

Métodos Numéricos de las Ecuaciones Diferenciales

Copyright © 2020 Juan Marín Noguera, juan.marinn@um.es.

Esta obra está bajo la licencia Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons (CC-BY-SA 4.0). Para ver una copia de esta licencia, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

Bibliografía:

- F. Esquembre (2020). Notas de clase.
- Wikipedia, the Free Encyclopedia (<https://en.wikipedia.org/>). *Runge-Kutta methods, Backward Differentiation Formula*.

Capítulo 1

Introducción

Un **problema de valores iniciales** real es uno de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

dado por $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con Ω abierto y $(t_0, x_0) \in \Omega$, y donde $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la incógnita, siendo I un entorno de t_0 .

El problema está **bien planteado** en un intervalo $[a, b] \subseteq I$ si tiene solución única en $[a, b]$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es tal que $|e(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a, b]$, entonces el **problema perturbado**

$$\begin{cases} \dot{z} = f(t, z) + e(t), \\ z(t_0) = x_0 + c, \end{cases}$$

tiene solución única.

Como **teorema**, si $D := [a, b] \times \mathbb{R}$, $t_0 \in [a, b]$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y lipschitziana en la segunda variable en todo D , entonces

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

está bien planteado.

En adelante supondremos que el dominio de x incluye un intervalo $[a, b]$ y $t_0 = a$. No siempre se puede resolver un problema de valores iniciales de forma analítica, por lo que usamos métodos de resolución numérica, que aproximan $x|_{[a, b]}$ creando una partición $a = t_0 < \dots < t_n = c$, para un cierto $c \geq b$ con $[a, c]$ en el dominio de x , y obtienen una secuencia $(\omega_i)_{i=0}^n$ que aproxima $(x(t_i))_{i=0}^n$ con un error $\max_{i=0}^n \|x(t_i) - \omega_i\|$ aceptable. Los valores de x en el resto de puntos de $[a, b]$ se obtienen por interpolación.

CN

Si el polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_n es $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, llamamos

$f[x_0, \dots, x_n] := a_n \cdot [\dots] f[x] = f(x) \cdot [\dots]$ Para $n \geq 1$,

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

[...] Una forma de hallar $f[x_0, \dots, x_n]$ es usando una tabla triangular que se va llenando por columnas, donde la primera columna contiene los x_k , la segunda, los $f(x_k)$, [...], y la j -ésima, los $f[x_{k-j+1}, \dots, x_k]$, llegando a $f[x_0, \dots, x_n]$ en la $(n+1)$ -ésima fila.

[...] **Forma de Newton** del polinomio interpolador, [...]

$$f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Para cálculo computacional es más apropiada la forma anidada,

$$f[x_0] + (x - x_0)(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] + \dots)).$$

[...] Un **problema de Hermite** consiste en hallar un polinomio P de grado N tal que, para $k \in \{0, \dots, m\}$ y $x \in S_k$, $P^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$.

Existe un único polinomio de grado máximo $\sum_{k=0}^m |S_k|$ que cumpla las condiciones, y podemos hallarlo mediante **diferencias divididas generalizadas**. Si $x_0 \leq \dots \leq x_n$, [...]

$$f[x_0, \dots, x_n] := \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & x_0 < x_n; \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & x_0 = \dots = x_n. \end{cases}$$

Creamos una tabla de diferencias divididas en la que cada elemento $x \in S_0$ aparece tantas veces como conjuntos de entre S_0, \dots, S_m lo contienen, y expresamos el polinomio resultante [...] en forma de Newton.

Capítulo 2

Métodos de paso fijo

Dado un problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = x_0, \end{cases}$$

los **métodos de paso fijo** toman un **paso** $h > 0$ y particionan $[a, b]$ con $t_i := a + hi$, aunque esto se suele calcular como $t_0 = a$ y $t_i = t_{i-1} + h$ para $i \geq 1$.

2.1. Método de Euler

El **método de Euler** viene dado por $\omega_0 := x_0$ y $\omega_{i+1} := \omega_i + hf(t_i, \omega_i)$. Para obtener el valor para un $t \in (t_{i-1}, t_i)$, podemos interpolar con el propio método, lo que si se hace desde t_{i-1} equivale a una interpolación lineal o una interpolación de Newton en los puntos (t_{i-1}, ω_{i-1}) y (t_i, ω_i) .

Teorema de convergencia del método de Euler: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto conexo, $x_0 \in \mathbb{R}$ con $(a, x_0) \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana en D en la segunda variable con constante de lipschitzianidad $K \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $h := \frac{b-a}{n}$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

con $\ddot{x}(D)$ acotada por un $C \geq 0$, $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n$ los puntos dados por el método de Euler con paso h para dicho problema con redondeo, dado por

$$\begin{cases} \omega_0 := x_0 + \delta_0, \\ \omega_{i+1} := \omega_i + hf(t_i, \omega_i) + \delta_{i+1}, \end{cases}$$

con cada $|\delta_i| < \delta$ para un cierto $\delta \geq 0$, y $x_i := x(t_i)$ para cada i , entonces

$$\max_{0 \leq i \leq n} |x_i - \omega_i| \leq e^{(b-a)K} \delta + \left(\frac{e^{(b-a)K} - 1}{K} \right) \left(\frac{1}{2}Ch + \frac{\delta}{h} \right).$$

En particular, sin redondeo el método de Euler tiene una precisión de $O(h)$. **Demostración:** Por Taylor,

$$x_{i+1} = x(t_i + h) = x(t_i) + h\dot{x}(t_i) + \frac{1}{2}h^2\ddot{x}(\xi_i) = x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{1}{2}h^2\ddot{x}(\xi_i)$$

para algún $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Queremos ver que, para $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$|x_i - \omega_i| \leq (1 + hK)^i \delta + \sum_{j=0}^{i-1} (1 + hK)^j \left(\frac{1}{2}Ch^2 + \delta \right).$$

