Topología de espacios métricos

Bibliografía:

- Topología de Espacios Métricos, Grado en Matemáticas, Dr. Luis J. Alías & Dr. Miguel Ángel Javaloyes, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia (Curso 2017–18).

Capítulo 1

Espacios métricos

1.1. Espacios topológicos

Un **espacio topológico** es un par $(X, \mathcal{T})$ en el que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y cumple que:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$.
3. $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Decimos que $\mathcal{T}$ es una **topología** para X y sus elementos son **conjuntos abiertos**, o simplemente **abiertos**, de $(X, \mathcal{T})$. Llamamos **cerrados** a los complementarios de los abiertos: $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} := \mathcal{C} := \{X \backslash A\}_{A \in \mathcal{T}}$. Un **entorno** de $p \in X$ es un abierto que contiene a p, y llamamos $\mathcal{E}(p)$ a la familia de todos los entornos de p.

$A \in \mathcal{T}$ si y sólo si $\forall p \in A, \exists \mathcal{U} \in \mathcal{E}(p) : \mathcal{U} \subseteq A$.

$\implies$] Dado $x \in A$, $\mathcal{U} = A$ es un entorno de x en A.

$\impliedby$] Para cada $x \in A$, sea $\mathcal{U}_x \in \mathcal{E}(x)$ tal que $\mathcal{U}_x \subseteq A$, se afirma que $\bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x = A$.

> $\subseteq$] $\mathcal{U}_x \subseteq A \forall x \in A \implies \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x \subseteq A$.
>
> $\supseteq$] $\forall x \in A, x \in \mathcal{U}_x \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x \implies A \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x$.

Propiedades de los cerrados:

- $X, \emptyset \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.
- $\{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \implies \bigcup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.
- $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \implies \bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

Si A es un abierto y C un cerrado, entonces $A \backslash C$ es abierto y $C \backslash A$ es cerrado. **Demostración:** $X \backslash C$ es abierto, por lo que $A \backslash C = A \cap (X \backslash C)$ también. Por otro lado, $X \backslash (C \backslash A) = (X \backslash C) \cup A$, que es abierto, por lo que $C \backslash A$ es cerrado.

Algunas topologías:

- La **topología discreta**: $\mathcal{T}_D := \mathcal{P}(X)$, la topología más grande que se puede definir sobre X.
- La **topología trivial** o **indiscreta**: $\mathcal{T}_T = \{\emptyset, X\}$, la topología más pequeña que se puede definir sobre X.
- La **topología cofinita**: $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid X\backslash A \text{ es finito}\}$. Esta se define sobre conjuntos infinitos, pues de lo contrario es $\mathcal{T}_{CF} = \mathcal{T}_D$.
  Sean $A, B \in \mathcal{T}$ no vacíos, $X\backslash A$ y $X\backslash B$ son finitos, por lo que $(X\backslash A) \cup (X\backslash B) = X\backslash(A \cap B)$ también lo es y $A \cap B \in \mathcal{T}$. Si, por ejemplo, $B = \emptyset$, entonces $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$. Por otro lado, si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ es tal que $\bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, entonces $X\backslash \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(X\backslash A_i)$ es finito.

Dado el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, definimos la **topología inducida** por $\mathcal{T}$ en $H \subseteq X$, **topología relativa** o **topología de subespacio** como $\mathcal{T}|_H := \mathcal{T}_H := \{A \cap H\}_{A\in\mathcal{T}}$. Los abiertos de $\mathcal{T}_H$ se llaman **abiertos relativos**, y $(H, \mathcal{T}_H)$ es un **subespacio topológico** de $(X, \mathcal{T})$. Todo subespacio topológico es un espacio topológico. **Demostración:**

1. $\emptyset = \emptyset \cap H$ y $H = X \cap H$.
2. Sean $A', B' \in \mathcal{T}_H$, existen $A, B \in \mathcal{T}$ tales que $A' = A \cap H$ y $B' = B \cap H$, por lo que $A' \cap B' = A \cap B \cap H \in \mathcal{T}_H$.
3. Sea $\{A'_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}_H$, para cada $i \in I$ existe un $A_i \in \mathcal{T}$ tal que $A'_i = A_i \cap H$, de modo que $\bigcup_{i\in I} A'_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap H) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap H \in \mathcal{T}_H$.

Si H es abierto en $(X, \mathcal{T})$ entonces todo abierto relativo $A' \in \mathcal{T}_H$ también es abierto en el total. **Demostración:** Sea $A \in \mathcal{T}$ tal que $A' = A \cap H$, como $A, H \in \mathcal{T}$, entonces $A' \in \mathcal{T}$.

Dado $(X, \mathcal{T})$, un subconjunto $C' \subseteq H \subseteq X$ es cerrado relativo ($C' \in \mathcal{C}_H$) si y sólo si existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C' = C \cap H$.

$\Longrightarrow$] Si $C' \in \mathcal{C}_H$, entonces $H\backslash C' \in \mathcal{T}_H$, por lo que existe $A \in \mathcal{T}$ con $H\backslash C' = A \cap H$. Pero si $C := X\backslash A$, entonces $C' = H\backslash(H\backslash C') = H\backslash(A \cap H) = H\backslash A = H \cap (X\backslash A) = H \cap C$.

$\Longleftarrow$] Sea $C' = C \cap H$ con $C \in \mathcal{C}$, entonces $H\backslash C' = H\backslash(C \cap H) = H\backslash C = H \cap (X\backslash C)$, y como $X\backslash C \in \mathcal{T}$, entonces $H\backslash C' \in \mathcal{T}_H$, por lo que $C' \in \mathcal{C}_H$.

1.2. Primer axioma de numerabilidad y condición de Hausdorff

Una **base de entornos** de $p \in X$ es una subfamilia $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{E}(p)$ tal que $\forall V \in \mathcal{E}(p), \exists U \in \mathcal{B}(p) : U \subseteq V$. A partir de aquí, un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ satisface el **primer axioma de numerabilidad**, o es **1AN**, si todo punto posee una base de entornos numerable, es decir, si $\forall p \in X, \exists \mathcal{B}(p)$ base de $p : |\mathcal{B}(p)| \leq |\mathbb{N}|$.

Así, $(X, \mathcal{T}_T)$ es 1AN, pues cada punto posee la base $\mathcal{B}(p) = \{X\}$. Sin embargo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no es 1AN. **Demostración:** Si lo fuera, tendríamos $\mathcal{B}(0) = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pero entonces $U_n = \mathbb{R}\backslash F_n$, con F_n finito, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como la unión numerable de conjuntos finitos es numerable y $\mathbb{R}$ no lo es, podemos elegir un punto $x \in \mathbb{R}\backslash \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}\backslash F_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con $x \neq 0$. Sea $A = \mathbb{R}\backslash\{x\} \in \mathcal{E}(0)$, existirá un $U_i \subseteq A$, pero entonces $x \in U_i \subseteq A = \mathbb{R}\backslash\{x\}\#$.

