modo que si G es desconexo o trivial es $\lambda(G) = 0$ y si es conexo y tiene un puente es $\lambda(G) = 1$. G es **k -conexo por ejes** si $\lambda(G) \geq k$.

Como **teorema**, si G es un grafo no vacío, $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. **Demostración:** Si v es un nodo con $\delta(v) = \delta(G)$, quitando los $\delta(v)$ ejes adyacentes a v , G queda desconexo, luego $\lambda(G) \leq \delta(G)$. Si G es desconexo o trivial, $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$. En otro caso, sean n el orden de G , X un corte mínimo de G , V_1 y V_2 las dos componentes conexas de $G - X$ y $q := |V_1|$. Si en G todo vértice de V_1 es adyacente a todo vértice de V_2 , $|X| = q(n - q)$, luego

$$|X| - (n - 1) = qn - q^2 - n + 1 = n(q - 1) - (q + 1)(q - 1) = (q - 1)(n - q - 1) \geq 0,$$

pues $1 \leq q \leq n - 1$, luego $q \geq n - 1$ y, como $|X|$ es mínimo, $\lambda(G) \geq n - 1$, pero quitando $n - 1$ vértices queda un grafo trivial y por tanto $\kappa(G) \leq n - 1$, luego $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. De lo contrario existen $u \in V_1$ y $v \in V_2$ no adyacentes, y llamando V' a un conjunto de nodos resultante de elegir para cada $e \in X$ uno de los nodos adyacentes a e distinto de u y de v , $|V'| \leq |X| = \lambda(G)$ y, en $G - V'$, u y v no están conectados, pues en todo camino de u a v en G hay un eje que va de V_1 a V_2 , el cual hemos quitado al eliminar uno de los nodos adyacentes, por lo que $\kappa(G) \leq |V'| \leq \lambda(G)$.

2.4. Teorema de Menger

Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$, $S \subseteq V$ **separa** a u y v si $G - S$ es desconexo y u y v pertenecen a distintas componentes conexas. Los caminos P_1, \dots, P_h de u a v son **internamente disjuntos** si, para $i \neq j$, P_i y P_j tienen a u y a v como únicos vértices en común.

Teorema de Menger: si u y v no son adyacentes, el cardinal de un conjunto de menor tamaño que separa u y v coincide con el máximo número de caminos entre u y v internamente disjuntos.

Teorema de Whitney: G es k -conexo si y sólo si para $u, v \in V$ distintos hay al menos k caminos internamente disjuntos entre u y v .

\implies] Si $G \cong K_n$, $\kappa(G) = n - 1$ y estos $n - 1$ caminos son uv y uiv para $i \neq u, v$. En otro caso G no es completo. Si u y v no son adyacentes, sea U el conjunto de menor tamaño que separa u y v , como $G - U$ es desconexo, $|U| \geq k$, y por el teorema de Menger hay k caminos internamente disjuntos entre u y v . Si $e := (u, v) \in E$, como G es k -conexo, $G - e$ es $k - 1$ conexo, luego existen al menos $k - 1$ caminos internamente disjuntos entre u y v en $G - e$ y, por tanto, existen k caminos internamente disjuntos entre u y v en G añadiendo el camino uv .

\impliedby] Sean S un conjunto separador de vértices de tamaño mínimo y u y v en distintas componentes conexas de $G - S$, como hay al menos k caminos internamente disjuntos entre u y v , por el teorema de Menger $|S| \geq k$.

2.5. Teorema de Menger para ejes

Dado un grafo $G = (V, E)$, el **grafo en línea** de G es $L(G) := (V^L, E^L)$ dado por $V^L := E$ y $E^L := \{(e, f) \mid e \neq f, e \cap f \neq \emptyset\}$.

Teorema de Menger para ejes: Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$, el cardinal mínimo de un conjunto separador de ejes que separa u y v es el máximo número de caminos de u a v en G sin ejes comunes.

Demostración: Sean $x, y \notin \mathcal{P}(V)$ y $G' := (V', E')$ dado por $V' := V^L \dot{\cup} \{x, y\}$ y $E' := E^L \cup \{((i, u), x)\}_{(i, u) \in E} \cup \{((j, v), y)\}_{(j, v) \in E}$.

Dado un camino P de x a y , seleccionamos vértices de la siguiente manera: empezamos considerando el vértice $u \in V$ y elegimos el último vértice de P en V' que contenga a u , digamos (u, i) ; entonces consideramos el vértice $i \in V$ y elegimos el último vértice del camino posterior a (u, i) que contenga a i , y así sucesivamente. Como el resultado contendrá al último eje interno del camino, claramente será la lista de ejes de un paseo de u a v en G , por lo que si hay un camino de x a y en G' hay uno de u a v en G y todo conjunto de ejes en G que separa u y v es un conjunto de vértices en G' que separa x y y .

Recíprocamente, dado un camino de u a v en G con lista de ejes $e_1 \cdots e_k$, $xe_1 \cdots e_k y$ es un paseo de x a y , por lo que todo conjunto de vértices en G' que separa x e y es un conjunto de ejes en G que separa u y v .

Sea ahora X un conjunto de ejes de menor tamaño que separa u y v en G , X es un conjunto de vértices de menor tamaño que separa x e y , y por el teorema de Menger $|X|$ es el máximo número de caminos internamente disjuntos entre x e y en G' . Sea entonces P un conjunto de $|X|$ caminos internamente disjuntos entre x e y , reemplazando cada uno por un subcamino

cuya lista de vértices es la lista de ejes de un paseo de u a v , que sabemos que existe, nos queda un conjunto de $|X|$ caminos internamente disjuntos, por lo que hay $|X|$ paseos sin ejes comunes y por tanto $|X|$ caminos sin ejes comunes.

Teorema de Whitney para ejes: $G = (V, E)$ es k -conexo por ejes si y sólo si para $u, v \in V$ distintos existen al menos k caminos en G entre u y v sin ejes comunes.

\implies] Si $G \cong K_n$, $\lambda(G) = n - 1$ y estos $n - 1$ caminos son uv y uiv para $i \neq u, v$. En otro caso G no es completo. Si u y v no son adyacentes, sea S el conjunto de ejes de menor tamaño que separa u y v , como $G - S$ es desconexo, $|S| \geq k$, y por el teorema de Menger para ejes hay k caminos sin ejes comunes entre u y v . Si $e := (u, v) \in E$, como G es k -conexo por ejes, $G - e$ es $k - 1$ conexo por ejes, luego existen al menos $k - 1$ caminos sin ejes comunes entre u y v en $G - e$ y basta añadir el camino uv en G .

\impliedby] Sean S un conjunto separador de ejes de tamaño mínimo y u y v en distintas componentes conexas de $G - S$, como hay al menos k caminos internamente disjuntos entre u y v , por el teorema de Menger para ejes $|S| \geq k$.

Capítulo 3

Árboles

Un **bosque** o grafo **acíclico** es un grafo sin ciclos. Un **árbol** es un bosque conexo. Un **árbol generador** de un grafo es un subgrafo generador que es un árbol.

Como **teorema**, un grafo $G = (V, E)$ no vacío es un árbol si y sólo si entre cada $u, v \in V$ distintos existe un único camino, si y sólo si es conexo con $|E| = |V| - 1$, si y sólo si es acíclico con $|E| = |V| - 1$, si y sólo si es conexo minimal (todos los ejes son de corte), si y solo si es acíclico maximal (añadir un eje forma un ciclo), en cuyo caso el ciclo formado al añadir el eje es único.

1 \implies 2] El camino existe por conexión. Supongamos que existen $u, v \in V$ distintos con dos caminos de u a v distintos, $uu_1 \cdots u_{p-1}v$ y $uv_1 \cdots v_{q-1}v$. Sean $u_0 := v_0 := u$, $u_p := u_q := v$ e $i \in \{1, \dots, \min\{p, q\}\}$ mínimo con $u_i \neq v_i$, el paseo $u_i \cdots u_{p-1}vv_{q-1} \cdots v_i$, que no contiene a $u_{i-1} = v_{i-1}$, contiene un camino no trivial P de u_i a v_i , y entonces $(u_{i-1}, u_i)P(v_i, v_{i-1})$ es un ciclo y G no es un árbol. #

2 \implies 3] Claramente es conexo. Si $|V| = 1$, debe ser $|E| = 0$. Supuesto esto probado cuando $|V| = n \geq 1$, para $|V| = n+1$, sea $e := (u, v) \in E$, e es el único camino de u a v y por tanto $G - e$ es desconexo con dos componentes conexas de órdenes $n_1, n_2 \in \{1, \dots, n\}$. Entre dos vértices distintos de la misma componente hay un único camino, luego por la hipótesis de inducción estas tienen $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ ejes respectivamente y $|E| = |E \setminus \{e\}| + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$.

3 \implies 4] Si G tuviera un ciclo, sea e un eje en un ciclo, $G - e =: (V, E')$ sería conexo con $|E'| = |E| - 1 = |V| - 1$, pero la conexión implica $|E'| \geq |V| - 1$ #.

4 \implies 3] Si G tiene componentes conexas G_1, \dots, G_q y G_i tiene orden n_i y tamaño m_i , como cada G_i es conexa y acíclica, usando (1 \implies 3) es $m_i = n_i - 1$, luego $m = \sum_{i=1}^q m_i = \sum_{i=1}^q (n_i - 1) = n - q$, y despejando $q = 1$.

3 \implies 5] Dado un eje e , $G - e =: (V, E')$ cumple $|E'| = |E| - 1 = |V| - 2$, luego $G - e$ es desconexo y e es un eje de corte.

5 \implies 6] Si hubiera un ciclo, al quitar un eje del ciclo el grafo seguiría siendo conexo, luego el eje no sería de corte. # Sean ahora $u, v \in V$ distintos no adyacentes y P una cadena de u a v en G , que tendrá longitud al menos 2, añadiendo (u, v) a E tendríamos el ciclo

$P(v, u)$. Claramente todo ciclo tiene que contener a (u, v) , pero como P es único, el ciclo es único.

6 \implies 1] Para ver que G es conexo, sean $u, v \in V$, si u y v son iguales o adyacentes no hay que hacer nada, y en otro caso, sea P el ciclo que se forma al añadir $e := (u, v)$ a E , que debe contener a e y podemos suponer de la forma $ee_1 \cdots e_k, e_k \cdots e_1$ es un camino de u a v .