Para $i = 0$ esto es obvio, y supuesto esto probado para un $i \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} |y_{i+1} - \omega_{i+1}| &= \left| (y_i - \omega_i) + h(f(t_i, y_i) - f(t_i, \omega_i)) + \frac{1}{2}h^2\ddot{y}(\xi_i) - \delta_{i+1} \right| \\ &\leq |y_i - \omega_i| + h|f(t_i, y_i) - f(t_i, \omega_i)| + \frac{1}{2}h^2|\ddot{y}(\xi_i)| + |\delta_{i+1}| \\ &\leq (1 + hK)|y_i - \omega_i| + \frac{1}{2}Ch^2 + \delta \\ &\leq (1 + hK) \left((1 + hK)^i \delta + \sum_{j=0}^{i-1} (1 + hK)^j \left(\frac{1}{2}Ch^2 + \delta \right) \right) + \frac{1}{2}Ch^2 + \delta \\ &= (1 + hK)^{i+1} \delta + \sum_{j=0}^i (1 + hK)^j \left(\frac{1}{2}Ch^2 + \delta \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, $\sum_{j=0}^i (1 + hK)^j = \frac{(1+hK)^{i+1} - 1}{(1+hK) - 1} = \frac{(1+hK)^{i+1} - 1}{hK}$, y para $t \in \mathbb{R}$, existe ξ con $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2}e^\xi \geq 1 + t$ y por tanto $(1 + t)^n \leq e^{nt}$, luego en particular $(1 + hK)^{i+1} \leq (1 + hK)^n \leq e^{hKn} = e^{(b-a)K}$ y

$$|y_i - \omega_i| \leq e^{(b-a)K} + \frac{e^{(b-a)K} - 1}{hK} \left(\frac{1}{2}Ch^2 + \delta \right).$$

Si $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase \mathcal{C}^3 , $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ son continuas y $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n$ son los puntos dados por el método de Euler en $[a, b]$ con paso h , $x_i - \omega_i = hD(t_i) + O(h^2)$, donde D es la solución del problema

$$\begin{cases} \dot{D}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))D(t) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t), \\ D(t_0) = 0. \end{cases}$$

De aquí, si $(t_i, \xi_i)_{i=0}^{2n}$ son los puntos dados por el método de Euler en $[a, b]$ con paso $\frac{h}{2}$,

$$1. |x_i - \xi_{2i}| = (\xi_{2i} - \omega_i) + O(h^2).$$

Como $x_i - \omega_i = hD(t) + O(h^2)$ y $x_i - \xi_{2i} = \frac{h}{2}D(t) + O(h^2)$, despejando, $x_i - 2\xi_i + \omega_i = O(h^2)$.

$$2. y_i := 2\xi_{2i} - \omega_i \text{ es un método de paso fijo } h \text{ de orden } O(h^2).$$

2.2. Métodos de Taylor

El **método de Taylor** de orden $p \in \mathbb{N}^*$ es el dado por $\omega_0 = x_0$ y

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \left(f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, \omega_i) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(t_i, \omega_i) \right),$$

donde $f^{(p)}(t_i, \omega_i)$ se define como $x^{(p+1)}(t_i)$ en el problema con la misma e.d.o. pero condición inicial $x(t_i) = \omega_i$. Por ejemplo,

$$f'(t_i) = \dot{x}(t_i) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, \omega_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, \omega_i) f(t_i, \omega_i),$$

El método de Euler es el método de Taylor de orden 1.

Dado un método de paso fijo de la forma $\omega_0 := \alpha$, $\omega_{i+1} := \omega_i + h\phi(t_i, \omega_i)$, llamamos **error local de truncamiento** en $i \in \{1, \dots, n\}$ a

$$\tau_i(h) := \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h} - \phi(t_{i-1}, x_{i-1}).$$

Como **teorema**, si $x \in \mathcal{C}^{(p+1)}[a, b]$, el error local de truncamiento del método de Taylor de orden p es $O(h^p)$. **Demostración:**

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + h) = x(t_i) + h\dot{x}(t_i) + \dots + \frac{h^p}{p!} x^{(p)}(t_i) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} x^{(p+1)}(\xi_i)$$

para un cierto $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, luego

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \left(\dot{x}(t_i) + \frac{h}{2} \ddot{x}(t_i) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} x^{(p)}(t_i) \right) = \frac{h^p}{(p+1)!} x^{(p+1)}(\xi_i),$$

pero $[a, b]$ es compacto y por tanto $x^{(p+1)}([a, b])$ es acotado, digamos, por M , por lo que $|\tau_{i+1}(h)| \leq \frac{M}{(p+1)!} h^p = O(h^p)$.

Decimos que un método de paso fijo es de orden p si su error local de truncamiento con $f \in \mathcal{C}^\infty$ es $O(h^p)$.