La propiedad 1AN es hereditaria, es decir, si $(X, \mathcal{T})$ es 1AN, también lo es cualquier subespacio topológico de este. **Demostración:** Debemos probar que si $Y \subseteq X$, dado $y \in Y$ y $\mathcal{B}(y)$ una base de entornos de y en X, debemos probar que $\mathcal{B}_Y(y) = \{B \cap Y\}_{B \in \mathcal{B}(y)}$ es base de entornos de y en Y, pues entonces $|\mathcal{B}_Y(y)| \leq |\mathcal{B}(y)| \leq |\mathbb{N}|$. Para ello, vemos que todo $A \in \mathcal{B}_Y(y)$ es entorno de y en Y, pues $A = B \cap Y \in \mathcal{T}_Y$ con B un entorno de y en X. Ahora, si V es un entorno de y en Y, entonces V es abierto en Y, por lo que existe un $A \in \mathcal{T}$ abierto en X tal que $V = A \cap Y$, y como A es entorno de y en X, existe un $B \in \mathcal{B}(y)$ con $B \subseteq A$, con lo que $y \in B \cap Y \subseteq A \cap Y = V$.

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **de Hausdorff** o T_2 si $\forall p, q \in X, p \neq q; \exists U \in \mathcal{E}(p), V \in \mathcal{E}(q) : U \cap V = \emptyset$. Así, por ejemplo, $(X, \mathcal{T}_T)$ no es de Hausdorff para $|X| \geq 2$, pues dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, el único entorno de x es X y contiene a y.

1.3. Espacios métricos

Un **espacio métrico** es un par (X, d) formado por un conjunto $X \neq \emptyset$ y una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple que $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0 \wedge (d(x, y) = 0 \iff x = y)$.
2. **Simetría:** $d(y, x) = d(x, y)$.
3. **Desigualdad triangular:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Decimos que d es una **métrica** o **distancia** sobre X. Ejemplos de métricas:

- **Métrica usual** sobre $\mathbb{R}$: $d_u(x, y) = d_{|\,|}(x, y) = |x - y|$.
- **Métrica del ascensor** sobre $\mathbb{R}^2$**:**

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

- **Métrica discreta**: $d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$.
- **Espacios métricos producto**: Dados los espacios métricos $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$, sean $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$:
  - **Métrica del taxi:** $d_T(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$.
  - **Métrica euclídea:** $d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$.
  - **Métrica del ajedrez:** $d_\infty(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$.
  - $d_k(x, y) = (\sum_{i=1}^n d_i(x_i y_i)^k)^{\frac{1}{k}}$. Entonces se tiene que $d_T = d_1$, $d_E = d_2$ y d_∞ tiene un nombre apropiado.
- **Métrica estándar acotada**: $\overline{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. En general, obtenemos las mismas propiedades cambiando el 1 por cualquier otro número real positivo.
- **Métrica estándar acotada (bis)**: $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

- **Métrica inducida** por d en $H \subseteq X$: $d_H : H \times H \to \mathbb{R}$ con $d_H(x,y) = d(x,y)$ para cualesquiera $x, y \in H$. Decimos que (H, d_H) es un **subespacio métrico** de (X,d).

Se define la distancia de un punto $p \in X$ a un subconjunto $S \subseteq X$ como $d(p,S) = \inf\{d(p,x)\}_{x \in S}$. Así, si $p \in S$ entonces $d(p,S) = 0$, si bien el recíproco no es cierto.

1.4. Círculos y bolas

El **círculo** en (X,d) centrado en p con radio r es el conjunto $C_d(p;r) \coloneqq C(p;r) \coloneqq \{x \in X \mid d(p,x) = r\}$. Del mismo modo, la **bola abierta** en (X,d) centrada en p con radio r es el conjunto $B_d(p;r) \coloneqq B(p;r) \coloneqq \{x \in X \mid d(p,x) < r\}$, y la **bola cerrada** en (X,d) centrada en p con radio r es el conjunto $\overline{B}_d(p;r) \coloneqq \overline{B}(p;r) \coloneqq B[p;r] \coloneqq \{x \in X \mid d(p,x) \leq r\}$. Se tiene que $B_d(p;r) = \bigcup_{0<s<r} C_d(p;s)$, y $\overline{B}_d(p;r) = \bigcup_{0<s\leq r} C_d(p;s)$. Dado el espacio métrico (X,d) y $H \subseteq X$, $B_{d_H}(p;r) = B_d(p;r) \cap H$ para cualesquiera $p \in H$ y $r > 0$.

(X,d) es **acotado** si $\exists k > 0 : \forall x, y \in X, d(x,y) \leq k$, y decimos entonces que d es una **métrica acotada**. Esto sucede si y sólo si $\exists k > 0, x_0 \in X : B(x_0;k) = X$.

$\Longrightarrow$] Sea $x_0 \in X$, entonces $\forall x \in X, d(x_0,x) \leq k < k+1 \implies x \in B_d(x_0, k+1) \implies X \subseteq B_d(x_0, k+1) \subseteq X$.

$\Longleftarrow$] Por la desigualdad triangular, $\forall p, q \in X, d(p,q) \leq d(p,x_0) + d(x_0,q) < k + k = 2k$, de modo que (X,d) es acotado por $2k$.

También se dice que $H \subseteq X$ es acotado si (H, d_H) es acotado, o equivalentemente, si $\exists k > 0, x_0 \in X : H \subseteq B_d(x_0;k)$. Por tanto las bolas son subconjuntos acotados, pues $B(p;r)$ está acotado por r y $\overline{B}_d(x;r)$ por (al menos) $2r$. Definimos el **diámetro** de un espacio métrico acotado (X,d) como $\text{diám}(X) = \sup\{d(x,y)\}_{x,y \in X}$.

1.5. Subconjuntos abiertos y cerrados

En un espacio métrico (X,d), $A \subseteq X$ es un **subconjunto abierto**, o simplemente un **abierto**, si $\forall x \in A, \exists r_x > 0 : B(x;r_x) \subseteq A$. Toda bola abierta es un abierto. **Demostración:** Sea $B(x;r)$ una bola abierta en (X,d) e $y \in B(x;r)$, si tomamos δ tal que $0 < \delta \leq r - d(x,y)$ y $z \in B(y;\delta)$, por la desigualdad triangular, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \delta \leq r$, por lo que $B(y;\delta) \subseteq B(x;r)$.

La condición de ser abierto depende de la métrica y del conjunto sobre el que esta se define, si bien el conjunto total X y el vacío $\emptyset$ son abiertos en cualquier espacio métrico.

Dados $A_1, \ldots, A_n$ abiertos en (X,d), la intersección finita $\bigcap_{i=1}^n A_i$ también lo es. **Demostración:** Si tomamos un $p \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ arbitrario, para cada i con $1 \leq i \leq n$, se tiene que $p \in A_i$ y existe un $r_i > 0$ tal que $B(p;r_i) \subseteq A_i$. Ahora bien, si tomamos $r \coloneqq \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, vemos que $B(p;r) \subseteq B(p;r_i) \subseteq A_i$, por lo que $B(p;r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Dada la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de abiertos en (X,d), entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ también es un abierto. **Demostración:** Sea $p \in \bigcup_{i \in I} A_i$ arbitrario. Entonces existe un $i_0 \in I$ tal que $p \in A_{i_0}$, y como A_{i_0} es abierto, existe un $r > 0$ tal que $B(p;r) \subseteq A_{i_0}$. Entonces $B(p;r) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Así pues, todo espacio métrico (X,d) lleva asociado un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_d)$, donde $\mathcal{T}_d$ es el conjunto de abiertos de (X,d).