Todo árbol de orden al menos 2 tiene dos hojas. En efecto, sea $T = (V, E)$ un árbol de orden $n \geq 2$ y tamaño $m = n - 1$ con h hojas,

$$2n - 2 = 2m = \sum_{v \in V} o(v) = \sum_{v \text{ hoja}} 1 + \sum_{v \text{ no hoja}} o(v) \geq h + 2(n - h) = 2n - h,$$

y despejando es $h \geq 2$.

Un **árbol con raíz** o **enraizado** es un par (T, r) donde $T = (V, E)$ es un árbol y $r \in V$ es la **raíz**. Entonces un **nudo** es un nodo del árbol que distinto de la raíz que no es hoja. Dados $u, v \in V$ distintos, si el único camino de v a la raíz contiene a u , u es **predecesor** de v y v es **sucesor** de u . El nodo **padre** de un nodo es su único predecesor adyacente, y sus nodos **hijo** son sus sucesores adyacentes.

Dos nodos u y v son **comparables** si son iguales o uno es sucesor de otro. El **nivel** de un nodo es la longitud del único camino del nodo a la raíz, y la **altura** del árbol es el nivel máximo de sus nodos.

3.1. Árboles binarios

Un **árbol binario** es un árbol con raíz en que todos los nodos tienen grado 1 o 3 excepto la raíz, que tiene grado 2. Propiedades: Sea T un árbol binario de orden n :

1. n es impar y al menos 3.

Sea $T = (V, E, r)$, como $\sum_{v \in V} o(v) = 2 + \sum_{v \in V \setminus \{r\}} o(v)$ es par y $o(v)$ es impar para $v \in V \setminus \{r\}$, $|V \setminus \{r\}|$ es par y por tanto n es impar. Como $o(r) = 2$, $2 \leq |E| = n - 1$ y $n \geq 3$.

2. T tiene $\frac{n+1}{2}$ nodos hoja y $\frac{n-3}{2}$ nudos.

Si T tiene h hojas, tiene $n - h - 1$ nudos y $2n - 2 = \sum_{v \in V} o(v) = 2 + h + 3(n - h - 1) = 3n - 2h - 1$, luego $2h = n + 1$, $h = \frac{n+1}{2}$ y hay $n - h - 1 = n - \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ nudos.

3. La altura de T está entre $\lceil \lg(n + 1) - 1 \rceil$ y $\frac{n-1}{2}$, y estos extremos son alcanzables.¹

Todos los niveles hasta el h de un árbol de altura h , salvo el nivel 0, tienen al menos 2 nodos, luego su orden mínimo es $2h + 1$, pero $n \geq 2h + 1 \iff h \leq \frac{n-1}{2}$. Como $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$, la igualdad $h = \frac{n-1}{2}$ se alcanza en $T' := (V', E')$ dado por $V' := \{b_0, a_1, b_1, \dots, a_h, b_h\}$ y $E' := \{(a_k, b_{k-1}), (b_k, b_{k-1})\}_{k \in \{1, \dots, h\}}$.

¹ $\lg x := \log_2 x$.

Como en cada nivel puede haber como máximo el doble de nodos que en el nivel anterior, en el nivel k hay un máximo de 2^k vértices, de modo que un árbol de altura h tiene un máximo de $\sum_{k=0}^h 2^k = 2^{h+1} - 1$, pero

$$n \leq 2^{h+1} - 1 \iff n + 1 \leq 2^{h+1} \iff \lg(n + 1) - 1 \leq h \stackrel{h \in \mathbb{Z}}{\iff} h \geq \lceil \lg(n + 1) - 1 \rceil.$$

La igualdad se alcanza en $T' := (V', E')$ con $V' := \{1, \dots, n\}$ y $E' := \{(k, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\}_{k \in \{2, \dots, n\}}$.

3.2. Árboles generadores mínimos

Una **red** es una terna (V, E, ℓ) donde (V, E) es un grafo y $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ es la **función de peso** o **de longitud**. Dados una red conexa $G = (V, E, \ell)$ y un árbol generador $T = (V, E')$ de G , el **peso** del árbol es

$$\ell(T) := \sum_{e \in E'} \ell(e).$$

T es un árbol generador **minimal** o **mínimo** si tiene el mínimo peso entre los árboles generadores de G , si y sólo si para $a = (u, v) \in E \setminus E'$ y $e \in E'$ en el único camino de u a v en T es $\ell(e) \leq \ell(a)$, si y sólo si para $e \in E'$ que separa T en componentes conexas V_1 y V_2 y $a \in \omega_G(V_1)$ es $\ell(e) \leq \ell(a)$.

1 \implies 2] Si fuera $\ell(a) < \ell(e)$, el grafo $(V, E' \cup \{a\} \setminus \{e\})$ es un árbol al ser conexo y acíclico, y su peso sería menor que el de T , T no sería minimal. #

2 \implies 3] Sean $e \in T$, V_1 y V_2 las componentes conexas de $T - e$, y $u \in V_1$ y $v \in V_2$ tales que $a := (u, v) \in E$, si $a = e$ hemos terminado, y en otro caso $a \in E \setminus E'$ y e está en el único camino que conecta u con v en T , luego $\ell(e) \leq \ell(a)$.

3 \implies 1] Elegimos un árbol generador minimal $T_0 = (V, E_0)$. Si $T = T_0$, hemos terminado. En otro caso, como $|E'| = |E_0|$, existe $e \in E' \setminus E_0$. Sean V_1 y V_2 las componentes conexas de $T - e$ y $S := (V, E_0 \cup \{e\})$, como S tiene un ciclo que contiene a $e \in \omega_T(V_1)$, debe contener a otro $a \in \omega_T(V_1) \cap E_0$, luego por hipótesis $\ell(e) \leq \ell(a)$ y $T_1 := (V, E_1 := E_0 \cup \{e\} \setminus \{a\})$ tiene menor o igual (en concreto igual) peso que T_0 pero que se diferencia de T en un nodo menos que T_0 . Repitiendo este proceso llegamos a que T_0 tiene el mismo peso que T y por tanto T es minimal.

Entrada: Red conexa $G = (V, E, \ell)$.

Salida: Árbol generador minimal (V, T) de G .

Ordenar los nodos de E en orden creciente de peso ℓ en la lista L ;

$T \leftarrow \emptyset$;

para $i \leftarrow 1$ **a** $|L|$ **hacer**

$(u, v) \leftarrow L_i$;

si no existe un camino de u a v en (V, T) **entonces** añadir L_i a T ;

Algoritmo 3: Algoritmo de Kruskal.

El **algoritmo de Kruskal** (algoritmo 3) construye el árbol generador minimal de una red conexa, pues se asegura de que todo par de vértices adyacentes de la red estén conectados en

el árbol, no crea ciclos y, si una arista (u, v) queda fuera del árbol, todas las aristas del camino de u a v en el árbol ya habían sido consideradas y por tanto tienen peso menor.

Entrada: Red conexa $G = (V, E, \ell)$.

Salida: Árbol generador minimal (V, T) de G .

Tomar $r \in V$;

$V_1 \leftarrow \{r\}$;

$V_2 \leftarrow V \setminus \{r\}$;

$T \leftarrow \emptyset$;

mientras $|V_1| < |V|$ **hacer**

 Tomar $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ con $e := (v_1, v_2) \in E$ de peso mínimo;
 Añadir e a T ;
 Mover v_2 de V_2 a V_1 ;

Algoritmo 4: Algoritmo de Prim.

El **algoritmo de Prim** (algoritmo 4) hace lo mismo, pues se asegura de que todos los vértices estén conectados a r , no crea ciclos porque no considera ejes cuyos vértices ya hayan sido conectados en el árbol y, cuando selecciona una arista e , que estaría separando al árbol en V_1 y V_2 , se asegura de que tenga peso mínimo entre las aristas de $\omega_G(V_1)$.

Entrada: Red conexa (V, E, ℓ)

Salida: Árbol generador minimal (V, T) de G .

$T \leftarrow \emptyset$;

mientras (V, T) sea *disconexo* **hacer**

para cada *componente conexa* V_i de (V, T) **hacer**
 Tomar $u_i \in V_i$ y $v_i \in V \setminus V_i$ con $(u_i, v_i) \in E$ de peso mínimo;
 para cada *componente conexa* V_i de (V, T) **hacer**
 si u_i y v_i *no están conectados en* (V, T) **entonces** $T \leftarrow T \cup (u_i, v_i)$;

Algoritmo 5: Algoritmo de Sollin.

Otro algoritmo para hacer esto es el **algoritmo de Sollin** (algoritmo 5)². Finalmente, podemos calcular un árbol generador **maximal** o **máximo** de una red (V, E, ℓ) (el de mayor peso) como un árbol generador minimal de $(V, E, -\ell)$, o invirtiendo el sentido de las comparaciones en los algoritmos anteriores.

²Se recomienda comprobar la conexión de (V, T) manteniendo un conjunto cociente con las componentes conexas. Ver el capítulo 3 de los apuntes de AED I para más información.

Capítulo 4

Algoritmos en grafos

4.1. Caminos más cortos

Dada una red (V, E, ℓ) y un camino $P := v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ en (V, E) , llamamos **longitud** de P a

$$\ell(P) := \sum_{i=1}^k \ell(e_i).$$

El problema del **camino más corto** entre dos vértices $u, v \in V$ es el de minimizar $\ell(P)$ siendo P un camino que une u con v .

Si $v_0 v_1 \cdots v_k$ es el camino más corto de v_0 a v_k , $v_i v_{i+1} \cdots v_j$ es el camino más corto de v_i a v_j para $0 \leq i < j \leq k$, pues si no fuera el más corto, existiría un camino más corto de v_i a v_j y al sustituir este en $v_0 \cdots v_k$ se tendría un camino más corto de v_0 a v_k .

Como **teorema**, sean $(V := \{1, \dots, n\}, E, \ell)$ una red conexa, $s \in \{1, \dots, n\}$ y $d \in \mathbb{R}^n$ tal que todo d_i es la longitud de algún camino de i a s y $d_s = 0$, entonces:

1. Cada d_i es la longitud del camino más corto de i a s si y sólo si $d_j - d_i \leq \ell(i, j)$ para todo $(i, j) \in E$.

\implies] Sea P un camino más corto de s a i , entonces Pj es un camino de s a j y $\ell(Pj) = \ell(P) + \ell(i, j) = d_i + \ell(i, j) \geq d_j$.