2.3. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Taylor tienen mucha precisión, pero requieren trabajo previo y son difíciles de reutilizar, por lo que intentamos «imitar» la precisión de estos con operaciones que no requieran derivar f . Los **métodos de Runge-Kutta** tienen la forma

$$\omega_{i+1} := \omega_i + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad k_1 := f(t_i, \omega_i), \quad k_{j>1} := f(t_i + c_j h, \omega_i + h(a_{j,1} k_1 + \dots + a_{j,j-1} k_{j-1})).$$

para ciertos $s \in \mathbb{N}$ y $(a_{ij})_{1 \leq j < i \leq s}$, $(b_j)_{j=1}^s$, $(c_i)_{i=2}^s$ reales. Estos métodos se pueden representar con una **tabla de Butcher**:

c_2	a_{21}			
c_3	a_{31}	a_{32}		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s,s-1}$
	b_1	b_2	\cdots	$b_{s-1} \quad b_s$

El **método del punto medio** tiene tabla

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array},$$

y es de orden 2. **Demostración:** Por Taylor,

$$\begin{aligned} f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)) &= f(t, x) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{h}{2} f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \\ &+ \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi_1, \mu_1) + \frac{h^2}{4} f(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(\xi_2, \mu_2) + \frac{h^2}{8} f(t, x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_3, \mu_3). \end{aligned}$$

El método de Taylor de orden 2 viene dado por $\omega_{i+1} = \omega_i + h(f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, \omega_i))$, pero

$$f(t, x) + \frac{h}{2}f'(t, x) = f(t, x) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{h}{2} f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x),$$

luego como las dobles derivadas parciales son continuas y por tanto su imagen por $[a, b]$ es compacta, la diferencia de error local entre ambos métodos es $O(h^2)$, que se suma al error de $O(h^2)$ del método de Taylor de orden 2.

No existe un método de Runge-Kutta de orden 3 con solo 2 evaluaciones de f .

Demostración: Como

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x}, \\ f'' &= \frac{\partial f'(t, x(t))}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

el método de Taylor de orden 3 es $\omega_{i+1} = \omega_i + h\Phi(t_i, \omega_i)$, con

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) &= f(t, x) + \frac{h}{2}f'(t, x) + \frac{h^2}{6}f''(t, x) \\ &= f + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

pero los métodos de 2 evaluaciones tienen la forma

$$\begin{aligned} b_1 f(t, x) + b_2 f(t + c_2, x + a_{21}f(t, x)) &= \\ = b_1 f + b_2 f + b_2 c_2 \frac{\partial f}{\partial t} + b_2 a_{21} f \frac{\partial f}{\partial x} + b_2 \frac{a_{21}^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + b_2 c_2 a_{21} f \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + b_2 \frac{a_{21}^2}{2} f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(h^3). \end{aligned}$$

Para que ambas coincidieran en los términos hasta el orden 2, la última fórmula debería tener un término proporcional a $f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$, pero no lo tiene.

Otros métodos son el **método de Euler modificado**, con tabla

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array},$$

y el **método de Heun**, con tabla

$$\begin{array}{c|cc} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array},$$

ambos de orden 2.

El método de Runge-Kutta más usado es el de orden 4 (**RK4**):

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

La siguiente tabla muestra el máximo orden alcanzable con métodos de Runge-Kutta en función del número de evaluaciones de f :

Evaluaciones (s)	≤ 4	5-7	8-9	≥ 10
Mejor orden	s	$s - 1$	$s - 2$	$s - 3$

Capítulo 3

Métodos de paso variable

Dados un problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

y una solución aproximada $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n$ del problema, llamamos **solución local** z_i a la solución del problema

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = f(t, z_i(t)), \\ z_i(t_i) = \omega_i. \end{cases}$$

Como **teorema**, si f es lipschitziana de constante $k > 0$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|z_i(t_{i+1}) - \omega_{i+1}\| \leq \varepsilon(t_{i+1} - t_i)$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces

$$\|y(t_n) - \omega_n\| \leq e^{k(t_n - a)} \|y(t_0) - \omega_0\| + \frac{e^{k(t_n - a)} - 1}{k} \varepsilon.$$

Si el método es un **método en diferencias**, uno de la forma $t_{i+1} = t_i + h_i$ y $\omega_{i+1} = \omega_i + h_i \Phi(t_i, \omega_i, h_i)$, y si $z_i(t_i) \cong x(t_i) \cong \omega_i$, el **criterio de error local** para algún $\varepsilon > 0$ e $i \in \{0, \dots, n-1\}$ consiste en que

$$\|\tau_{i+1}(h_i)\| := \frac{\|x(t_{i+1}) - x(t_i) - h_i \Phi(t_i, x(t_i), h_i)\|}{h_i} \leq \varepsilon.$$

Si $z_i(t_i) \cong x(t_i) \cong \omega_i$, se tiene

$$\|\tau_{i+1}(h_i)\| \approx \frac{\|z_i(t_{i+1}) - \omega_{i+1}\|}{h_i}.$$

Queremos ajustar el paso automáticamente para mantener el error local dentro de ciertos límites y economizar en número de cálculos.

3.1. Extrapolación de Richardson

Como **teorema**, si el método en diferencias $\omega_{i+1} = \omega_i + h_i \Phi(t_i, \omega_i, h_i)$ verifica en cada paso que $z_i(t_{i+1}) = \omega_{i+1} + cz_i^{(k+1)}(t_i)h^{k+1} + O(h^{k+2})$ para ciertos $c \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, sean

$h := h_i$ y (t_{i+1}, Y) el resultado de dar dos pasos desde (t_i, ω_i) con el método de paso fijo $\xi_{j+1} = \xi_j + \frac{h}{2} \Phi(t_j, \xi_j, \frac{h}{2})$, entonces

$$z_i(t_{i+1}) = Y + 2cz_i^{(k+1)}(t_i) \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} + O(h^{k+2}).$$

En estas condiciones:

1.

$$z_i(t_{i+1}) = \frac{2^k Y - \omega_{i+1}}{2^k - 1} + O(h^{k+2}).$$

Multiplicando por 2^k el resultado del teorema y restando la fórmula de la hipótesis,

$$\begin{aligned} (2^k - 1)z_i(t_{i+1}) &= 2^k Y + 2^{k+1} cz_i^{(k+1)}(t_i) \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} - cz_i^{(k+1)}(t_i) h^{k+1} - \omega_{i+1} + O(h^{k+2}) \\ 2^k \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} &= h^{k+1} \\ &= 2^k Y - \omega_{i+1}. \end{aligned}$$

2.

$$z_i(t_{i+1}) - \omega_{i+1} = \frac{2^k}{2^k - 1} (Y - \omega_{i+1}) + O(h^{k+2}).$$

Restando ω_{i+1} a ambas partes de lo anterior.