1.6. Espacios metrizables

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **metrizable** si existe una métrica d en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

- La métrica discreta lleva asociada la topología discreta ($\mathcal{T}_D = \mathcal{T}_{d_D}$).
  Todo subconjunto de X es abierto en (X, d_D).

- La topología indiscreta solo es metrizable si X es **unipuntual** ($|X| = 1$).
  De lo contrario tendríamos $p, q \in X$ con $p \neq q$ y por tanto $d(p, q) = r > 0$, y entonces $q \notin B(p; \frac{r}{2})$, pero esta bola sería un abierto distinto del vacío y del total, lo que no existe en $\mathcal{T}_T$.

Dado el espacio métrico (X, d) y $H \subseteq X$, entonces $\mathcal{T}_d|_H = \mathcal{T}_{d_H}$.

$\subseteq$] Sea $A' \in \mathcal{T}_d|_H$, existe $A \in \mathcal{T}_d$ tal que $A' = A \cap H$. Entonces para todo $p \in A' \subseteq A$ existe un $r > 0$ tal que $B_d(p; r) \subseteq A$, por lo que $B_d(p; r) \cap H \subseteq A'$, pero como $B_d(p; r) \cap H = B_{d_H}(p; r)$, entonces $A' \in \mathcal{T}_{d_H}$.

$\supseteq$] Sea $A' \in \mathcal{T}_{d_H}$, entonces para todo $p \in A'$ existe un $r > 0$ tal que $B_{d_H}(p; r) = B_d(p; r) \cap H \subseteq A'$, y si llamamos $A = \bigcup_{p \in A'} B_d(p; r)$, se tiene que $A' \subseteq A \cap H = \left(\bigcup_{p \in A'} B_d(p; r)\right) \cap H = \bigcup_{p \in A'} (B_d(p; r) \cap H) = \bigcup_{p \in A'} B_{d_H}(p; r) \subseteq A'$ y $A' = A \cap H$ con $A \in \mathcal{T}_d$, por lo que $A' \in \mathcal{T}_d|_H$.

Todo espacio metrizable es 1AN, pues cada punto $x \in X$ posee la base de entornos $\mathcal{B}(x) = \{B(x; \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. También es T_2, pues dados $p, q \in X$ con $p \neq q$, si $r = d(p, q) > 0$, entonces $B(p; \frac{r}{2}) \cap B(q; \frac{r}{2}) = \emptyset$.

1.7. Métricas equivalentes

Dos métricas d y d' sobre X son **equivalentes** si $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. Equivalentemente, lo son si $\forall p \in X, r > 0; (\exists \delta > 0 : B_d(p; \delta) \subseteq B_{d'}(p; r) \wedge \exists \delta' > 0 : B_{d'}(p; \delta') \subseteq B_d(p; r))$.

$\Longrightarrow$] Sean d y d' equivalentes, dados $p \in X$ y $r > 0$, entonces $B_{d'}(p; r)$ es un abierto en $\mathcal{T}_{d'}$ y por tanto en $\mathcal{T}_d$, por lo que $\exists \delta > 0 : B_d(p; \delta) \subseteq B_{d'}(p; r)$. La otra condición se prueba de forma análoga.

$\Longleftarrow$] Sea A un abierto de $\mathcal{T}_d$ y $p \in A$, existe pues un $r > 0$ tal que $B_d(p; r) \subseteq A$ y por tanto un $\delta' > 0$ tal que $B_{d'}(p; \delta') \subseteq B_d(p; r)$, por lo que A es abierto en $\mathcal{T}_{d'}$. El otro contenido se prueba de forma análoga.

Dadas dos métricas d y d' sobre X, si existen $m, M > 0$ tales que $\forall x, y \in X, md(x, y) \leq d'(x, y) \leq Md(x, y)$, entonces d y d' son equivalentes. **Demostración:** Dados $p \in X$ y $r > 0$, tomando $\delta = \frac{r}{M}$, se tiene que si $d(p, q) \leq \delta$ entonces $d'(p, q) \leq Md(p, q) \leq M\delta = r$, por lo que $B_d(p; \delta) \subseteq B_{d'}(p; r)$. Análogamente, tomando $\delta' = mr$, se tiene que $B_{d'}(p; \delta') \subseteq B_d(p; r)$.

Así, las métricas d_E, d_T y d_∞ sobre un mismo conjunto $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y métricas $d_1, \dots, d_n$ son equivalentes, y si un subconjunto es acotado para alguna de las tres métricas también lo es para las otras dos. **Demostración:** Se deduce de que $\frac{1}{n} d_T(x, y) \leq d_\infty(x, y) \leq d_T(x, y)$ y $\frac{1}{\sqrt{n}} d_E(x, y) \leq d_\infty(x, y) \leq d_E(x, y)$.

No obstante, las métricas euclídea y discreta no tienen por qué ser equivalentes, pues en $\mathbb{R}^2$, $\{(0, 0)\}$ es abierto en la discreta pero no en la euclídea. Llamamos $(\mathbb{R}^n, d_u) = (\mathbb{R}^n, d_E)$ con d_E definido sobre $d_{||}$ en $\mathbb{R}$, y $\mathcal{T}_u$ a la topología asociada a d_u.

Capítulo 2

Subconjuntos notables

2.1. Clausura

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$, la **clausura** o **adherencia** de S es el menor cerrado que contiene a S, es decir, la intersección de todos los cerrados que lo contienen, y se denota

$$\overline{S} := \operatorname{cl}(S) := \operatorname{ad}(S) := \bigcap\{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \mid S \subseteq C\}$$

Dado $p \in X$, $p \in \overline{S} \iff \forall V \in \mathcal{E}(p), V \cap S \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow$] Sea $p \in \overline{S}$ y supongamos que existe $V \in \mathcal{E}(p)$ con $V \cap S = \emptyset$. Entonces $S \subseteq X \backslash V \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, luego $p \in \overline{S} \subseteq X \backslash V$.#

$\Longleftarrow$] Sea $p \in X$ tal que $V \cap S \neq \emptyset \forall V \in \mathcal{E}(x)$ y supongamos $p \notin \overline{S}$. Entonces $p \in X \backslash \overline{S} \in \mathcal{E}(p)$, pero $(X \backslash \overline{S}) \cap S = \emptyset$.#

Si (X, d) es un espacio métrico y $S \subseteq X$, dado $p \in X$, $p \in \overline{S} \iff d(p, S) = 0$.

$\Longrightarrow$] Sea $p \in \overline{S}$, si suponemos $d(p, S) = r > 0$, entonces $B(p; r) \cap S = \emptyset$, lo que contradice $p \in \overline{S}$.#

$\Longleftarrow$] Sea $d(p, S) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in S : d(p, q) < \frac{1}{n}$, luego $\forall n \in \mathbb{N}, B(p; \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset$ y $p \in \overline{S}$.

Propiedades:

1. $S \subseteq T \implies \overline{S} \subseteq \overline{T}$.
   $S \subseteq T \subseteq \overline{T} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, por lo que $\overline{T}$ es un cerrado que contiene a S y por tanto $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

2. $\bigcup_{i \in I} \overline{S_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} S_i}$; $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} S_i}$.