\impliedby] Sea $P := s i_1 \cdots i_k$ un camino, y queremos ver que $d_{i_k} \leq \ell(P)$. Si $k = 0$ esto se da por hipótesis, y supuesto esto probado para caminos de longitud $k - 1$, como $d_{i_k} - d_{i_{k-1}} \leq \ell(i_{k-1}, i_k)$, $\ell(P) = \ell(s i_1 \cdots i_{k-1}) + \ell(i_{k-1}, i_k) \geq d_{i_{k-1}} + d_{i_k} - d_{i_{k-1}} = d_{i_k}$.

2. Si $\ell(e) \geq 0$ para todo $e \in E$, sea $R \subseteq V \setminus \{s\}$ tal que, para $i \notin R$, d_i es la longitud de un camino más corto de s a i y, para $i \in R$, $d_i = \min_{j \in N(i) \setminus R} (d_j + \ell(j, i))$, si $j \in R$ cumple $d_j = \min_{i \in R} d_i$, entonces d_j es la longitud de un camino más corto de s a j .

Sean $P := s t_1 \cdots t_p j$ un camino de s a j e i tal que $s, t_1, \dots, t_i \notin R$ y $t_{k:=i+1}, \dots, t_p, j \in R$, entonces $P' := s t_1 \cdots t_i t_k$ cumple $d_i + \ell(i, k) \leq \ell(P') \leq \ell(P)$, pero por hipótesis $d_k = \min_{j \in N(i) \setminus R} (d_j + \ell(j, i)) = d_i \leq d_i + \ell(i, k)$, luego d_k es cota inferior de las longitudes de caminos de s a j y por tanto d_j también.

Esto justifica el **algoritmo de Dijkstra** (algoritmo 6). Otro algoritmo para calcular longitudes mínimas es el **algoritmo de Dantzig** (algoritmo 7).

Entrada: Red $(\{1, \dots, n\}, E, \ell)$ con $\ell(E) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ y $s \in \{1, \dots, n\}$.

Salida: Tuplas (d_1, \dots, d_n) y (p_1, \dots, p_n) tales que, para cada i , d_i es la longitud de un camino más corto de s a i y, para $i \neq s$, p_i es el penúltimo nodo de dicho camino.

$d \leftarrow (+\infty, \dots, +\infty)$;

$p \leftarrow (0, \dots, 0)$;

$R \leftarrow \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}$;

$d_s \leftarrow 0$;

para $i \in N(s)$ **hacer**

$p_i \leftarrow s$;
 $d_i \leftarrow \ell(s, i)$;

mientras $R \neq \emptyset$ **hacer**

Tomar $j \in R$ con d_j mínimo;

$R \leftarrow R \setminus \{j\}$;

para $i \in N(j) \cap R$ **hacer**

si $d_j + \ell(j, i) < d_i$ **entonces**

$d_i \leftarrow d_j + \ell(j, i)$;

$p_i \leftarrow j$;

Algoritmo 6: Algoritmo de Dijkstra.

4.2. Tours eulerianos

Dado un grafo $G = (V, E)$, un **tour** o **recorrido euleriano** es un paseo cerrado que atraviesa cada eje del grafo exactamente una vez. Un grafo es **euleriano** si admite un tour euleriano. Como **teorema**, un grafo conexo es euleriano si y solo si todos los vértices tiene orden par, en cuyo caso se puede obtener un tour euleriano con el **algoritmo de Hierholzer** (algoritmo 8).

\implies] Sean T un tour euleriano, $v \in V$ y e_1, \dots, e_k los ejes adyacentes a v , cada eje está en T exactamente una vez y puede ser entrante (el siguiente nodo es v) o saliente (lo es el anterior), pero a todo eje entrante le sigue uno saliente y a todo saliente le precede uno entrante (podemos suponer que T no empieza por v), luego el número de entrantes y salientes es el mismo y k es par.

\impliedby] Claramente el algoritmo de Hierholzer toma cada eje exactamente una vez, crea un paseo cerrado y termina, y queda ver que no da errores. Si queda algún eje por tomar, alguno debe ser adyacente a un nodo en P , pues de lo contrario los nodos y ejes de P formarían una componente conexa y, al haber más ejes, G sería desconexo. # Respecto al paso de tomar un eje, en la primera iteración hemos tomado un nodo de forma que se pueda, y en el resto hemos tomado antes un número par de ejes adyacentes a i (entrantes y salientes) más el nodo usado para entrar, y como el orden es par, debe quedar otro eje sin añadir a P .

Entrada: Red $(V := \{1, \dots, n\}, E, \ell)$.

Salida: Matrices $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ y $P \in \mathcal{M}_n(V)$ tales que para $i, j \in V$, si i y j están desconectados, $D_{ij} = +\infty$, y si están conectados, D_{ij} es la longitud de un camino más corto de i a j y P_{ij} es su penúltimo nodo, o i si $i = j$ y el camino es el trivial.

para $i, j \in V$ **hacer**

$P_{ij} \leftarrow i$;
 si $i = j$ **entonces** $D_{ij} \leftarrow 0$;
 sinó $D_{ij} \leftarrow +\infty$;

para $k \leftarrow 2$ **a** n **hacer**

para $i \leftarrow 1$ **a** $k - 1$ **hacer**

 Tomar $j \in \{1, \dots, k - 1\}$ con $D_{ij} + \ell(j, k)$ mínimo (si $(j, k) \notin E$, $\ell(j, k) := +\infty$);
 $D_{ki} \leftarrow D_{ik} \leftarrow D_{ij} + \ell(j, k)$;
 $P_{ik} \leftarrow j$;
 si $j = i$ **entonces** $P_{ki} \leftarrow k$;
 sinó $P_{ki} \leftarrow P_{ji}$;

para $i, j \leftarrow 1$ **a** $k - 1$ **hacer**

si $D_{ij} > D_{ik} + D_{kj}$ **entonces**
 $D_{ij} \leftarrow D_{ik} + D_{kj}$;
 $P_{ij} \leftarrow P_{kj}$;

Algoritmo 7: Algoritmo de Dantzig.

También se puede obtener un tour euleriano con el **algoritmo de Fleury** (algoritmo 9).

Demostración: Es claro que si el algoritmo funciona genera un tour euleriano. Sea s el nodo inicial, como $o(s) > 0$, P es un paseo que no repite ejes, por lo que todos los nodos salvo el primero y el que es el último en cierta iteración tienen orden par (por ser G euleriano) y, como estos dos tienen orden impar, se puede salir del último añadiendo otro eje al camino en cada paso hasta llegar a s y no poder salir, momento en que queremos ver que $E = \emptyset$. En efecto, si no fuera así, al final existiría un $e \in E$ en una componente conexa de G distinta a la de s , pero la conexión con s es un invariante del bucle. En efecto, al principio de una iteración, i conecta con s porque no es aislado y solo se rompe la conexión si se quita un eje de corte, pero entonces todos los ejes adyacentes a i , $(i, j_1), \dots, (i, j_k)$, serían de corte y $G - i$ tendría k componentes conexas. Sea entonces V_p la componente conexa con j_p , si fuera $s \notin V_p$, como todos los nodos de V_p tienen orden par salvo j_p que tendría orden impar al haber eliminado (i, j_p) , la suma de los órdenes de los nodos sería impar#, luego $s \in V_p$ y, como V_1, \dots, V_k es una partición, $k = 1$. Por tanto i es un nodo hoja y eliminar el eje de corte deja a i aislado.

4.3. Problema del cartero chino

Dada una red (V, E, ℓ) , el **problema del cartero chino** consiste en obtener un paseo cerrado de longitud mínima que incluya todos los ejes al menos una vez. Para resolverlo:

1. Calculamos la longitud de los caminos más cortos entre cada par de nodos, por ejemplo con el algoritmo de Dantzig.

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ conexo en el que todos los vértices tienen orden par.

Salida: Tour euleriano P de G .

Elegir $s \in V$;

$P \leftarrow (s)$;

mientras $E \neq \emptyset$ **hacer**

 Tomar un nodo i en P adyacente a algún eje;

$k \leftarrow i$;

$P_0 \leftarrow (i)$;

repetir

 Sacar un (i, j) de E ;

$P_0 \leftarrow P_0j$;

$i \leftarrow j$;

hasta que $i = k$;

 Con $P =: P_1kP_2$, hacer $P \leftarrow P_1P_0P_2$;

Algoritmo 8: Algoritmo de Hierholzer.

Entrada: Grafo euleriano conexo $G = (V, E)$.

Salida: Tour euleriano P de G .

Tomar $i \in V$;

$P \leftarrow (i)$;

mientras $E \neq \emptyset$ **hacer**

si existe $(i, j) \in E$ *que no sea de corte* **entonces** sacar (i, j) de E ;

sinó sacar un (i, j) de E ;

$P \leftarrow Pj$;

$i \leftarrow j$;

Algoritmo 9: Algoritmo de Fleury.

- Identificamos los nodos de orden impar, de los que habrá un número par, y los emparejamos minimizando la suma de las longitudes de los caminos más cortos entre cada par.
- Duplicamos los ejes de un camino más corto entre cada par, obteniendo un grafo euleriano.
- Obtenemos un tour euleriano, que será la solución.

4.4. Grafos hamiltonianos

Dado un grafo $G = (V, E)$, un camino es **hamiltoniano** si contiene a todos los vértices. Un grafo es hamiltoniano si admite un ciclo hamiltoniano.

El **grafo clausura** de G , $[G]$, es el grafo resultante de añadir a G los $(u, v) \in E^c$ con $o(u) + o(v) \geq |V|$ hasta que no quede ningún $(u, v) \in E^c$ que cumpla la condición. Como **teorema**, G es hamiltoniano si y sólo si lo es $[G]$.

\implies] Trivial.

\impliedby] Para $|V| \leq 2$ es $G = [G]$. Sea entonces $|V| \geq 3$ y $G \neq [G]$. Si G no fuera hamiltoniano y, para obtener $[G]$, le hubiéramos añadido los ejes e_1, \dots, e_n en ese orden, existiría un $e_{k+1} =: (u, v)$ tal que $G_k := (V, E_k) := G + \{e_1, \dots, e_k\}$ es hamiltoniano si y sólo si $i > k$, por lo que existe un camino hamiltoniano $(u =: u_1)u_2 \dots (u_n =: v)$ en G_k , con $n := |V|$. Sean ahora $X := \{i \in \{2, \dots, n-2\} \mid (u_i, v) \in E_k\}$ e $Y := \{i \in \{2, \dots, n-2\} \mid (u_{i+1}, u) \in E_k\}$, se tiene $|X| = o(u) - 1$ e $|Y| = o(v) - 1$, pero como $o(u) + o(v) \geq n$ en G_k , $|X| + |Y| = o(u) + o(v) - 2 \geq n - 2 > n - 3 = |\{2, \dots, n-2\}|$ y existe $j \in X \cap Y$, con lo que $u_1 u_k u_{k+1} \dots u_n u_{k-1} u_{k-2} \dots u_1$ es un ciclo hamiltoniano en $G_j \#$.