Para un $\varepsilon > 0$, queremos que $\|z_i(t_{i+1}) - \omega_{i+1}\| < \varepsilon h_i$. El siguiente es un método práctico para dar un paso de tamaño adaptativo:

1. Dar un paso con h para obtener ω_{i+1} y dos con $\frac{h}{2}$ para obtener Y_h .
2. Obtener el error $E := \frac{2^k}{2^k - 1} \|Y - \omega_{i+1}\| \approx \|z_i(t_{i+1}) - \omega_{i+1}\|$.
3. Si $E > \varepsilon h$, ajustar h y volver a intentar desde el principio.
4. Aceptar el paso $(t_i + h, \omega_{i+1})$ y ajustar h para el siguiente paso.

Para ajustar el paso:

1. Calcular $q := \left(\frac{\varepsilon h}{2E}\right)^{1/k}$ y $q' := \min\{4, \max\{0, 1, q\}\}$, y hacer $h \leftarrow q'h$.

Para cierta constante C , si y es el resultado de aplicar un paso de tamaño qh , $\|z_i(t_i + qh) - y\| \approx C(qh)^{k+1} = Cq^{k+1}h^{k+1} \approx q^{k+1}\|z_i(t_{i+1}) - \omega_{i+1}\| \approx q^{k+1}E$, pero $q^{k+1}E \leq \varepsilon qh \iff q^k E \leq \varepsilon h \iff q \leq \left(\frac{\varepsilon h}{E}\right)^{1/k}$. Entonces usamos $2E$ en vez de E para tener cierto margen para evitar re-calcular y añadimos límites en q' por estabilidad.

2. Usando umbrales h_{\min} y h_{\max} para el paso, si $|h| < h_{\min}$, informamos de un error, pues los errores de redondeo serían demasiado grandes, y si $|h| > h_{\max}$, hacemos $h \leftarrow h_{\max} \operatorname{sgn} h$.

3.2. Método de Runge-Kutta-Fehlberg

Dados dos métodos de Runge-Kutta con los mismos pasos, (ω_i) de orden p y $(\tilde{\omega}_i)$ de orden $p + 1$, $z_i(t_{i+1}) - \omega_{i+1} \approx \tilde{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}$. En efecto, para ciertos $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $z_i(t_i + h) - \omega_{i+1} \approx C_1 h^{p+1} + O(h^{p+2})$ y $\tilde{z}_i(t_{i+1}) - \tilde{\omega}_{i+1} \approx C_2 h^{p+2} + O(h^{p+3})$, luego $z_i(t_i + h) - \omega_{i+1} \approx \tilde{z}_i(t_{i+1}) - \tilde{\omega}_{i+1} + \tilde{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1} \approx \tilde{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1} + O(h^{p+2})$.

El **método de Runge-Kutta-Fehlberg** consiste en usar esta aproximación del error E en el método anterior de paso adaptativo con los siguientes dos métodos de Runge-Kutta que tienen los mismos k_i :

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$				
$\frac{8}{12}$	$\frac{32}{1932}$	$\frac{9}{7200}$	$\frac{7296}{2197}$		
$\frac{13}{13}$	$\frac{2197}{439}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{2197}{3680}$		
1	$\frac{216}{-8}$	2	$\frac{513}{-443}$	$-\frac{845}{4104}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{443}{332}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$
$\omega :$	$\frac{25}{216}$	$\frac{1408}{6656}$	$\frac{2197}{28561}$	$-\frac{1}{5}$	
$\tilde{\omega} :$	$\frac{16}{135}$	$\frac{2565}{12825}$	$\frac{4104}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

El método ω es de orden 4 y $\tilde{\omega}$ es de orden 5.

Capítulo 4

Métodos multipaso

Un **método en m pasos** es uno para el que existen $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ tales que, si $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n$ es una solución aproximada de un problema por el método, para $i \geq m$,

$$\omega_i = a_0\omega_{i-m} + \dots + a_{m-1}\omega_{i-1} + (t_i - t_{i-1})(b_0f(t_{i-m}, \omega_{i-m}) + \dots + b_mf(t_i, \omega_i)).$$

El método es **explícito** si $b_m = 0$ e **implícito** si no. Estos métodos requieren usar otros métodos para calcular $(t_i, \omega_i)_{i=0}^{m-1}$.

El método es de paso fijo si $t_i - t_{i-1} = h$ para un cierto parámetro h e $i \in \{1, \dots, n\}$. Para el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \omega_0, \end{cases}$$

algunos métodos multipaso de paso fijo son:

1. Método explícito de Adams-Bashford de 4 pasos:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \frac{h}{24} (55f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) - 59f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) + 37f(t_{i-3}, \omega_{i-3}) - 9f(t_{i-4}, \omega_{i-4})).$$

Si f es lo suficientemente regular, $\tau_i(h) = \frac{251}{720}x^{(5)}(\xi)h^4$ para cierto $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$.

2. Método implícito de Adams-Moulton de 3 pasos:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \frac{h}{24} (9f(t_i, \omega_i) + 19f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) - 5f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) + f(t_{i-3}, \omega_{i-3})).$$

Para f suficientemente regular, $\tau_i(h) = -\frac{19}{720}x^{(5)}(\xi)h^4$ para cierto $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$.