   $\subseteq$] $\forall j \in I, S_j \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i \implies \overline{S_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} S_i} \implies \bigcup_{i \in I} \overline{S_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} S_i}$.

   $\supseteq$] $\overline{\bigcup_{i \in I} S_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{S_i}} \overset{\textbf{SI } I \textbf{ es finito}}{=} \bigcup_{i \in I} \overline{S_i}$.

3. $\overline{\bigcap_{i \in I} S_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{S_i}$.

$$\forall i \in I, S_i \subseteq \overline{S_i} \implies \bigcap_{i \in I} S_i \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{S_i} \implies \overline{\bigcap_{i \in I} S_i} \subseteq \overline{\bigcap_{i \in I} \overline{S_i}} = \bigcap_{i \in I} \overline{S_i}$$

4. $S \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \iff \overline{S} = S$.

   $\Longrightarrow]$ $S \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \implies \overline{S} \subseteq S \overset{S\subseteq\overline{S}}{\Longrightarrow} S = \overline{S}$.
   $\Longleftarrow]$ $S = \overline{S} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

5. $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.

$D \subseteq X$ es **denso** en $(X, \mathcal{T})$ si $\overline{D} = X$, si y sólo si cualquier abierto no vacío corta a D. $(X, \mathcal{T})$ es **separable** si admite un subconjunto denso y numerable.

Todo espacio numerable es separable pero el recíproco no se cumple, pues por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y numerable y por tanto $\mathbb{R}$ es separable, pero no es numerable. Igualmente $(X, \mathcal{T}_D)$ es separable si y sólo si es numerable, mientras que $(X, \mathcal{T}_{CF})$ es siempre separable (basta tomar un subconjunto numerable no finito).

2.2. Puntos de acumulación y aislados

Sea $S \subseteq X$, $p \in X$ es un **punto de acumulación** de S si $\forall U \in \mathcal{E}(p), (U \backslash \{p\}) \cap S \neq \emptyset$. Llamamos **acumulación** o **conjunto derivado** de S ($\text{ac}(S)$ o S') al conjunto de todos los puntos de acumulación de S. Por otro lado, $p \in S$ es un **punto aislado** de S si $\exists U \in \mathcal{E}(p) : U \cap S = \{p\}$, y el conjunto de todos los puntos aislados de S es $\text{ais}(S) = S \backslash S'$, y se tiene que $\overline{S} = S \cup S'$.

2.3. Frontera

Sea $S \subseteq X$, $p \in X$ es un **punto frontera** de S si $\forall U \in \mathcal{E}(p), (U \cap S \neq \emptyset \wedge U \cap (X \backslash S) \neq \emptyset)$. Llamamos **frontera** de S (∂S o $\text{fr}(S)$) al conjunto de todos los puntos frontera de S. Propiedades:

1. $\partial S = \overline{S} \cap \overline{X \backslash S}$.

2. $\partial S \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

Además, en un espacio métrico,

$$\begin{aligned} p \in \partial S &\iff \forall r > 0, (B(p; r) \cap S \neq \emptyset \wedge B(p; r) \cap (X \backslash S) \neq \emptyset) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (B(p; \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset \wedge B(p; \frac{1}{n}) \cap (X \backslash S) \neq \emptyset) \\ &\iff d(p, S) = d(p, X \backslash S) = 0 \end{aligned}$$

2.4. Interior

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$, el **interior** de S es el mayor abierto contenido en S, es decir, la unión de todos los abiertos contenidos en S, y se denota

$$\mathring{S} := \text{int} S := \bigcup \{A \in \mathcal{T} \mid A \subseteq S\}$$

Propiedades:

1. $\mathring{S} = X \backslash \overline{X \backslash S}$.

   $\subseteq]$ $p \in \mathring{S} \implies \exists A \in \mathcal{T} : p \in A \subseteq \mathring{S} \subseteq S \implies A \cap (X \backslash S) = \emptyset \implies p \notin \overline{X \backslash S}$.

   $$\supseteq] \quad \begin{matrix} X \backslash S \subseteq \overline{X \backslash S} \implies X \backslash \overline{X \backslash S} \subseteq S \\ X \backslash \overline{X \backslash S} \in \mathcal{T} \end{matrix} \implies X \backslash \overline{X \backslash S} \subseteq \mathring{S}.$$

2. $S \in \mathcal{T} \iff S = \mathring{S}$.

3. $\partial S = \overline{S} \backslash \mathring{S}$.

   $$\partial S = \overline{S} \cap \overline{X \backslash S} = \overline{S} \cap (X \backslash \mathring{S}) = \overline{S} \backslash \mathring{S}$$

4. $S \in \mathcal{T} \iff S \cap \partial S = \emptyset$.

   $\implies]$ $S \in \mathcal{T} \implies \partial S = \overline{S} \backslash \mathring{S} = \overline{S} \backslash S \implies \partial S \cap S = \emptyset$.

   $\impliedby]$ $\emptyset = \partial S \cap S = (\overline{S} \backslash \mathring{S}) \cap S = S \backslash \mathring{S}$.

5. $p \in \mathring{S} \iff \exists U \in \mathcal{E}(p) : U \subseteq S$.

6. $S \subseteq T \implies \mathring{S} \subseteq \mathring{T}$.

7. $\bigcap_{i=1}^{n} \mathring{S}_i = \overbrace{\bigcap_{i=1}^{n} S_i}^{\circ}$.

   $$\mathring{S} \cap \mathring{T} = (X \backslash \overline{X \backslash S}) \cap (X \backslash \overline{X \backslash T}) = X \backslash (\overline{X \backslash S} \cup \overline{X \backslash T}) =$$
   $$= X \backslash \overline{(X \backslash S) \cup (X \backslash T)} = X \backslash \overline{X \backslash (S \cap T)} = \overbrace{S \cap T}^{\circ}$$

   Esto NO se cumple para la unión.

Además, en un espacio métrico,

$$\begin{aligned} p \in \mathring{S} \quad &\iff \quad \exists r > 0 : B(p; r) \subseteq S \\ &\iff \quad \exists n \in \mathbb{N} : B(p; \frac{1}{n}) \subseteq S \\ &\iff \quad d(p, X \backslash S) > 0 \end{aligned}$$

2.5. Clausura, frontera e interior relativos

Escribimos $\mathrm{cl}_X(S)$, $\mathrm{int}_X(S)$ y $\partial_X(S)$ en $(X, \mathcal{T})$ y $\mathrm{cl}_H(S)$, $\mathrm{int}_H(S)$ y $\partial_H(S)$ en $(H, \mathcal{T}|_H)$. Así, sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq H \subseteq X$:

1. $\mathrm{cl}_H(S) = \mathrm{cl}_X(S) \cap H$.

   $\subseteq]$ Sabemos que $S \subseteq \mathrm{cl}_X(S) \cap H \in \mathcal{C}_H$, y como $\mathrm{cl}_H(S)$ es el menor cerrado en H que contiene a S, $\mathrm{cl}_H(S) \subseteq \mathrm{cl}_X(S) \cap H$.