Una **sucesión hamiltoniana** es una secuencia (a_1, \dots, a_n) de naturales tal que todo grafo $(\{1, \dots, n\}, E)$ con $o(1) \leq \dots \leq o(n)$ y $o(i) \geq a_i$ para cada i es hamiltoniano. Como **teorema**, para $n \geq 3$, (a_1, \dots, a_n) con $a_1 \leq \dots \leq a_n < n$ es una sucesión hamiltoniana si y sólo si para $i < \frac{n}{2}$ con $a_i \leq i$ es $a_{n-i} \geq n - i$.

El **problema del viajero** o **del viajante (de comercio)** en una red (V, E, ℓ) consiste en encontrar el ciclo hamiltoniano de longitud mínima. Se puede aproximar con el **algoritmo de Christofides** (algoritmo 10, 1976).

Entrada: Red (V, E, ℓ) completa en la que ℓ cumple la desigualdad triangular.

Salida: Ciclo hamiltoniano C con longitud a lo sumo $\frac{3}{2}$ de la del ciclo hamiltoniano de longitud mínima en la red.

Encontrar un árbol generador minimal T de (V, E) ;

$O \leftarrow \{v \in V : o(v) \text{ impar en } T\}$;

Obtener un emparejamiento M de los vértices de O con $\sum_{e \in M} \ell(e)$ mínimo;

$H \leftarrow (V, T \amalg M)$;

// H es un multigrafo euleriano.

Encontrar un ciclo euleriano C en H ;

Borrar de C los nodos repetidos;

Algoritmo 10: Algoritmo de Christofides.

Capítulo 5

Coloración de grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto S de **colores**, llamamos **coloración (propia por vértices)** de G a una función $f : V \rightarrow S$ con $f(u) \neq f(v)$ para $(u, v) \in E$. Si $|S| = k$, f es una **k -coloración**, y G es **k -coloreable** si admite una k -coloración. Una k -coloración f induce una partición de V en subconjuntos independientes, dados por $f^{-1}(c)$ para $c \in S$.

El **número cromático** de un grafo $G = (V, E)$, $\chi(G)$, es el menor k tal que G es k -coloreable, el mínimo número de conjuntos independientes en que se puede particionar V . Ejemplos: Dado un grafo $G = (V, E)$:

1. $\chi(K_n) = n$.

En adelante f será una coloración. Entonces, en este caso, $f(i) \neq f(j)$ para $i \neq j$, luego f es inyectiva y su imagen tiene cardinal $|V| = n$.

2. $\chi(G) = 0$ si y sólo si G es vacío.

\implies Si $\chi(G) = 0$, en particular existe $f : V \rightarrow \emptyset$ y $V = \emptyset$.

\impliedby Si $V = \emptyset$, $E = \emptyset$ y $f : V \rightarrow \emptyset$ es una 0-coloración.

3. $\chi(G) = 1$ si y sólo si G es no vacío y sin ejes.

\implies Si existiera $(u, v) \in E$ sería $f(u) \neq f(v)$ y por tanto $|f(V)| \geq 2\#$, y si fuera $V = \emptyset$ sería $|f(V)| = 0\#$.

\impliedby Claramente $|f(V)| \geq 1$, pero podemos tomar todos los nodos del mismo color.

4. $\chi(G) = 2$ si y sólo si G es bipartito con algún eje.

\implies La partición $\{f^{-1}(0), f^{-1}(1)\}$ de V cumple que eje une dos vértices en el mismo conjunto y por tanto todos unen un vértice de uno con uno del otro. Hay algún eje porque si no lo hubiera sería $\chi(G) = 1$.

\impliedby Sea (A, B) la partición, definimos $f(v) := 0$ para $v \in A$ y $f(v) := 1$ para $v \in B$. Entonces f es una 2-coloración de G , y como hay algún eje, $\chi(G) > 1$.

5. Todo árbol no trivial es bipartito.

Se tiene $|V| \geq 2$ y, sea $n(v)$ el nivel de un $v \in V$, $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f(v) := [n(v)]_2$ es una coloración de G . Como G tiene ejes, $\chi(G) > 1$ y $\chi(G) = 2$.

6. Sea C_n el anillo o **ciclo** de tamaño n ,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ par;} \\ 3, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Como $C_n := (V := \{0, \dots, n-1\}, \{\{i, [i+1]_n\}\}_{i \in V})$ tiene ejes, $\chi(C_n) \geq 2$. Para n par, tomamos $f(i) = [i]_2$. Para n impar, si C_n fuera bipartito, sea V_0 el elemento que contiene al 0 y V_1 el que contiene al 1, necesariamente $V_0 \neq V_1$ y, por inducción, el que contiene a i es $V_{[i]_2}$, pero entonces $0, n-1 \in V_0$, con lo que C_n no es bipartito y $\chi(C_n) > 2$, y tomamos $f(i) := [i]_2$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $f(0) := 2$.

7. Si H es un subgrafo de G , $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Si f es una $\chi(G)$ -coloración de G , también es una $\chi(G)$ -coloración de H .

8. Si K_q es subgrafo de G , $\chi(G) \geq q$.

$$q = \chi(K_q) \leq \chi(G).$$

9. Si $v \in V$, $\chi(G-v) \in \{\chi(G), \chi(G)-1\}$.

Sean $k := \chi(G-v)$ y $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una k -coloración de $G-v$, $k \leq \chi(G)$, y como $g : V \rightarrow \{1, \dots, k+1\}$ dada por $g(i) := f(i)$ para $i \neq v$ y $g(v) := k+1$ es una $(k+1)$ -coloración de G , $\chi(G) \leq k+1$.

10. Si $e \in E$, $\chi(G-e) \in \{\chi(G), \chi(G)-1\}$.

Sea $e = (u, v)$, como $G-v$ es un subgrafo de $G-e$, $\chi(G)-1 \leq \chi(G-v) \leq \chi(G-e) \leq \chi(G)$.

El coloreado de grafos se puede aplicar a problemas que traten de distribuir productos con ciertas relaciones de incompatibilidad, como en el coloreado de mapas, los sudokus. la asignación de frecuencias en torres de telecomunicaciones, la organización de horarios o la distribución de productos peligrosos en un almacén.

Entrada: Grafo $G = (V = \{1, \dots, n\}, E)$.

Salida: Coloración f de G que intenta usar pocos colores.

para $i \leftarrow 1$ **a** n **hacer** $f_i \leftarrow \min(\mathbb{N} \setminus \{f_j\}_{j \in N(i), j < i})$;

Algoritmo 11: Algoritmo heurístico para coloreado de grafos.

Podemos colorear un grafo con el algoritmo 11, aunque este no garantiza una coloración óptima. Todo grafo G cumple $\chi(G) \leq \Delta_G + 1$, pues el algoritmo siempre elige el menor color de todos salvo un conjunto de tamaño máximo Δ_G . Así, parece preferible al aplicar el algoritmo ordenar los nodos en orden decreciente de sus grados.

Teorema de Brooks: Si un grafo conexo G no es completo ni un ciclo de longitud impar, entonces $\chi(G) \leq \Delta_G$.

5.1. Grafos críticos

Un grafo $G = (V, E)$ es **crítico** o $\chi(G)$ -**crítico** si todo subgrafo estricto H de G cumple $\chi(H) < \chi(G)$, **crítico por ejes** si para todo $e \in E$ es $\chi(G-e) < \chi(G)$ y **crítico por vértices** si para todo $v \in V$ es $\chi(G-v) < \chi(G)$.

Entonces:

1. G es crítico si y sólo si es crítico por ejes y por vértices.
2. Si G es crítico por ejes y no tiene nodos aislados, es crítico por vértices.
Para $v \in V$, v es adyacente a algún $e \in E$ y $G - v$ es un subgrafo de $G - e$.
3. G es crítico por ejes si y sólo si $\chi(G - e) = \chi(G) - 1$ para todo $e \in E$.
 $\chi(G - e) \in \{\chi(G), \chi(G) - 1\}$.
4. Si $|V| \geq 2$, G tiene un subgrafo crítico H tal que $\chi(G) = \chi(H)$.

Si todos los vértices de G son aislados, $\chi(G) = 1$ y tomamos un subgrafo unipuntual, que es crítico. En otro caso, sea G_0 el subgrafo de G generado por sus vértices no aislados, claramente G_0 tiene orden al menos 2 y $\chi(G_0) = \chi(G)$. Si G_0 es crítico, tomamos G_0 , y de lo contrario existe $e_1 \in E$ con $\chi(H_0 := G_0 - e_1) = \chi(G_0)$. Si todos los vértices de H_0 son aislados, $\chi(H_0) = \chi(G) = 1$ y tomamos un subgrafo unipuntual, y de lo contrario llamamos G_1 al subgrafo de H_0 generado por sus vértices no aislados y repetimos. Como E es finito, en algún momento se llega a un subgrafo crítico.

Como **teorema**, si G es crítico, $\chi(G) \leq \delta_G + 1$. **Demostración:** Sea $k := \chi(G)$ y supongamos $k > \delta_G + 1$, con lo que $\delta_G \leq k - 2$. Sea $v \in V$ con $o(v) = \delta_G$, debe ser $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$, pero en una coloración de $G - v$, como v es de menor grado, se usan a lo sumo $\delta_G \leq k - 2$ colores para los vértices adyacentes a v en G , luego hay un color que no se ha utilizado y, pintando v de ese color, tenemos una $(k - 1)$ -coloración de $G\#$.

5.2. Polinomio cromático

Dados un grafo G y $k \in \mathbb{N}$, llamamos $p(G; k)$ al número de k -coloraciones de G . Así:

1. $p(G, k) = 0$ para todo $k < \chi(G)$.
2. $p(K_n, k) = k(k - 1) \cdots (k - n + 1)$.
3. Sea P_n la malla unidimensional o **cadena** de n nodos, $p(P_n, k) = k(k - 1)^{n-1}$.