Se tiene

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))dt,$$

pues

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))dt.$$

4.1. Teoría general de convergencia

Dados un problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

y una solución aproximada $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n$ por un método multipaso con paso $h > 0$ y coeficientes $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_m$, el **error local de truncamiento** es

$$\tau_i(h) = \frac{x(t_i) - a_{m-1}x(t_{i-1}) - \dots - a_0x(t_{i-m})}{h} - (b_m f(t_i, x(t_i)) + \dots + b_0 f(t_{i-m}, x(t_{i-m}))),$$

para $i \in \{m, \dots, n\}$, de forma que

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^m a_{m-j} x(t_{i-j}) + h \sum_{j=0}^m b_{m-j} \dot{x}(t_{i-j}) + h \tau_i(h).$$

Consideremos un método multipaso de paso fijo que, para un problema en un intervalo $[a, b]$ da soluciones $(t_{hi}, \omega_{hi})_{i=0}^{n_h}$ que cubren $[a, b]$ con paso h en cierto intervalo $[0, h_{\max}]$ y con $\omega_{hi} = x(t_{hi})$ para $i < m$. Sea $\tau : [0, h_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tau(h) := \max_{i=0}^{n_h} \|\tau_i(h)\|$, el método es **consistente** o **compatible** (en este problema e intervalo) si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0,$$

es **de orden** $p \geq 1$ si p es el mayor entero con $\tau(h) = O(h^p)$, es **convergente** si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i \in \{1, \dots, n_h\}} \|x(t_{hi}) - \omega_{hi}\| = 0,$$

y **estable** si existe $M > 0$ tal que, para todo h y para ciertos $\varepsilon_m, \dots, \varepsilon_{n_h} \in \mathbb{R}$, sea $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n := (t_{hi}, \omega_{hi})_{i=0}^{n_h}$, si se puede generar una solución $(t_i, \tilde{\omega}_i)_{i=0}^n$ con $\tilde{\omega}_i := \omega_i$ para $i < m$ y

$$\tilde{\omega}_i = \sum_{j=1}^m a_{m-j} \tilde{\omega}_{i-j} + h \sum_{j=0}^m b_{m-j} f(t_{i-j}, \tilde{\omega}_{i-j}) + \varepsilon_i$$

para $i \in \{m, \dots, n\}$, entonces

$$\max_{i \in \{m, \dots, n\}} \|\tilde{\omega}_i - \omega_i\| \leq M \left(\max_{i \in \{0, \dots, m-1\}} \|\tilde{\omega}_i - \omega_i\| + \sum_{i \in \{m, \dots, n\}} \|\varepsilon_i\| \right).$$

El método de Euler es estable.

Como **teorema**, si un método de m pasos de paso fijo es estable y consistente para un problema en un cierto dominio, entonces es convergente para el método en el dominio, y si además es de orden $p \geq 1$, dada una solución aproximada $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n$ de un problema con el e.d.o. con este método y paso $h > 0$, existen $M, K \in \mathbb{R}$ tales que

$$\max_{i \in \{0, \dots, n\}} \|x(t_i) - \omega_i\| \leq M \left(\max_{i \in \{0, \dots, m-1\}} \|x(t_i) - \omega_i\| + Kh^p \right).$$

Demostración: Sean $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_m$ los coeficientes del método y $\varepsilon_i := h\tau_i(h)$, como $(t_i, x(t_i))_{i=0}^n$ se obtiene de añadir al método un error de ε_i en cada paso i , por la estabilidad,

$$\max_{i \in \{m, \dots, n\}} \|x(t_i) - \omega_i\| \leq M \left(\max_{i \in \{0, \dots, m-1\}} \|x(t_i) - \omega_i\| + \sum_{i=m}^n \|\varepsilon_i\| \right) = M \sum_{i=m}^n \|\varepsilon_i\|$$

para cierto M que no depende de h , y si el intervalo es $[a, b]$, $\sum_{i=m}^n \|\varepsilon_i\| = \sum_{i=m}^n |h| \|\tau_i(h)\| \leq (n - m + 1)|h| \max_{i \in \{m, \dots, n\}} \|\tau_i(h)\| \leq (b - a) \|\tau_i(h)\|$, que tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$ por la consistencia, y como $\max_{i \in \{0, \dots, m-1\}} \|x(t_i) - \omega_i\| = 0$, el método es convergente. Además, si $\tau_i(h) = O(h^p)$, sea k con $\tau(h) \leq Kh^p$ para $h \in [0, h_{\max}]$, cada $\|\varepsilon_i\| = h \|\tau_i(h)\| \leq kh^{p+1}$, luego $\sum_{i=m}^n \|\varepsilon_i\| \leq \sum_{i=m}^n kh^{p+1} \leq \frac{b-a}{h} kh^{p+1} = (b-a)kh^p$.

4.2. Convergencia en un paso

Como **teorema**, dados $h_0 > 0$ y un método de un paso fijo $h \in [0, h_0]$ dado por $\omega_0 := x(t_0)$ y $\omega_{i+1} := \omega_i + h\Phi(t_i, \omega_i, h)$ con Φ continua y lipschitziana en la segunda variable:

1. El método es estable.

Fijado h , sean $(t_i, \omega_i)_{i=0}^n$ y $(t_i, \tilde{\omega}_i)_{i=0}^n$ dados por $\omega_{i+1} := \omega_i + h\Phi(t_i, \omega_i, h)$ y $\tilde{\omega}_{i+1} := \tilde{\omega}_i + h\Phi(t_i, \tilde{\omega}_i, h) + \varepsilon_{i+1}$ para ciertos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, queremos ver que para $i \in \{0, \dots, n\}$, $\|\tilde{\omega}_i - \omega_i\| \leq (1 + hL)^i (\|\tilde{\omega}_0 - \omega_0\| + \sum_{j=1}^i \|\varepsilon_j\|)$. Para $i = 0$ esto es claro, y supuesto esto probado para un cierto i , para $i + 1$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}_{i+1} - \omega_{i+1}\| &= \|\tilde{\omega}_i - \omega_i + h\Phi(t_i, \omega_i, h) - h\Phi(t_i, \tilde{\omega}_i, h) + \varepsilon_i\| \leq (1 + hL) \|\tilde{\omega}_i - \omega_i\| + \|\varepsilon_i\| \leq \\ &\leq (1 + hL)^{i+1} \left(\|\tilde{\omega}_0 - \omega_0\| + \sum_{j=1}^i \|\varepsilon_j\| \right) + \|\varepsilon_i\| \leq \\ &\stackrel{(1+hL)^{i+1} \geq 1}{\leq} (1 + hL)^{i+1} \left(\|\tilde{\omega}_0 - \omega_0\| + \sum_{j=1}^{i+1} \|\varepsilon_j\| \right). \end{aligned}$$