$\supseteq$] Sea $p \in \mathrm{cl}_X(S) \cap H$ y $U' \in \mathcal{E}_H(p)$, entonces existe $U \in \mathcal{E}_X(p)$ tal que $U' = U \cap H$. Como $p \in \mathrm{cl}_X(S)$, $U \cap S \neq \emptyset$, ahora bien, $U' \cap S = U \cap H \cap S = U \cap S \neq \emptyset$, luego $p \in \mathrm{cl}_H(S)$.

2. $\mathrm{int}_X(S) \cap H \subseteq \mathrm{int}_H(S)$, y esta inclusión suele ser estricta.
   $\mathrm{int}_X(S) \cap H$ es un abierto de H contenido en S, y por tanto $\mathrm{int}_X(S) \cap H \subseteq \mathrm{int}_H(S)$.

3. $\partial_H(S) \subseteq \partial_X(S) \cap H$.

$$\begin{aligned}\partial_H(S) = \mathrm{cl}_H(S) \backslash \mathrm{int}_H(S) &\subseteq (\mathrm{cl}_X(S) \cap H) \backslash (\mathrm{int}_X(S) \cap H) = \\ &= (\mathrm{cl}_X(S) \backslash \mathrm{int}_X(S)) \cap H = \partial_X(S) \cap H\end{aligned}$$

2.6. Convergencia

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** o **tiende** a x ($x_n \to x$ o $\lim x_n = x$) si $\forall U \in \mathcal{E}(x), \exists n_U \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_U, x_n \in U$. En particular, en un espacio métrico (X, d), $x_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, x_n \in B(x; r)$, o lo que es lo mismo, si la sucesión $\{d(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, d_u)$.

Sea (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$ y $x \in X$, entonces $x \in \overline{S} \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S : x_n \to x$.

$\Longrightarrow$] Sea $x \in \overline{S}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B(x; \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset$, luego podemos tomar $x_n \in B(x; \frac{1}{n}) \cap S$ y construir así la sucesión. Entonces $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ y por tanto $x_n \to x$.

$\Longleftarrow$] Cualquier $U \in \mathcal{E}(x)$ contiene puntos de la sucesión, de forma que $U \cap S \neq \emptyset$ y por tanto $x \in \overline{S}$.

Así pues, en un espacio métrico (X, d), S es denso en X si y sólo si $\forall x \in X, \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S : x_n \to x$, y $x \in \partial S$ si y sólo si $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X \backslash S : x_n, y_n \to x$. Estas caracterizaciones sólo son ciertas en espacios métricos, pero no es espacios topológicos arbitrarios.

Capítulo 3

Aplicaciones continuas

Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es **continua** en $p \in X$ si $\forall V \in \mathcal{E}(f(p)), \exists U \in \mathcal{E}(p) : f(U) \subseteq V$. Equivalentemente, si $\mathcal{B}(p)$ y $\mathcal{B}(f(p))$ son bases de entornos de p y $f(p)$, entonces f es continua en p si y sólo si $\forall V \in \mathcal{B}(f(p)), \exists U \in \mathcal{B}(p) : f(U) \subseteq V$.

$\Longrightarrow$] Si f es continua en p, dado $V \in \mathcal{B}(f(p))$, existe $U \in \mathcal{E}(p)$ con $f(U) \subseteq V$, pero entonces existe $U' \in \mathcal{B}(p)$ con $U' \subseteq U$, luego $f(U') \subseteq f(U) \subseteq V$.

$\Longleftarrow$] Dado $V \in \mathcal{E}(f(p))$, existe $V' \in \mathcal{B}(f(p))$ con $V' \subseteq V$, pero existe $U \in \mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{E}(p)$ con $f(U) \subseteq V' \subseteq V$, luego f es continua en p.

De aquí que $f : (X, d) \to (Y, d')$ es continua en p respecto a las topologías métricas $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_{d'}$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, (d(x,p) < \delta \implies d'(f(x), f(p)) < \varepsilon)$. **Demostración:** Tomando $\mathcal{B}(p) = \{B(p;\delta) \mid \delta > 0\}$ y $\mathcal{B}(f(p)) = \{B(f(p);r)\}_{r>0}$, la equivalencia es consecuencia de lo anterior y de que $x \in B(p;\delta) \iff d(x,p) < \delta$ y $f(p) \in B(f(p);\varepsilon) \iff d(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

Si $(X, \mathcal{T})$ es 1AN, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua en $p \in X$ si y sólo si $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X, (x_n \to p \implies f(x_n) \to f(p))$. Además, la implicación a la derecha se cumple para espacios topológicos arbitrarios.

$\Longrightarrow$] Si f es continua en p, dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ que converge a p y $V \in \mathcal{E}(f(p))$, existe $U \in \mathcal{E}(p)$ con $f(U) \subseteq V$, y por la convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe un n_U tal que si $n > n_U$ entonces $x_n \in U$, pero entonces $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$, luego $f(x_n) \to f(p)$.

$\Longleftarrow$] Sea $\mathcal{B}(p)$ una base de entornos de p numerable, si suponemos que f no es continua, entonces $\exists V \in \mathcal{B}(f(p)) : \forall U \in \mathcal{B}(p), f(U) \nsubseteq V$. Sea ahora $U_1 \in \mathcal{B}(p)$ y V_1 un entorno de p que no contiene a U_1. Podemos tomar $V_1' := V_1 \cap U_1 \in \mathcal{E}(p)$ y existirá $U_2 \in \mathcal{B}(p)$ con $U_2 \subseteq V_1'$. Como $\mathcal{B}(p)$ es numerable, podemos hacer esto sucesivamente ordenando así sus elementos en una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de entornos con $U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \dots$. Con esto formamos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_i \in U_i$ y $f(x_i) \notin V$, de modo que $x_n \to p$ en X mientras que $f(x_n) \not\to f(p)$ en Y, lo que contradice la hipótesis.

Sean $(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{T}'')$ aplicaciones continuas en $p \in X$ y $f(p)$, respectivamente, entonces $g \circ f$ es continua en p. **Demostración:** Dado $W \in \mathcal{E}(g(f(p)))$, como g es continua en $f(p)$, existe $V \in \mathcal{E}(f(p))$ con $g(V) \subseteq W$, y como f es continua en p, existe $U \in \mathcal{E}(p)$ con $f(U) \subseteq V$. Entonces $g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$.

Dado $S \subseteq X$, si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua en $p \in \overline{S}$, entonces $f(p) \in \overline{f(S)}$.
Demostración: Sea $V \in \mathcal{E}(f(p))$, como f es continua en p, existe $U \in \mathcal{E}(p)$ con $f(U) \subseteq V$, pero como $p \in \overline{S}$ entonces $U \cap S \neq \emptyset$, luego $\emptyset \neq f(U \cap S) \subseteq f(U) \cap f(S) \subseteq V \cap f(S)$.

3.1. Continuidad global

Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua si lo es en cualquier punto de X. Equivalentemente, f es continua si y sólo si $\forall A \in \mathcal{T}', f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$.

$\Longrightarrow$] Sea f continua, $A \in \mathcal{T}'$. Dado $p \in f^{-1}(A)$ arbitrario, entonces $f(p) \in A \in \mathcal{E}(f(p))$, y como f es continua, existe $V_p \in \mathcal{E}(p)$ con $f(V_p) \subseteq A$, luego $V_p \subseteq f^{-1}(A)$. Pero entonces $\bigcup_{p \in f^{-1}(A)} V_p = f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$.