Si $G = (V, E)$, $u, v \in E$ y $e := (u, v)$, llamamos $G + e := (V, E \cup \{e\})$, y si $e \in E$ llamamos **grafo contraído** a

$$G \circ e := ((V \setminus \{u, v\}) \amalg \{*\}, E_{V \setminus \{u, v\}} \cup \{(*, i)\}_{(u, i) \in E} \cup \{(*, i)\}_{(v, i) \in E} \setminus \{u, v\}).$$

Teorema de reducción: Sean $G = (V, E)$ un grafo y $e \notin E^G$, entonces $p(G; k) = p(G + e; k) + p(G \circ e; k)$. **Demostración:** Sea $(u, v) := e$, las coloraciones f de G con $f(u) = f(v)$ son precisamente las de $G \circ e$ haciendo $f(*) := f(u) = f(v)$, y las coloraciones f de G con $f(u) \neq f(v)$ son precisamente las de $G + e$.

Así, dados un grafo $G = (V, E)$ y un $e \in E$, $p(G; k) = p(G - e; k) - p(G \circ e; k)$, pues $G = (G - e) + e$ y $G \circ e = (G - e) \circ e$.

El **polinomio cromático** de G es $p(G; k)$ respecto a k , y si G tiene grado $n \geq 1$, $p(G; k)$ es un polinomio de grado n en que el coeficiente de grado n es 1, el término independiente es 0 y los coeficientes de los términos intermedios son enteros y se alternan en signo. **Demostración:** Sean $G = (V, E)$, $n = |V|$ y $m = |E|$, y hacemos inducción sobre (n, m) (el orden lexicográfico es un buen orden en $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$). Para $m = 0$, todos los puntos son aislados y $p(G; k) = k^n$, y para $n = 1$ es $m = 0$. Sean ahora $n > 1$ y $m > 0$, $p(G; k) = p(G - e; k) - p(G \circ e; k)$, pero $G - e$ tiene un eje menos y $G \circ e$ tiene un nodo menos, luego ambos cumplen la hipótesis y como $p(G - e; k)$ tiene orden n y $p(G \circ e; k)$ tiene orden $n - 1$, $p(G; k)$ cumple la hipótesis.

5.3. Planaridad

Un grafo $G = (V, E)$ es **planar** si existen $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva y $g : E \rightarrow [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que, para $e := (u, v) \in E$, $g(e)$ es una curva regular simple que une $f(u)$ y $f(v)$, no pasa por ningún vértice en $(0, 1)$ y no corta a $g(e')$ para ningún otro $e' \in E$ en $(0, 1)$. En tal caso (V, E, f, g) es un **grafo plano** o **grafo embutido**, con imagen $f(V) \cup \bigcup_{e \in E} g(e) \subset [0, 1]$.

Una **estrella** es un grafo $G = (V, E)$ donde existe un $v \in V$ con $v \in e$ para todo $e \in E$. Toda estrella es planar. En efecto, sea $G = (\{v_0, \dots, v_n\}, E)$ la estrella y $v_0 \in e$ para todo $e \in E$, llamamos $f(v_0) := 0$, $f(v_i) := (\cos i/n, \sin i/n)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $g(v_0, v_i)(t) := tv_i$.

Sea (V, E, f, g) un grafo plano con imagen I , llamamos **caras** a las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus I$ y **cara externa** a la no acotada, que es única por ser I compacto y por tanto acotado.

El **contorno** de una cara es la imagen de un subgrafo de G , que existe, cuya imagen con las mismas f y g es la frontera de la cara. Los ejes y vértices de dicho subgrafo son **incidentes** a la cara. Un puente es incidente a una sola cara, y un eje no de corte es incidente a 2 caras.

El **grado** de una cara F , $d(F)$, es el número de ejes incidentes a ella, contando los puentes dos veces. Así, si F es el conjunto de caras del grafo, $\sum_{f \in F} d(f) = 2|E|$. Si $|V| \geq 3$, $d(f) \geq 3$ para todo $f \in F$.

Identidad de Euler: Si G es un grafo plano conexo con n vértices, m ejes y c caras, $n - m + c = 2$, y en particular todos los grafos planos de un mismo grafo planar conexo tienen el mismo número de caras. **Demostración:** Si $c = 1$, G no tiene ciclos y, al ser conexo, es un árbol, luego $m = n - 1$ y $n - m + c = 2$. Si $c \geq 2$, supuesto esto probado para $c - 1$ caras, sean C un ciclo de G y e un eje de C , e no es un puente, luego es incidente a 2 caras y se puede ver que $G - e$ tiene $c - 1$ caras y es conexo, de modo que por hipótesis $n - (m - 1) + (c - 1) = 2$ y $n - m + c = 2$.

En un grafo plano con al menos 3 nodos, toda cara tiene al menos 3 ejes incidentes. Entonces, si G es un grafo planar conexo con $n \geq 3$ vértices y m nodos, $m \leq 3n - 6$, y si además G no contiene a K_3 , $m \leq 2n - 4$. **Demostración:** Sean F el conjunto de las caras de un grafo plano arbitrario de G y $c := |F|$, como toda $f \in F$ cumple $d(f) \geq 3$, $3c \leq \sum_{f \in F} d(f) = 2m$, y como $c = 2 - n + m$, tenemos $6 - 3n + 3m \leq 2m$ y $m \leq 3n - 6$. Si una cara f cumple $d(f) = 3$, se puede ver que el único grafo con 3 ejes contando doblemente los puentes es K_3 , por lo que si G no contiene a K_3 , $d(f) \geq 4$, $4c = 8 - 4n + 4m \leq 2m$ y $2m \leq 4n - 8$, por lo que $m \leq 2n - 4$.

Por ejemplo, el **grafo de Petersen**, $(\{a_i, b_i\}_{i=0}^4, \{(a_i, b_i), (a_i, a_{[i+1]_5}), (b_i, b_{[i+2]_5})\}_{i=0}^4)$, no es un grafo planar, pues tiene 5 nodos y 15 ejes, y $15 > 9 = 3 \cdot 5 - 6$.

Sea F una cara de un grafo plano con $d(F) \geq 4$, el grafo tiene dos vértices no adyacentes en F . Entonces, si G es un grafo planar maximal con al menos 3 nodos, toda cara F de todo grafo plano de G cumple $d(F) = 3$. Como **teorema**, todo grafo planar maximal con n nodos tiene exactamente $3n - 6$ ejes.

Dado un grafo $G = (V, E)$, una **subdivisión de un eje** $e = (u, v) \in E$ es el grafo $(V \amalg \{*\}, E \setminus e \cup (u, *) \cup (*, v))$, y una **subdivisión** de G es el resultado de realizar subdivisiones sucesivas sobre G .

Teorema de Kuratowski: Un grafo es planar si y sólo si no contiene como subgrafo ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$.

Teorema de los 4 colores: Todo grafo planar es 4-coloreable.

Capítulo 6

Programación lineal entera

Un **modelo** o **problema de programación lineal entera** es un modelo de programación u optimización lineal al que se le añade la restricción de que algunas o todas las variables deben ser enteras. El modelo general es

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ & \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j, & \forall j \in \{1, \dots, m\}, \\ & x_i \geq 0, & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ & x_i \in \mathbb{Z}, & \forall i \in I \subseteq \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

El problema es **entero puro** si $I = \{1, \dots, n\}$ y **entero mixto** en otro caso. Como en la programación lineal, se pueden hacer transformaciones como cambiar el sentido de optimización del problema, el sentido de una restricción o el signo de una variable; convertir una restricción de igualdad en dos de desigualdad, o transformar una variable no restringida en dos variables positivas.

Llamamos **relajación lineal** de un problema de programación lineal entera al resultado de eliminar de este las **restricciones de integridad**, las de la forma $x_i \in \mathbb{Z}$. El valor óptimo de la relajación lineal es mejor o igual al del problema entero.

Si $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$, llamamos $[x, y] := (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+m}$; si $A \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times q}(\mathbb{R})$, llamamos $[A, B] := (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times (p+q)}(\mathbb{R})$ dada por $c_{ij} := a_{ij}$ para $j \leq p$ y $c_{ij} := b_{i(j-p)}$ para $j > p$, y escribimos $[x_1, \dots, x_n] := [x_1, [x_2, \dots, x_n]]$ para $n > 2$ y $[x_1] := x_1$.

Como **teorema**, sean $A \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{Q})$, $G \in \mathcal{M}_{n \times q}(\mathbb{Q})$, $b \in \mathbb{Q}^n$, $P := \{[x, y] \in \mathbb{R}^{p+q} \mid Ax + Gy \leq b\}$ y $S := \{[x, y] \in P \mid x \in \mathbb{Z}^p\}$, existen $A' \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{Q})$, $G' \in \mathcal{M}_{n \times q}(\mathbb{Q})$ y $b' \in \mathbb{Q}^n$ tales que $\text{ec}S = \{[x, y] \mid A'x + G'y \leq b'\}$. Si algunos coeficientes son irracionales, la envoltura convexa del conjunto factible puede no ser un poliedro. **Demostración:** Sean $S := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \leq \sqrt{2}x, x \geq 0, y \geq 0\}$ y $C := \{(x, y) \mid y < \sqrt{2}x, x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{0\}$. Como para $x \in \mathbb{Z}$ es $\sqrt{2}x \notin \mathbb{Z}$, $S \subseteq C$. Sean $a, b \in C$, $t \in [0, 1]$ y $p := (1-t)a + tb$, si uno de a o b es 0, por ejemplo a , entonces $p = (tb_1, tb_2)$, que es 0 si $t = 0$ y en otro caso cumple las otras condiciones, y en otro caso p «hereda» las otras condiciones de a y b . Por tanto C

es conexo y $ecS \subseteq C$. Además, $0 \in S$ y para $(x, y) \in C \setminus \{0\}$, como $x > 0$, $\frac{y}{x} < \sqrt{2}$ y existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $\frac{p}{q} \in [\frac{y}{x}, \sqrt{2})$, luego $(q, p) \in S$ y, como $(q, 0) \in S$ y $p > q\frac{y}{x}$, $(q, q\frac{y}{x}) \in ecS$ y $(q\frac{x}{q}, q\frac{y}{q}) = (x, y) \in ecS$, luego $C \subseteq ecS$. Así, $C = ecS$, pero C no es un poliedro.

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{Q})$, $b \in \mathbb{Q}^m$ y $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, si $P_I := ec(P \cap \mathbb{Z}^n) \neq \emptyset$, para $c \in \mathbb{R}^n$, $\{c \cdot x\}_{x \in P_I}$ está acotado superiormente si y sólo si lo está $\{c \cdot x\}_{x \in P}$.

6.1. Matrices totalmente unimodulares

OL

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rango m (por tanto $m \leq n$), $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$. [...] Llamamos A_1, \dots, A_n a las columnas de A [...].