Con esto, como $(1 + hL)^i \leq (1 + hL)^n$, llamando $M := (1 + hL)^n$, $\|\tilde{\omega}_i - \omega_i\| \leq M(\|\tilde{\omega}_0 - \omega_0\| + \sum_{j=1}^i \|\varepsilon_j\|)$ y el método es estable.

2. Si $\Phi(t, x, 0) \equiv f(t, x)$, el método es consistente y por tanto convergente.

Existe $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ con

$$\begin{aligned} \tau_i(h) &= \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h} - \Phi(t_i, x(t_i), h) = \dot{x}(\xi_i) - \Phi(t_i, x(t_i), h) = \\ &= f(\xi_i, x(\xi_i)) - \Phi(\xi_i, x(\xi_i), 0) + \Phi(\xi_i, x(\xi_i), 0) - \Phi(t_i, x(t_i), h) = \\ &= \Phi(\xi_i, x(\xi_i), 0) - \Phi(t_i, x(t_i), h). \end{aligned}$$

Si el intervalo es $[a, b]$, por la continuidad de $((t, h) \mapsto \Phi(t, x(t), h)) : [a, b] \times [0, h_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, para cada $(t, h) \in [a, b] \times [0, h_0]$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t' - t|, |h' - h| < \delta$ entonces $\|\Phi(t', x(t'), h') - \Phi(t, x(t), h)\| < \varepsilon$. En particular, si $|h| < \delta$, como $|\xi_i - t_i| < |h| < \delta$, $|\Phi(\xi_i, x(\xi_i), 0) - \Phi(t_i, x(t_i), h)| < \varepsilon$, luego $\tau(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ y el método es consistente, y es convergente por ser además estable.

3. Dado $K > 0$, si $|\tau_i(h)| \leq K$ para cada $h \in [0, h_0]$ e i , entonces $|x(t_i) - \omega_i| \leq \frac{K}{L} e^{L(t_i - t_0)}$, donde L es una constante de Lipschitz de ϕ en la segunda variable.

4.3. Convergencia en métodos multipaso

Una **ecuación de recurrencia** es una de la forma

$$x_{i+m} = a_0 x_i + a_1 x_{i+1} + \dots + a_{m-1} x_{i+m-1},$$

donde los $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y la incógnita es la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Las soluciones de la ecuación forman un espacio vectorial de dimensión m , pues vienen dadas por los m primeros términos. El **polinomio característico** de la ecuación es $P(\lambda) := \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} - \dots - a_1 \lambda - a_0$. Si sus soluciones son todas reales, $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$ donde cada una aparece tantas veces como su multiplicidad, las soluciones de la ecuación de recurrencia son los $(x_n)_n$ dados por $\sum_{i=0}^{m-1} c_i \lambda_i^n$, con $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$.

Dados un método multipaso de paso fijo

$$\omega_i := a_0 \omega_{i-m} + \dots + a_{m-1} \omega_{i-1} + hF(t_i, h, \omega_{i-m}, \dots, \omega_i)$$

y $\omega_i := \alpha_i$ para $i < m$ y el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0, \\ x(t_0) = \alpha, \end{cases}$$

entonces $F(t_i, h, \omega_{i-m}, \dots, \omega_i) = b_0 f(t_i - hm, \omega_{i-m}) + \dots + b_m f(t_i, \omega_i) = 0$, de donde obtenemos la ecuación de recurrencia $\omega_i = a_0 \omega_{i-m} + \dots + a_{m-1} \omega_{i-1}$. Sean entonces $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ las soluciones de la ecuación de recurrencia, el método cumple la **condición de raíz** si todo $|\lambda_i| \leq 1$ y las raíces con $|\lambda_i| = 1$ son simples.

Como **teorema**, un método multipaso de paso fijo es estable si y solo si cumple la condición de raíz, en cuyo caso es consistente si y sólo si es convergente. Así:

1. Los métodos a un paso son estables.

La ecuación de recurrencia es $\omega_{i+1} = \omega_i$, el polinomio característico es $\lambda - 1$ y la única solución es $\lambda = 1$ y es simple.

2. Los métodos de Adams-Bashford y Adams-Moulton son estables.

En ambos casos la ecuación es $\omega_i = \omega_{i-1}$, la misma que en los métodos a un paso.

4.4. Método predictor-corrector

Dados un método implícito $\omega_i := F(t_i, h, \omega_{i-1}, \dots, \omega_{i-m})$ y uno explícito $\omega_i := G(t_i, h, \omega_i, \dots, \omega_{i-m})$, el **método predictor-corrector** consiste en usar F como **predictor** para obtener ω_i y G como **corrector** para obtener un valor mejor a ω_i a partir del calculado, de modo que

$$\omega_i = G(t_i, h, F(t_i, h, \omega_{i-1}, \dots, \omega_{i-m}), \omega_{i-1}, \dots, \omega_{i-m}).$$

Así se combina la simplicidad de un método explícito con el menor error de uno implícito. Se podría repetir el paso corrector para obtener mejores cotas, pero es más eficiente reducir el paso.