$\Longleftarrow$] Sean $p \in X$ y $A \in \mathcal{E}(f(p))$. Entonces $p \in f^{-1}(A)$, y como por hipótesis $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}(p)$ es pues el entorno de p buscado para que f sea continua en p.

$f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y sólo si $\forall p \in X, V \in \mathcal{E}(f(p)); f^{-1}(V) \in \mathcal{E}(p)$.

$\Longrightarrow$] Trivial.

$\Longleftarrow$] Cada $A \in \mathcal{T}'$ se puede escribir como $A = \bigcup_{q \in A} V_q$ con $V_q \in \mathcal{E}(q)$, de modo que $f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup_{q \in A} V_q) = \bigcup_{q \in A} f^{-1}(V_q)$. Por tanto, si los $f^{-1}(V_q)$ son abiertos, $f^{-1}(A)$ también lo es por ser unión arbitraria de abiertos.

$f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y sólo si $\forall C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}, f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

$\Longrightarrow$] Si f es continua y C es cerrado en $(Y, \mathcal{T}')$, entonces $X \backslash f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \backslash C) \in \mathcal{T}$, luego $f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

$\Longleftarrow$] Análoga.

Algunas aplicaciones continuas:

1. $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.
2. Una aplicación constante siempre es continua.
3. Toda $f : (X, \mathcal{T}_D) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua.
4. Toda $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_T)$ es continua.
5. Si $f, g : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ son continuas entonces $f + g, fg : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ también lo son. Si además $g(x) \neq 0 \forall x \in X$, entonces $\frac{f}{g} : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es continua.
6. Las proyecciones $\pi_i : (\mathbb{R}^n, d_u) \to (\mathbb{R}, d_u)$ con $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ son continuas.
7. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ dada por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, siendo $f_1, \ldots, f_n : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ las llamadas **funciones coordenadas** de f, entonces f es continua si y sólo si $f_1, \ldots, f_n$ lo son.
8. Las funciones polinómicas $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ sobre una o varias variables son siempre continuas.

Para toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y todo $S \subseteq X$ se tiene que $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

3.2. Homeomorfismos

Un **homeomorfismo** es una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ biyectiva, continua y con aplicación inversa continua. Dos espacios topológicos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos, y una **propiedad topológica** es una propiedad de los espacios topológicos invariante por homomorfismos. Ejemplos:

- Dos espacios topológicos triviales, o dos discretos, son homeomorfos si y sólo si existe una aplicación biyectiva entre ellos.
- En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, son homeomorfos todos los intervalos de la forma $[a, b]$ y $[c, d]$; (a, b) y (c, d); $(a, +\infty)$ y $(b, +\infty)$; $(-\infty, a)$ y $(-\infty, b)$, y $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$. $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto y acotado, por ejemplo, por $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

Dada una aplicación *biyectiva* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$, son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. $A \in \mathcal{T} \iff f(A) \in \mathcal{T}'$.
3. $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \iff f(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$.

$1 \implies 2]$ Sea $g := f^{-1} : Y \to X$ continua y $A \in \mathcal{T}$, entonces $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) = g^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$. Recíprocamente, si $f(A) \in \mathcal{T}'$ entonces $f^{-1}(f(A)) = A \in \mathcal{T}$.

$2 \implies 1]$ Para ver que f es continua, dado $A \subseteq X$, si $f(A) \in \mathcal{T}'$ entonces $f^{-1}(f(A)) = A \in \mathcal{T}$. Para ver que $g := f^{-1}$ es continua, dado $A \subseteq X$, si $A \in \mathcal{T}$ entonces $g^{-1}(A) = f(A) \in \mathcal{T}'$.

$1 \iff 3]$ Análogo usando la caracterización de continuidad por cerrados.

Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es **abierta** si $\forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$, y es **cerrada** si $\forall C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}, f(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$. Así, una aplicación biyectiva es un homeomorfismo si y sólo si es continua y abierta (o continua y cerrada).

$f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es abierta si y sólo si $\forall S \subseteq X, f(\mathring{S}) \subseteq \overbrace{f(S)}^{\circ}$, es un homeomorfismo si y sólo si es biyectiva y $\forall S \subseteq X, f(\mathring{S}) = \overbrace{f(S)}^{\circ}$, y es cerrada si y sólo si $\forall S \subseteq X, \overline{f(S)} \subseteq f(\overline{S})$.

3.3. Continuidad en subespacios

La aplicación inclusión $i : (H, \mathcal{T}_H) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua. **Demostración:** Si $A \in \mathcal{T}$, $i^{-1}(A) = A \cap H \in \mathcal{T}_H$.

Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ con $f(X) \subseteq H \subseteq Y$ es continua en $p \in X$ si y sólo si $\hat{f} : (X, \mathcal{T}) \to (H, \mathcal{T}_H)$ con $\hat{f}(x) = f(x)$ es continua en p. En particular, f es continua si y sólo si $\hat{f}$ es continua.

$\implies]$ Si f es continua en p, dado $V' \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}'_H}(f(p))$, existe $V \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}'}(f(p))$ con $V' = V \cap H$, luego existe $U \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}(p)$ tal que $f(U) \subseteq V$, y entonces $f'(U) = f(U) = f(U) \cap H \subseteq V \cap H = V'$.

$\Longleftarrow$] Si $f:(X,\mathcal{T})\to(H,\mathcal{T}'_H)$ es continua en p, como la inclusión es continua en $f(p)$ entonces $f=i\circ\hat{f}$ es también continua en p.

Si $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ es continua en $p\in H\subseteq X$ entonces $f|_H:(H,\mathcal{T}_H)\to(Y,\mathcal{T}')$ también es continua en p. En particular, si f es continua también lo es $f|_H$. **Demostración:** Como la inclusión es continua en p, $f|_H=f\circ i$ también lo es.

$f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ es continua en $p\in X$ si y sólo si existe $U\in\mathcal{E}(p)$ tal que $f|_U$ es continua en p.

$\Longrightarrow$] Basta tomar $U=X$.

$\Longleftarrow$] Si $f|_U:(U,\mathcal{T}_U)\to(Y,\mathcal{T}')$ es continua en p, sea $V\in\mathcal{E}(f(p))$, por la continuidad de $f|_U$ existe $U'\in\mathcal{E}(p)$ tal que $f|_U(U')\subseteq V$, con lo que $f(U')=f|_U(U')\subseteq V$, lo que prueba la continuidad de f en p.

Sea $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de $(X,\mathcal{T})$ con $X=\bigcup_{i\in I}A_i$, si $f|_{A_i}$ es continua para todo $i\in I$, entonces f es continua. **Demostración:** Dado $p\in X$, existe un $i_0\in I$ tal que $p\in A_{i_0}\in\mathcal{E}(p)$ y por la propiedad anterior, f es continua en p.