Dado $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, la submatriz $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ formada por las columnas de A con índice en S es **básica** si es de rango máximo. Entonces, de las variables x_1, \dots, x_n , [...] x_k es una **variable básica** [...] si $k \in S$ [...] ([...] N es la submatriz formada por las columnas de A con índice no en S).

[...] Si $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ y $\{1, \dots, n\} \setminus S = \{t_1, \dots, t_{n-m}\}$ con $s_1 < \dots < s_m$ y $t_1 < \dots < t_{n-m}$, llamamos $x_B := (x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$, $x_N := (x_{t_1}, \dots, x_{t_{n-m}})$, $\mathbf{b}(x_1, \dots, x_m) = \sum_k e_{s_k} x_k$ y $\mathbf{n}(x_1, \dots, x_{n-m}) := \sum_k e_{t_k} x_k$, $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$, $\mathbf{n} \in \mathcal{M}_{n \times (n-m)}(\mathbb{R})$. [...]

Llamamos **solución básica** a [...] $x \in \{Ax = b\}$ con $x_N = 0$ y, por tanto, [...] $x_B = B^{-1}b$, y [...] es **factible** si $x \geq 0$.

Dado $F := \{Ax = b, x \geq 0\}$, $x \in F$ es un punto extremo si y sólo si es una solución básica factible. Además, si $F \neq \emptyset$, existe al menos un punto extremo.

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es **unimodular** si tiene rango máximo, todos sus coeficientes son enteros y el determinante de cualquier submatriz cuadrada de tamaño máximo es 1, 0 o -1 , y es **totalmente unimodular** si el determinante de cualquier submatriz cuadrada es 1, 0 o -1 , de modo que todas sus entradas son 1, 0 o -1 .

Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es **entero** si todos sus puntos extremos están en \mathbb{Z}^n .

Lema de Veinott-Dantzig: Si $m < n$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ de rango m es unimodular si y sólo si para cada $b \in \mathbb{Z}^m$, $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ es entero.

\implies] Sea x un punto extremo de Q , x es una solución básica factible y tiene forma $x =: \mathbf{b}B^{-1}b$ para cierta submatriz $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{Z})$ no singular de A . La adjunta de B también tiene coeficientes enteros, y como $|B| \in \{\pm 1\}$, $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj} B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{Z})$ y $x \in \mathbb{Z}^n$.

\impliedby] Sea $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{Z})$ una submatriz no singular de A y queremos ver que $|B| \in \{\pm 1\}$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$, sean $y \in \mathbb{Z}^m$ tal que $z := y + (B^{-1})_i \geq 0$ y $b := Bz = By + e_i$, $b \in \mathbb{Z}^m$ al tener B , y y e_i todos los coeficientes enteros, luego $Q := \{Ax = b, x \geq 0\}$ es entero y $x := \mathbf{b}z = \mathbf{b}B^{-1}b$ es una solución básica factible de $\{Ax = b, x \geq 0\}$ y por tanto un punto extremo de Q , de modo que $x = \mathbf{b}(y + (B^{-1})_i) \in \mathbb{Z}^m$, $(B^{-1})_i \in \mathbb{Z}^m$ y, como i es arbitrario, $B^{-1} \in \mathbb{Z}^m$. Ahora bien, como B y B^{-1} son enteras y $|B||B^{-1}| = 1$, $|B| \in \{1, -1\}$.

Teorema de Hoffman-Kruskal: $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ con $m \leq n$ es totalmente unimodular si y sólo si para $b \in \mathbb{Z}^m$, el poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ es entero.

\implies] Dada una submatriz $B \in \mathcal{M}_m$ de $[A, I]$ no singular, si B es submatriz de A , claramente $|B| \in \{\pm 1\}$, y en otro caso, desarrollando por columnas, $|B| = |B'|$ para alguna submatriz B' de B y de A , por lo que $|B| \in \{\pm 1\}$. Entonces $[I, A]$ es unimodular, con lo que $Q := \{[x, y] \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + Iy = b, [x, y] \geq 0\}$ es entero. Sea ahora $[x, y] \in Q$ ($x \in \mathbb{R}^n$), claramente $y = b - Ax$, por lo que la proyección de Q en $\mathbb{R}^n \times 0_{\mathbb{R}^m}$ es $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid b = b, x \geq 0, b - Ax \geq 0\} = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$. Así, dado un punto extremo $x \in P$, $[x, b - Ax] \in Q$ es un punto extremo, pues si no lo fuera existirían $U := [u, b - Au], V := [v, b - Av] \in Q$ distintos y $t \in (0, 1)$ con $(1-t)U + tV = [x, b - Ax]$ y $(1-t)u + tv = x$, y como $u, v \in P$, x no sería punto extremo. Entonces $[x, b - Ax] \in \mathbb{Z}^{n+m}$ y $x \in \mathbb{Z}^n$.

\impliedby] Sean $b \in \mathbb{Z}^m$, $P := \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, $Q := \{[x, y] \mid Ax + y = b, [x, y] \geq 0\}$ y $[x, y] \in Q$, claramente $y = b - Ax$, y si $[x, y]$ es punto extremo de Q , x lo es de P , pues si no lo fuera habrían $u, v \in P$ distintos y $t \in (0, 1)$ con $(1-t)u + tv = x$, pero $[u, b - Au], [v, b - Av] \in Q$ y por tanto $[x, y]$ no sería punto extremo de Q . Así, como P es entero, Q también, luego $[A, I]$ es unimodular. Sea entonces B una submatriz cuadrada de A , añadiendo a B las filas de A que no se han tomado para B y las columnas de I que valen 1 en esas filas, obtenemos una submatriz B' de $[A, I]$ de tamaño m y, desarrollando por columnas de I , tenemos que $|B'| = |B|$, pero por ser $[A, I]$ unimodular, $|B| = |B'| \in \{1, 0, -1\}$.

6.2. Caracterizaciones de matrices unimodulares

Como **teorema**, una matriz A es totalmente unimodular si y sólo si lo es A^t , si y sólo si lo es $[A, I]$, si y sólo si lo es el resultado de añadir o quitar de A una fila o columna igual a e_i para algún i , si y sólo si lo es el resultado de multiplicar una fila o columna de A por -1 , si y sólo si lo es el resultado de intercambiar dos filas o columnas de A , si y sólo si lo es el resultado de duplicar una columna o fila de A .

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es **euleriana** si en cada fila o columna la suma de los elementos es par. Como **teorema**, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{1, 0, -1\})$ es totalmente unimodular si y sólo si la suma de los elementos de cada submatriz cuadrada euleriana de A es múltiplo de 4, si y sólo si para cada $F \subseteq \{1, \dots, m\}$ existe $F_1 \subseteq F$ tal que, si $F_2 := F \setminus F_1$, para $j \in \{1, \dots, n\}$ es

$$\left| \sum_{i \in F_1} a_{ij} - \sum_{i \in F_2} a_{ij} \right| \leq 1.$$

Como **teorema**, si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{1, 0, -1\})$, ninguna columna de A tiene más de dos elementos no nulos y existe una partición $\{F_1, F_2\}$ de $\{1, \dots, m\}$ con elementos no necesariamente vacíos tal que, para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j, k \in \{1, \dots, m\}$, j y k están en el mismo conjunto de la partición si y sólo si a_{ji} y a_{ki} tienen el mismo signo, entonces A es totalmente unimodular. En particular A es totalmente unimodular si en cada columna tiene a lo sumo un coeficiente $+1$ y otro -1 .

Una **matriz de intervalo** es una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{0, 1\})$ tal que para $j \in \{1, \dots, n\}$ e $i, k \in \{1, \dots, m\}$ con $i < k$, si $a_{ij} = a_{kj} = 1$, entonces $a_{hj} = 1$ para todo $i \leq h \leq k$. Toda matriz de intervalo es totalmente unimodular.

6.3. Modelos clásicos

Un **problema de asignación** consiste en asignar n tareas a n operarios, una tarea por operario, minimizando el tiempo total dada una matriz $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{\geq 0})$ en la que t_{ij} es el tiempo que tarda el operario i en realizar la tarea j . Si llamamos

$$x_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{el operario } i \text{ es asignado a la tarea } j; \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, podemos formular el problema como

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{ij} t_{ij} x_{ij} \\ & \sum_j x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \\ & \sum_i x_{ij} \geq 1, \quad \forall j \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \end{aligned}$$

Si las tareas se pueden hacer a la vez, lo que queremos minimizar es $\text{máx}_i \sum_j t_{ij} x_{ij}$, para lo que cambiamos la formulación a

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z \\ & \sum_j x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \\ & \sum_i x_{ij} \geq 1, \quad \forall j \\ & z - \sum_j t_{ij} x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \end{aligned}$$

Sean ahora $R := (V := \{1, \dots, n\}, E, \omega)$ una red y $s, t \in V$ distintos, y queremos encontrar un paseo de coste mínimo de s a t , lo que definiendo las variables

$$x_{ij} := \begin{cases} 1, & j \text{ aparece a continuación de } i \text{ en el camino;} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $(i, j) \in V \times V$ con $\{i, j\} \in E$, podemos formular como

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{ij} d_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(s,j) \in E} x_{sj} = 1, \\ & \sum_{(j,t) \in E} x_{jt} = 1, \quad \forall j \\ & \sum_{(i,v) \in E} x_{iv} - \sum_{(v,j) \in E} x_{vj} = 0, \quad \forall v \neq s, t \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \end{aligned}$$

Entonces el camino empieza en s , sigue en el único i con $x_{si} = 1$, luego en el único j con $x_{ij} = 1$, y así hasta llegar a t . La unicidad sabemos que se da si $\omega(e) \geq 0$ para todo e ; de lo contrario tenemos que añadir $\sum_{(i,v) \in E} x_{iv} \leq 1, \forall v \neq s, t$.

Para obtener el árbol generador minimal de R , $T = (V, E_T)$, llamamos $x_{ij} := \chi_{E_T}(i, j)$ para $(i, j) \in E$, y formulamos el problema como

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = |V| - 1 \\ & \sum_{(i,j) \in E_S} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall S \subsetneq V : |S| \geq 3 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \end{aligned}$$

En efecto, la primera condición nos asegura que T tenga $|V| - 1$ ejes y la segunda que no tenga ciclos salvo, quizá, uno con todos los vértices de V , lo que la primera condición ya descarta, y esto caracteriza un árbol. La relajación lineal de este problema da una solución entera.