Sean β_i el ω_i obtenido con el paso predictor Adams-Bashford y ω_i el obtenido al aplicar el corrector Adams-Moulton, $x(t_i) - \omega_i \approx \frac{19}{270}(\beta_i - \omega_i)$. En efecto, como $x(t_i) - \beta_i \approx \frac{251}{720}x^{(5)}(\xi)h^5$ y $x(t_i) - \omega_i \approx -\frac{19}{720}x^{(5)}(\mu)h^5$ para ciertos $\xi, \mu \in (t_{i-1}, t_i)$, como para h pequeño es $x^{(5)}(\xi) \approx x^{(5)}(\mu)$, $\omega_i - \beta_i = (x(t_i) - \beta_i) - (x(t_i) - \omega_i) \approx \frac{h^5}{720}(251x^{(5)}(\xi) + 19x^{(5)}(\mu)) \approx \frac{270}{720}h^5x^{(5)}(\xi) = \frac{3}{8}x^{(5)}(\mu)h^5$, luego $x^{(5)}(\mu) \approx \frac{8}{3}h^{-5}(\omega_i - \beta_i)$ y $x(t_i) - \omega_i \approx -\frac{19}{720}\frac{8}{3}h^{-5}(\omega_i - \beta_i)h^5 = \frac{19}{270}(\beta_i - \omega_i)$.

El método es de paso variable, ajustando el paso como en los métodos de paso fijo pero con error $E := \frac{19}{270}\|\beta_i - \omega_i\|$. Si T es la tolerancia haríamos $q \leftarrow \left(\frac{Th}{E}\right)^{1/4} \cong 2,48 \left(\frac{Th}{\|\beta_i - \omega_i\|}\right)^{1/4}$, pero como ajustar el paso conlleva repetir los pasos a partir de (t_{i-4}, ω_{i-4}) con un método de paso fijo para que el método funcione, se suele ser más conservador y usar 1,5 en vez de 2,48 o 2 y se ignora el cambio de paso cuando $E \in \left(\frac{Th}{10}, Th\right)$.

Capítulo 5

Dominios de estabilidad

Cuando las derivadas de la solución están acotadas, se puede acotar e incluso predecir el error adecuadamente, y cuando la solución y su derivada crecen moderadamente, el error absoluto crece pero el relativo es estable. Si la derivada crece y la función no tenemos un **problema rígido**, en el que el error relativo se dispara. Un caso típico es el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t), \\ x(0) = \alpha, \end{cases}$$

cuya solución es claramente $x(t) = \alpha e^{\lambda t}$ en todo \mathbb{R} y, si $\lambda \ll 0$, al iterar hacia delante, $x(t) \rightarrow 0$ rápidamente y $x^{(p)}(t) = \alpha \lambda^p e^{\lambda t}$.

En este caso, con el método de Euler, para que la solución tienda a cero y para que el error no crezca, el paso debe ser $h < \frac{2}{|\lambda|}$. En efecto, $\omega_n \rightarrow 0 \iff |1+h\lambda| < 1 \iff -1 < 1+h\lambda < 1$, y como $h > 0$ y $\lambda < 0$, $1+h\lambda < 1$, pero $h\lambda > -2 \iff h|\lambda| < 2$, y si además hay error de redondeo $\omega_0 = \alpha + \varepsilon$, el error en ω_n es $(1+h\lambda)^n \varepsilon$ y para que el error no crezca debe ser $|1+h\lambda| < 1 \iff h < \frac{2}{|\lambda|}$.

En general, con los métodos de un paso fijo en h existe un polinomio Q tal que, para que la solución converja, debe ser $|Q(h\lambda)| < 1$. Para un método de Taylor de orden n , esto es $Q(x) := \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$.

Sean ahora un método multipaso de paso fijo h con parámetros $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_m$ y la ecuación de recurrencia asociada al método

$$(1 - h\lambda b_m)\omega_i = (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})\omega_{i-1} + \dots + (a_0 + h\lambda b_0)\omega_{i-m},$$

si las raíces del polinomio característico son reales y distintas, β_1, \dots, β_n , para que el método aproxime bien a la solución del problema debe ser cada $|\beta_i| < 1$.

La **región de estabilidad absoluta** de un método es $R \subseteq \mathbb{C}$ tal que, si $h\lambda \in R$, el método converge. Para un método de un paso que converge cuando $|Q(h\lambda)| < 1$, $R = \{z \in \mathbb{C} \mid |Q(z)| < 1\}$, y para uno multipaso que converge cuando cada $|\beta_i| < 1$, es $R = \{z \in \mathbb{C} \mid |\beta_i| < 1, \forall i\}$.

Hay que tener en cuenta la región de estabilidad antes de considerar un método adaptativo, pues estos pueden aumentar h por convergencia y evitar la estabilidad. Para problemas rígidos queremos que R sea lo más grande posible. Un método es **A-estable** si $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\} \subseteq R$.

Como **teorema**, los métodos explícitos de Runge-Kutta no son A-estables, y un método multipaso A-estable tiene orden de convergencia máximo 2. Algunos métodos implícitos son:

1. Método de Euler implícito o hacia atrás: $\omega_i = \omega_{i-1} + hf(t_i, \omega_i)$.

a) Es estable.

Como la relación de recurrencia es $\omega_i = \omega_{i-1}$, cumple la condición de raíz.

b) Es consistente cuando \ddot{x} es acotada.