Sea $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ y $\{C_1,\dots,C_n\}$ una familia finita de cerrados de $(X,\mathcal{T})$ con $X=\bigcup_{i=1}^n C_i$, si $f|_{C_i}$ es continua para todo $i\in 1,\dots,n$ entonces f es continua. **Demostración:** Dado $C'\in(Y,\mathcal{T}')$, $f^{-1}(C')=f^{-1}(C')\cap X=f^{-1}(C')\cap(\bigcup_{i=1}^n C_i)=\bigcup_{i=1}^n(C_i\cap f^{-1}(C'))=\bigcup_{i=1}^n f|_{C_i}^{-1}(C')$. Como $f|_{C_i}$ es continua para cualquier $i\in\{1,\dots,n\}$, $f|_{C_i}^{-1}(C')$ es cerrado en $(C_i,\mathcal{T}_{C_i})$, y como C_i es cerrado en $(X,\mathcal{T})$ entonces $f|_{C_i}^{-1}(C')$ es cerrado en $(X,\mathcal{T})$. Por tanto $f^{-1}(C')$ es cerrado en $(X,\mathcal{T})$, luego f es continua.

3.4. Continuidad uniforme e isometrías

Definimos la **oscilación** de una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en un intervalo $I\subseteq D$ como

$$\theta(f,J)=\begin{cases}\sup\{f(I)\}-\inf\{f(I)\} & \text{si } f(I) \text{ está acotado}\\ +\infty & \text{si } f(I) \text{ no está acotado}\end{cases}$$

Una aplicación $f:(X,d)\to(Y,d')$ es **uniformemente continua** si $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x_1,x_2\in X,(d(x_1,x_2)<\delta\implies d'(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon)$. Toda aplicación uniformemente continua es continua.

Llamamos **isometría** a una aplicación $f:(X,d)\to(Y,d')$ tal que $\forall x_1,x_2\in X,(d(x_1,x_2)=d'(f(x_1),f(x_2)))$. Toda isometría es inyectiva y uniformemente continua. Finalmente, una aplicación $f:(X,d)\to(X,d')$ es **lipschitziana** si $\exists M>0:\forall x,y\in X,d'(f(x),f(y))\leq Md(x,y)$, y es además **contráctil** si podemos encontrar un $M<1$ para el que se cumpla la propiedad.

Capítulo 4

Espacios compactos

Un **recubrimiento** de $S \subseteq X$ es una familia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X con $S \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, y un **subrecubrimiento** es una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ que es también recubrimiento de S. Un recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ de $S \subseteq X$ es **finito** si está formado por una cantidad finita de conjuntos, y es **abierto** en $(X, \mathcal{T})$ si cada A_i lo es. Con esto, un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **compacto** si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

4.1. Subespacios compactos

El subespacio $(K, \mathcal{T}_K)$ de $(X, \mathcal{T})$ es compacto si y sólo si todo recubrimiento de K por abiertos de $(X, \mathcal{T})$ admite un subrecubrimiento finito.

$\Longrightarrow$] Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de K por abiertos de $(X, \mathcal{T})$, entonces $\{A_i \cap K\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de K por abiertos de $(K, \mathcal{T}_K)$, por lo que existe una familia finita $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ con $K = (A_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (A_{i_r} \cap K)$, con lo que $K \subseteq A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_r}$.

$\Longleftarrow$] Sea $\{A'_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de K por abiertos de $(K, \mathcal{T}_K)$, y sea por tanto $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de $(X, \mathcal{T})$ con $A'_i = A_i \cap K$, entonces $K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ y por hipótesis existen $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ tales que $K \subseteq A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_r}$, de modo que $K = (A_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (A_{i_r} \cap K) = A'_{i_1} \cup \cdots \cup A'_{i_r}$. Por tanto K es compacto.

Por tanto el concepto de compacidad es intrínseco del espacio topológico, pues no depende del espacio total donde se considere.

Todo cerrado C de un compacto $(X, \mathcal{T})$ es compacto. **Demostración:** Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de C por abiertos de $(X, \mathcal{T})$, entonces $\mathcal{A} \cup \{X \backslash C\}$ es un recubrimiento abierto de X, del que extraemos un subrecubrimiento finito $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$, de modo que $C \subseteq X = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$.

El **teorema de Heine-Borel** afirma que todo intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es compacto. **Demostración:** Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a, b]$ por abiertos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y definimos $G = \{x \in [a, b] | \exists \{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{A}) : [a, x] \subseteq A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}\}$. Como $a \in [a, b]$, existe $i_0 \in I$ con $a \in A_{i_0} \in \mathcal{T}_u$, luego $\exists \varepsilon > 0 : [a, a + \varepsilon) \subseteq A_{i_0}$, de modo que $[a, a + \varepsilon) \subseteq G$ y $G \neq \emptyset$. Ahora veamos que G es cerrado. Sea $y \in [a, b] \backslash G$, y como $y \in [a, b]$, existe $j_0 \in I$ con $y \in A_{j_0} \in \mathcal{T}_u$, con lo que $\exists \delta > 0 : (y - \delta, y + \delta) \subseteq A_{j_0}$, e $(y - \delta, y + \delta) \subseteq [a, b] \backslash G$.

En efecto, si existiera un $z \in (y-\delta, y+\delta) \cap G$, como $z \in G$, entonces $[a,z] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$, y como $\{A_{i_0}, \ldots, A_{i_n}, A_{j_0}\} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{A})$, entonces para $t \in (y-\delta, y+\delta)$ se tendría $[a,t] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j} \cup A_{j_0}$, llegando así a la contradicción de que $y \in G$. En consecuencia, $(y-\delta, y+\delta) \subseteq [a,b] \backslash G$, y como y es un elemento arbitrario de $[a,b]\backslash G$, se tiene que $[a,b]\backslash G$ es abierto y por tanto G es cerrado. Finalmente, vemos que $G = [a,b]$. En efecto, sea $s = \sup(G)$, y como G es cerrado entonces $s \in G$. Supongamos que $s < b$, entonces existe $k_0 \in I$ con $s \in A_{k_0}$ y por tanto $[s, s+\varepsilon) \subseteq A_{k_0}$ contradiciendo que sea s el supremo de G. Y como $s \in G \implies [a,s] \subseteq G$, entonces $G = [a,b]$.

En un espacio métrico (X,d) donde las bolas cerradas son siempre compactas (como sabemos que ocurre en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ por el teorema anterior), todo subespacio cerrado y acotado es compacto. **Demostración:** Sea $C \subseteq X$ cerrado y acotado, entonces existen $x_0 \in X$ y $r > 0$ con $C \subseteq B_d(x_0; r) \subseteq B_d[x_0; r]$, y como C es un cerrado contenido en el compacto $B_d[x_0; r]$, es también compacto.

Todo subespacio compacto K de un espacio topológico Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ es cerrado. **Demostración:** Probamos que $X\backslash K$ es abierto, para lo cual vemos que todos sus puntos son interiores, es decir, $\forall p \in X\backslash K, \exists A \in \mathcal{E}(p) : A \subseteq X\backslash K$. Dado $p \in X\backslash K$, para cada $x \in K$, como $p \neq x$, la condición de Hausdorff nos asegura que existen $A_x \in \mathcal{E}(p)$ y $B_x \in \mathcal{E}(x)$ disjuntos. Ahora bien, $\{B_x\}_{x\in K}$ es un recubrimiento de K por abiertos de X del que podemos extraer un subrecubrimiento finito $B_{x_1}, \ldots, B_{x_r}$ para ciertos $x_1, \ldots, x_r \in K$. Sea entonces $A \coloneqq \bigcap_{i=1}^{r} A_{x_i} \in \mathcal{E}(p)$, dado $a \in A$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ se tiene que $a \in A_{x_i}$ y por tanto $a \notin B_{x_i}$, luego $a \notin K$ y por tanto $A \subseteq X\backslash K$.