Otra posible formulación, con las mismas variables resulta de cambiar la segunda condición por $\sum_{(i,j) \in [S, V \setminus S]} x_{ij} \geq 1, \forall S \subsetneq V : S \neq \emptyset$, pues esto nos da la conexión y, junto con la primera condición, caracteriza al árbol. La relajación lineal no tiene por qué dar una solución entera.

Para el problema del viajante de comercio sobre una red completa $R := (V := \{0, \dots, n - 1\}, E := \{\{i, j\}\}_{i, j \in V, i \neq j}, d)$, existen varias formulaciones:

1. Formulación de Dantzig-Fulkerson-Johnson: Sea

$$x_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{el ciclo tiene } i \text{ y a continuación } j; \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $(i, j) \in V \times V$ con $\{i, j\} \in E$, el problema es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{ij} d_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = 1, \quad \forall i \\ & \sum_{(k,i) \in E} x_{ki} = 1, \quad \forall i \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \end{aligned}$$

Para obtener el camino, tomamos un nodo inicial i_0 , luego el único i_1 con $x_{i_0 i_1} = 1$, y luego repetimos hasta volver a i_0 . El ciclo resultante puede no ser hamiltoniano porque esta formulación permite subciclos estrictos, ciclos que no contienen a todos los nodos. Para evitar esto, podemos añadir la restricción $\sum_{e \in E_S} x_e \leq |S| - 1, \forall S \subsetneq V : |S| \geq 2$.

2. Si ahora las variables son

$$x_{ij} := \begin{cases} 1, & (i, j) \text{ está en el ciclo;} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $(i, j) \in E$, otra formulación es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_e d_e x_e \\ & \sum_{e \in N(v)} x_e = 2, \quad \forall v \\ & \sum_{e \in E_S} x_e \leq |S| - 1, \forall S \subsetneq V : |S| \geq 3 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \end{aligned}$$

El ciclo se obtendría tomando un nodo inicial i_0 , luego un i_1 con $x_{i_0 i_1} = 1$, luego un $i_2 \neq i_0$ con $x_{i_1 i_2} = 1$, etc. En estas formulaciones el número de restricciones crece exponencialmente con el número de vértices.

3. Formulación de Miller-Tucker-Zemlin: Las variables se definen como en la primera formulación con variables adicionales u_1, \dots, u_n . Llamando $n := |V|$:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i,j} d_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ & \sum_{(k,i) \in E} x_{ki} = 1 \quad \forall i \\ & u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\} : (i, j) \in E \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \\ & u_i \in \mathbb{R}^{>0} \quad \forall i \end{aligned}$$

Esto evita los ciclos que no contengan a 0, por lo que todos los nodos están en el mismo ciclo.

Sea x una solución factible, si x tuviera un ciclo que no contuviera al 0, como $12 \dots k1$, entonces $u_i - u_{i+1} + n \leq n - 1$ para $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $u_k - u_1 + n \leq n - 1$, y sumando todo queda $kn \leq kn - 1\#$. Recíprocamente, sea x la representación por variables de un ciclo hamiltoniano, llamamos $u_i := t$ si i es el t -ésimo vértice visitado en el ciclo después del 0. Entonces, para $(i, j) \in E$ con $i, j \neq 0$, si $x_{ij} = 0$, $u_i - u_j < u_i \leq n - 1$, y si $x_{ij} = 1$, $u_j = u_i + 1$, $u_i - u_j = -1$ y $u_i - u_j + n = n - 1$, y en ambos casos la tercera condición se cumple.

6.4. Situaciones generales

Si tenemos m restricciones $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ de las que queremos que se verifiquen al menos $k < m$, tomamos M lo suficientemente grande, añadimos las variables $y_1, \dots, y_m \in \{0, 1\}$ y añadimos las restricciones $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq M(1 - y_i)$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\sum_{i=1}^m y_i \geq k$.

Dadas dos variables $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, para definir una variable $y := [x_1 > x_2]$ ($y = 1$ si $x_1 > x_2$ e $y = 0$ en otro caso), tomamos M lo suficientemente grande y añadimos $x_1 - x_2 - My \leq 0$, $x_2 - x_1 + (1 + M)y \leq M$ e $y \in \{0, 1\}$. De esta forma, si $x_1 > x_2$, con $y = 1$ tenemos $x_1 - x_2 - M \leq 0$ y $x_2 - x_1 + (1 + M) \leq -1 + 1 + M = M$ pero con $y = 0$ tenemos $x_1 - x_2 > 0\#$, y si $x_1 \leq x_2$, con $y = 0$ tenemos $x_1 - x_2 \leq 0$ y $x_2 - x_1 \leq M$ pero con $y = 1$ tenemos $x_2 - x_1 + 1 + M \geq 1 + M > M\#$.

Dadas dos variables reales x_1 y x_2 , para definir $z \geq \text{mín}\{x_1, x_2\}$, hacemos que se cumpla una de $z \geq x_1$ y $z \geq x_2$, y para definir $z \leq \text{máx}\{x_1, x_2\}$, hacemos que se cumpla una de $z \leq x_1$ y $z \leq x_2$.

Si $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$, para definir $y := \text{mín}\{x_1, x_2\}$ añadimos $y \leq x_1$, $y \leq x_2$, $y \geq x_1 + x_2 - 1$ e $y \in \{0, 1\}$, y para definir $y := \text{máx}\{x_1, x_2\}$ añadimos $y \geq x_1$, $y \geq x_2$, $y \leq x_1 + x_2$ e $y \in \{0, 1\}$.

Capítulo 7

Resolución de problemas de programación lineal entera

OL

Algoritmo del s3mplex [...] para minimizar es el Algoritmo 12. Si quisi3ramos maximizar, [...] minimizar3ramos q_k [...] y [...] har3ramos las comparaciones opuestas [con los q_k]. [...] Se suele hacer con una **tabla del s3mplex** como la siguiente:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 | & | & & & | \\
 c_B & \sigma & & Y & x_B \\
 | & | & & & | \\
 \hline
 & & - & q & - \\
 & & & & z
 \end{array}$$

En esta, z es el coste total. [...] Para pasar de la tabla del s3mplex de una iteraci3n a la de la [...] siguiente, basta conseguir una matriz identidad en las columnas correspondientes a la base haciendo operaciones por filas en la submatriz $(Y \mid x_B)$, asegur3ndose de que $x \geq 0$, y calcular q y z . [...] Si $\sigma(i) = k$, en vez de k escribimos x_k .

Un punto extremo x asociado a una base B es **degenerado** si existe $i : B$ con $x_i = 0$; entonces [...] se pivotar3 el elemento, se tendr3 $\frac{x_i}{y_{\sigma^{-1}(i)k}} = 0$ y x valdr3 lo mismo en la siguiente iteraci3n. Tamb3n se puede dar **ciclaje**, consistente en ir cambiando de base de forma c3clica. [...] Se puede evitar usando la **regla de Bland**: [...] [Si k obtenido cumple $q_k > 0$,] se establece k al menor 3ndice con $q_k > 0$, y si hay varios r que minimizan $\frac{x_{\sigma(r)}}{y_{rk}}$, se elige el de menor $\sigma(r)$.

[...] Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rango m , $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $F := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ y $P := \{c \cdot x\}_{x \in F}$. Para encontrar una base inicial para el s3mplex, por cada $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que e_k no es una columna de A , a3adimos una columna al final de A con valor e_k .

Si [...] $T \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$ es la matriz formada por las columnas a3adidas, escribimos $F^* := \{[x, x^*] \in \mathbb{R}^{n+p} \mid Ax + Tx^* = b, [x, x^*] \geq 0\}$ y vemos que $x \in F \iff [x, 0_{\mathbb{R}^p}] \in F^*$. Los elementos de x^* son las **variables artificiales**, y x^* es el **vector de variables artificiales**.

Entrada: Problema $\min\{c \cdot x\}_{Ax=b, x \geq 0}$ dado por $m, n \in \mathbb{N}^*$ con $m < n$,
 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ con $b \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Salida: Dirección de ilimitación $d \in \mathbb{R}^n$, conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ de puntos óptimos o \emptyset si el problema es infactible. Puede no terminar.

función $\text{params}(\sigma)$

$T \leftarrow [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]^{-1};$
devolver $(T, \mathbf{b}Tb);$ // Para la notación, $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$.

función $\text{interpretar}(\sigma, Y, x, q)$

$S \leftarrow \{x\};$
 $D \leftarrow \{0\};$
para $k : N$ *con* $q_k = 0$ **hacer**
 si $Y_k \leq 0$ **entonces** $D \leftarrow D \cup \{e_k - \mathbf{b}Y_k\};$
 sinó $S \leftarrow S \cup \{x + \min_{r \in \{1, \dots, m\}, y_{rk} > 0} \frac{x_{\sigma(r)}}{y_{rk}} (e_k - \mathbf{b}Y_k)\};$
devolver $\{x + \lambda u\}_{x \in cS, u \in D, \lambda \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n;$

para cada *subsecuencia* $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ **hacer**

si $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ *son linealmente independientes* **entonces**
 $(T, x) \leftarrow \text{params}(\sigma);$
 si $x \geq 0$ **entonces salir;**

si no se ha obtenido $x \geq 0$ **entonces devolver** $\emptyset;$

repetir

$Y \leftarrow TA;$
 $q \leftarrow c_B^t Y - c;$
Tomar $k : N$ con q_k máximo;
si $q_k \leq 0$ **entonces**
 devolver $\text{interpretar}(\sigma, Y, x, q);$
sinó, si $Y_k \leq 0$ **entonces**
 devolver $e_k - \mathbf{b}Y_k \in \mathbb{R}^n;$
sinó
 Tomar $r \in \{1, \dots, m\}$ con $y_{rk} > 0$ y $\frac{x_{\sigma(r)}}{y_{rk}}$ mínimo;
 Pivotar: $\sigma(r) \leftarrow k;$
 $(T, x) \leftarrow \text{params}(\sigma);$

Algoritmo 12: Algoritmo del s3mplex para minimizar.

[...] **[Método de las dos fases:]** La primera fase consiste en hallar $\min\{\sum_i x_i^* \mid Ax + Tx^* = b, [x, x^*] \geq 0\}$. Si el resultado es distinto de 0, [...] el problema no es factible. Para la segunda fase:

1. Si la tabla del simplex al final de la primera fase no incluye variables artificiales básicas, tenemos una base de A , [...] eliminar las variables artificiales y maximizar o minimizar P [...].
2. Si hay variables artificiales básicas, [...] eliminar las filas con variables artificiales y estaríamos en el primer caso.