Existe $\xi \in [t_i, t_{i+1}]$ con $\tau_{i+1}(h) = \frac{x(t_i+h) - x(t_i)}{h} - f(t_i + h, x(t_i + h)) = \dot{x}(t_i + h) + \frac{h}{2}\ddot{x}(\xi) - \dot{x}(t_i + h) = \frac{h}{2}\ddot{x}(\xi)$, y si $\|\ddot{x}\|$ está acotado, como ocurre en el problema, $\max_i \|\tau_{i+1}(h)\| \rightarrow 0$.

c) Es A-estable.

El polinomio $(1 - h\lambda)z - 1$ tiene como única raíz $\beta := \frac{1}{1-h\lambda}$, y si $h\lambda =: a + bi$ con $a < 0$, $|\beta| = \frac{1}{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}} \leq \frac{1}{1-a} < 1$.

Para implementarlo, sea $F(\omega) := \omega - \omega_{i-1} - hf(t_i, \omega)$, se trata de resolver $F(\omega) = 0$, lo que podemos hacer, por ejemplo, por el método de Newton, que nos da una sucesión $(\omega_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a la raíz de $F(\omega) = 0$, dada por $\omega_i^0 := \omega_{i-1}$ y

$$\omega_i^{k+1} := \omega_i^k - \frac{\omega_i^k - \omega_{i-1} - hf(t_i, \omega_i^k)}{1 - h \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, \omega)}$$

Si no conocemos $\frac{\partial f}{\partial x}$, podemos usar el método de la secante. Iteramos hasta que $\|\omega_i^{k+1} - \omega_i^k\|$ sea menor que una tolerancia, o si hemos llegado un máximo de iteraciones.

2. Método del trapecio: $\omega_i = \omega_{i-1} + \frac{h}{2}(f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + f(t_i, \omega_i))$.

a) Es estable.

Cumple la condición de raíz con una única raíz 1.

b) Es consistente y de orden 2 para \ddot{x} acotada.

Para cierto t existen $\xi, \mu \in [t, t + h]$ con

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) - \frac{h}{2}(f(t, x(t)) + f(t+h, x(t+h))) &= \\ = \left(x(t) + h\dot{x}(t) + \frac{1}{2}h^2\ddot{y}(t) + \frac{1}{6}h^3\ddot{y}(\xi) \right) - x(t) - \frac{h}{2} \left(\dot{x}(t) + \left(\dot{x}(t) + h\ddot{x}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\mu) \right) \right) &= \\ = \frac{1}{6}h^3\ddot{x}(\xi) - \frac{1}{4}h^3\ddot{x}(\mu), \end{aligned}$$

y si $\|\ddot{x}\|$ es acotada por un cierto C , $\|\tau_{i+1}(h)\| \leq h^2(\frac{1}{6}C + \frac{1}{4}C)$ y $\|\tau(h)\| \leq \frac{5}{12}Ch^2 \rightarrow 0$.

c) Es A-estable.

La recurrencia es $Q_{h\lambda}(z) = (1 - \frac{h\lambda}{2})z - (1 + \frac{h\lambda}{2})$ y el polinomio característico tiene una única raíz $\beta = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}$. Si $\frac{h\lambda}{2} =: a + bi$ con $a < 0$,

$$|\beta| = \frac{|1 + a + bi|}{|1 - a - bi|} = \sqrt{\frac{(1+a)^2 + b^2}{(1-a)^2 + b^2}} < 1,$$

pues $(1+a)^2 < (1-a)^2$.

Dado un método a m pasos

$$\omega_i = a_0\omega_{i-m} + \cdots + a_{m-1}\omega_{i-1} + h(b_0f(t_{i-m}, \omega_{i-m}) + \cdots + b_mf(t_i, \omega_i)),$$

llamamos $\rho(z) := z^m - a_{m-1}z^{m-1} - \cdots - a_1z - a_0$ y $\sigma(z) := b_mz^m + \cdots + b_1z + b_0$. Entonces el método es una **BDF** (*Backwards Differentiation Formula*) si es de orden m y $\sigma(z) = \beta z^m$ para algún $\beta \neq 0$.

Todo método BDF cumple $\beta = \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j}\right)^{-1}$ y $\rho(z) = \beta \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} z^{m-j} (z-1)^j$. Así:

1. El BDF de orden 2 es $\omega_i = \frac{4}{3}\omega_{i-1} - \frac{1}{3}\omega_{i-2} + \frac{2}{3}hf(t_i, \omega_i)$.

Se tiene $\beta = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$, luego $\rho(z) = \frac{2}{3} \left(z(z-1) + \frac{1}{2}(z-1)^2\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{2}\right) = z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}$, con lo que $a_1 = \frac{4}{3}$ y $a_0 = -\frac{1}{3}$. Además, $b_0, \dots, b_{m-1}, b_m = 0, \dots, 0, \beta$, luego $\omega_i = \frac{4}{3}\omega_{i-1} - \frac{1}{3}\omega_{i-2} + \frac{2}{3}hf(t_i, \omega_i)$.

2. El BDF de orden 3 es $\omega_i = \frac{18}{11}\omega_{i-1} - \frac{9}{11}\omega_{i-2} + \frac{2}{11}\omega_{i-3} + \frac{6}{11}f(t_i, \omega_i)$.

$\beta = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{6}{11}$, luego $\rho(z) = \frac{6}{11} \left(z^2(z-1) + \frac{1}{2}z(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3\right) = \frac{6}{11} \left(z^3 - z^3 - \frac{18}{11}z^2 + \frac{9}{11}z - \frac{2}{11}\right)$, de modo que $\omega_i - \frac{18}{11}\omega_{i-1} + \frac{9}{11}\omega_{i-2} - \frac{2}{11}\omega_{i-3} = \frac{6}{11}f(t_i, \omega_i)$.

Los métodos BDF tienen una región de estabilidad lineal grande, y como **teorema**, un método BDF cumple la condición de raíz y es convergente si y sólo si es de orden entre 1 y 6.