[Método de penalización:] Sea $M > 0$ lo suficientemente grande, definimos $P_M := \{c \cdot x + M \sum_i x_i^*\}_{[x, x^*] \in F^*}$ si estamos minimizando o $P_{-M} := \{c \cdot x - M \sum_i x_i^*\}_{[x, x^*] \in F^*}$ [si maximizamos]. [...] Así:

- Si hay soluciones óptimas $[x, x^*]$, las soluciones con $x^* = 0$ son soluciones del problema original. Si no hay [...] de este tipo, el problema no es factible.
- Si hay dirección de ilimitación $[d, d^*]$, sea $[x, x^*]$ la solución básica asociada a la tabla del simplex:
 - Si $x^* = 0$, d es dirección de ilimitación del problema [...]. [...]
 - Si $x^* \neq 0$, en general no podemos decir nada.

Entrada: Problema $\min\{c \cdot x\}_{Ax=b, x \geq 0}$.

Salida: Como en el algoritmo 12

Encontrar una subsecuencia $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que

$B := [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$ es dual factible (si no la hay, este algoritmo no es aplicable);

$(T, x) \leftarrow \text{params}(\sigma)$;

mientras $x < 0$ **hacer**

$Y \leftarrow TA$;

Tomar r con $x_{\sigma(r)} < 0$;

si $\forall j : N, y_{rj} \geq 0$ **entonces devolver** \emptyset ;

$q \leftarrow c_B^t Y - c$;

Tomar k con $y_{rk} < 0$ y $\frac{q_k}{y_{rk}}$ mínimo;

si $q_k \leq 0$ **entonces devolver interpretar** (σ, Y, x, q, k) ;

$\sigma(\sigma^{-1}(r)) \leftarrow k$;

$(T, x) \leftarrow \text{params}(\sigma)$;

devolver interpretar (σ, Y, x, q) ;

Algoritmo 13: Algoritmo dual del simplex para minimizar.

Dado un problema de programación lineal $\min_{Ax=b, x \geq 0} \{c \cdot x\}$, una matriz básica B es **dual factible** si $(c_B B^{-1} A - c)_N \leq 0$. El **algoritmo dual del simplex** es el algoritmo 13.

Supongamos que tenemos una tabla de simplex óptima con parámetros Y, x, q, σ y queremos añadir al problema una restricción $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \beta$. Si $\alpha_j = 0$ para todo $j : B$, podemos añadir la restricción directamente a la tabla añadiendo lo siguiente, donde $t := \beta - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ y x^*

es el valor óptimo de x calculado antes:

c_B	σ	Y			0	x^*
0	x_{n+1}	$-$	α	$-$	1	t
		$-$	q	$-$	0	z

Queda una base dual factible de la que sacar la solución con el algoritmo dual. Si la restricción tiene variables básicas, tenemos que cambiarlas por sus expresión respecto a las no básicas con la fórmula $x_{\sigma(i)} = x_{\sigma(i)}^* - \sum_{j:N} y_{ij}x_j$.

7.1. Ramificación y acotación

La **ramificación y acotación** (*branch and bound*) es un algoritmo para resolver problemas de programación lineal entera. Primero resolvemos el problema relajado para obtener una solución (x_1^*, \dots, x_n^*) . Si en ella todas las variables que debían ser enteras lo son, la solución es óptima, y si existe k tal que x_k^* debería ser entera pero es fraccionaria, creamos dos subproblemas introduciendo las restricciones $x_k \leq \lfloor x_k^* \rfloor$ en uno y $x_k \geq \lceil x_k^* \rceil$ en el otro. Como x_k es básica, se puede introducir la nueva restricción fácilmente en la tabla del símplex óptima obteniendo una tabla con base dual factible.

Esto nos da un árbol de subproblemas cuyas hojas son problemas infactibles o cuya solución es solución del problema entero, y que hemos de explorar. La **solución incumbente** es la mejor solución del problema entero encontrada hasta ahora, y su valor es el **valor incumbente**. Podemos podar los nodos con valor óptimo del problema relajado menor o igual que el valor incumbente, pues los valores de sus hijos no van a ser mejores. Como optimización, en vez de añadir una restricción $x_k \leq 0$, podemos eliminar x_k del subproblema.

Aunque esto no es «estándar», si todos los coeficientes de la función objetivo son enteros y todos los no nulos van con una variable entera, todas las soluciones tendrán valor entero y, si un nodo tiene un valor mejor que el incumbente pero con una diferencia menor que 1, podemos podarlo, pues no va a producir una solución mejor del problema entero.

La mayoría de los programas de optimización recorren el árbol de subproblemas con *backtracking*, lo que suele dar soluciones factibles antes que la búsqueda en anchura. También se puede usar búsqueda primero el mejor, por ejemplo.

Cuando hay varias variables por las que se puede ramificar, una elección adecuada puede acelerar la resolución del problema. Algunas heurísticas son elegir la variable con mayor valor fraccionario, la de valor fraccionario más cercano a $\frac{1}{2}$ o la que más influye en la función objetivo.

7.2. Hiperplanos de corte

Un **hiperplano de corte** o **desigualdad válida** de un problema lineal entero es una desigualdad que cumplen todos sus puntos factibles. Se puede usar para mejorar las cotas en los nodos del árbol de ramificación. Llamamos $[[x]] := x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

Dados un problema entero puro $\min_{Ax=b, x \in \mathbb{N}^n} \{c \cdot x\}$ con tabla del símplex óptima para la

relajación lineal con coeficientes (σ, Y, x^*, q) y k tal que $x_{k' := \sigma(k)}^* \notin \mathbb{Z}$, entonces

$$-\sum_{j:N} [[y_{kj}]] x_j \leq -[[x_{k'}^*]]$$

es una desigualdad válida del problema entero que x^* no satisface. **Demostración:** Por la fórmula usada antes para añadir una restricción con variables básicas, para $x \in P$, $x_{k'} + \sum_{j:N} y_{kj} x_j = x_{k'}^* + [[x_{k'}^*]]$, luego $x_{k'} + \sum_{j:N} ([y_{kj}] + [[y_{kj}]]) x_j = [x_{k'}^*] + [[x_{k'}^*]]$ y $x_{k'} + \sum_{j:N} [y_{kj}] x_j - [x_{k'}^*] = -\sum_{j:N} [[y_{kj}]] x_j + [[x_{k'}^*]] \leq [[x_{k'}^*]] < 1$, y como la parte izquierda de la igualdad es entera, la derecha también y por tanto $-\sum_{j:N} [[y_{kj}]] x_j + [[x_{k'}^*]] \leq 0$. Despejando para x^* quedaría $0 \leq -[[x_{k'}^*]]$, pero $[[x_{k'}^*]] \in (0, 1)$ porque $x_{k'}^* \notin \mathbb{Z}$.

Dados un problema entero puro $\min_{Ax=b, x \geq 0, \forall i \in I, x_i \in \mathbb{Z}} \{c \cdot x\}$ con tabla del simplex óptima para la relajación lineal con coeficientes (σ, Y, x^*, q) y $k \in I$ tal que $k' := \sigma(k) \in I$ y $x_{k' := \sigma(k)}^* \notin \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{j \in N^-} \frac{[[x_{k'}^*]]}{1 - [[x_{k'}^*]]} y_{kj} x_j - \sum_{j \in N^+} y_{kj} x_j \leq -[[x_{k'}^*]]$$

es una desigualdad válida del problema entero no satisfecha por x^* . **Demostración:** Para x factible, como $x_{k'} + \sum_{j:N} y_{kj} x_j = x_{k'}^* = [x_{k'}^*] + [[x_{k'}^*]]$, entonces $x_{k'} - [x_{k'}^*] = -\sum_{j:N} y_{kj} x_j + [[x_{k'}^*]]$. Así, si $x_{k'} \leq [x_{k'}^*]$, $-\sum_{j:N} y_{kj} x_j + [[x_{k'}^*]] \leq 0$ y $-\sum_{j \in N^+} y_{kj} x_j - \sum_{j \in N^-} y_{kj} x_j \leq -[[x_{k'}^*]]$, pero $\sum_{j \in N^-} y_{kj} x_j \geq 0$, luego $-\sum_{j \in N^+} y_{kj} x_j \leq -[[x_{k'}^*]]$ y además $\sum_{j \in N^-} \frac{[[x_{k'}^*]]}{1 - [[x_{k'}^*]]} y_{kj} x_j \leq 0$, de donde se obtiene la desigualdad. Por otro lado, si $x_{k'} > [x_{k'}^*]$, entonces $x_{k'} \geq [x_{k'}^*] + 1$, de modo que $-\sum_{j:N} y_{kj} x_j + [[x_{k'}^*]] \geq 1$ y $-\sum_{j \in N^+} y_{kj} x_j - \sum_{j \in N^-} y_{kj} x_j \geq 1 - [[x_{k'}^*]]$. Con esto, como $-\sum_{j \in N^+} y_{kj} x_j \leq 0$, se tiene $-\sum_{j \in N^-} y_{kj} x_j \geq 1 - [[x_{k'}^*]]$ y, multiplicando por $-\frac{[[x_{k'}^*]]}{1 - [[x_{k'}^*]]}$, $\sum_{j \in N^-} \frac{[[x_{k'}^*]]}{1 - [[x_{k'}^*]]} y_{kj} x_j \leq -[[x_{k'}^*]]$, de donde se obtiene la desigualdad usando $-\sum_{j \in N^+} y_{kj} x_j \leq 0$.

El **método de los hiperplanos de corte de Gomory** consiste en hallar sucesivamente un hiperplano de corte de una de las dos formas anteriores, según si el problema es entero puro o mixto, añadirlo al problema y re-optimizar (con el método dual del simplex) hasta llegar a una solución entera. Si hay varios índices k candidatos, se elige el que tiene $[(x_B^*)_k]$ más cercano a $\frac{1}{2}$.

Si los coeficientes de A y b no son enteros sino racionales, se pueden multiplicar restricciones o variables apropiadamente para convertirlos en enteros antes de empezar. Lo de que A y b sean enteros se usa para que, al añadir las variables de holgura de las desigualdades, estas sean enteras.

7.3. Desigualdades de Chvátal-Gomory

Dado un problema entero puro con conjunto factible $P := \{Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, para $u \in \mathbb{R}^m$ con $u \geq 0$, $[u^T A]x \leq [u \cdot b]$ es una desigualdad válida del problema. Las desigualdades de esta forma se llaman **desigualdades de Chvátal-Gomory**, y toda desigualdad válida de P se puede obtener utilizando el procedimiento de obtener y añadir una desigualdad de este tipo al problema un número finito de veces.