Todo subespacio compacto K de un espacio métrico (X,d) es acotado. **Demostración:** Dado $a \in X$, para todo $x \in K$ existe un $n_x \in \mathbb{N}$ con $d(x,a) < n_x$, de modo que $\{B(a;n)\}_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento abierto de K del que podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{B(a;n_1), \ldots, B(a;n_r)\}$, pero entonces $K \subseteq B(a;n_1) \cup \cdots \cup B(a;n_r) = B(a; \max\{n_1, \ldots, n_r\})$.

De las tres últimas proposiciones se tiene que si (X,d) es un espacio métrico donde las bolas cerradas son siempre compactas, entonces un subespacio de $(X, \mathcal{T}_d)$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado en (X,d).

4.2. Productos finitos

Dados dos espacios topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$, llamamos **espacio topológico producto** $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) = (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ a aquel en el que $G \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \iff \forall (x_1, x_2) \in G, \exists A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2 : (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \subseteq G$. Veamos que en efecto este es un espacio topológico.

1. $\emptyset, X_1 \times X_2 \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

2. Sean $G, G' \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, dado $(x_1, x_2) \in G \cap G'$, existen $A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2$ con $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \subseteq G$, y análogamente, existen $A_1' \in \mathcal{T}_1, A_2' \in \mathcal{T}_2$ con $A_1' \times A_2' \subseteq G'$. Por tanto $(x_1, x_2) \in (A_1 \cap A_1') \times (A_2 \cap A_2') \subseteq G \cap G'$. En efecto, si $(p_1, p_2) \in (A_1 \cap A_1') \times (A_2 \cap A_2')$ entonces $p_1 \in A_1$ y $p_2 \in A_2$ y por tanto $(p_1, p_2) \in A_1 \times A_2 \subseteq G$, y análogamente $(p_1, p_2) \in G'$.

3. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ y $(x_1, x_2) \in \bigcup_{i\in I} G_i$, entonces existe $j \in I$ con $(x_1, x_2) \in G_j \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, de modo que existen $A_{j1} \in \mathcal{T}_1$ y $A_{j2} \in \mathcal{T}_2$ tales que $(x_1, x_2) \in A_{j1} \times A_{j2} \subseteq G_j \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$.

$G \subseteq X_1 \times X_2$ es abierto en $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ si y sólo si existen un conjunto de índices I y abiertos $A_{i1} \in \mathcal{T}_1$ y $A_{i2} \in \mathcal{T}_2$ para cada $i \in I$ tales que $G = \bigcup_{i\in I}(A_{i1} \times A_{i2})$.

$\Longrightarrow$] Si $G \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, para cada $x = (x_1, x_2) \in G$ existen $A_{x_1} \in \mathcal{T}_1$ y $A_{x_2} \in \mathcal{T}_2$ tales que $x = A_{x_1} \times A_{x_2} \subseteq G$, luego $G = \bigcup_{x\in G}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in G}(A_{x_1} \times A_{x_2}) \subseteq G$.

$\Longleftarrow$] Si $G = \bigcup_{i\in I}(A_{i1} \times A_{i2})$, entonces todo punto de G se encuentra en algún $A_{j1} \times A_{j2}$, con lo que G cumple la definición de abierto de la topología producto.

El **teorema de Tíjonov** o **Tychonoff** afirma que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es compacto si y sólo si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son compactos.

$\Longrightarrow$] Si $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es compacto, sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X, entonces $\{A_i \times Y\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $X \times Y$ del que podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{A_1 \times Y, \dots, A_r \times Y\}$, con lo que $\{A_1, \dots, A_r\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ para X.

$\Longleftarrow$] Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ compactos, $\mathcal{W}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$ y $\mathcal{G}$ la familia de subconjuntos $S \subseteq X$ tales que $S \times Y$ puede ser recubierto por una cantidad finita de abiertos de $\mathcal{W}$, hemos de demostrar que $X \in \mathcal{G}$.

- Sean $S, S' \in \mathcal{G}$, entonces existen $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ subrecubrimientos finitos de $S \times Y$ y $S' \times Y$, respectivamente, por lo que $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}'$ es un subrecubrimiento finito de $(S \cup S') \times Y$ y $S \cup S' \in \mathcal{G}$.
- Dado $x \in X$, para cada $y \in Y$, como $\mathcal{W}$ es un recubrimiento de $X \times Y$, existe $W_y \in \mathcal{W}$ tal que $(x, y) \in W_y$, de modo que podemos encontrar $A_y \in \mathcal{T}$ y $B_y \in \mathcal{T}'$ tales que $(x, y) \in A_y \times B_y \subseteq W_y$. Así, $\{B_y\}_{y\in Y}$ es un recubrimiento abierto de Y del que podemos obtener un subrecubrimiento finito $\{B_{y_1}, \dots, B_{y_r}\}$. Sea entonces $A_x = A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_r}$, entonces $A_x \times Y = A_x \times (\bigcup_{i=1}^r B_{y_i}) = \bigcup_{i=1}^r (A_x \times B_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^r (A_{y_i} \times B_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^r W_{y_i}$, de modo que $A_x \in \mathcal{G}$.
- Por lo segundo, tenemos un recubrimiento abierto de X de la forma $\{A_x\}_{x\in X}$ donde cada $A_x \in \mathcal{G}$, por lo que podemos encontrar un subrecubrimiento finito $X = A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_k}$, y por lo primero esto implica $X \in \mathcal{G}$.

De esto, junto con el apartado anterior, se obtiene la versión general del teorema de Heine-Borel, que afirma que un subespacio de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado para alguna de las métricas d_T, d_E y d_∞.

4.3. Compacidad y continuidad

Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua y $(X, \mathcal{T})$ es compacto entonces $f(X)$ es compacto.
Demostración: Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de $(Y, \mathcal{T}')$, entonces $\{f^{-1}(A_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X, que admite pues un subrecubrimiento finito $\{f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_r)\}$, con lo que $\{A_1, \dots, A_r\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ para $f(X)$.

Esto significa que la compacidad es una propiedad topológica, es decir, si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son homeomorfos y $(X, \mathcal{T})$ es compacto, $(Y, \mathcal{T}')$ también lo es. También significa que, si $(X, \mathcal{T})$ es compacto, toda función continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, d')$ es cerrada y acotada. En particular toda

$f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ continua alcanza su máximo y su mínimo en X, y si $(X, \mathcal{T}) = ([a, b], \mathcal{T}_u)$ entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado.

El **teorema de la continuidad de la función inversa** afirma que toda $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ biyectiva y continua, siendo $(X, \mathcal{T})$ compacto e $(Y, \mathcal{T}')$ Hausdorff, es un homeomorfismo. **Demostración:** Basta probar que $g := f^{-1}$ es continua. Así, f lleva compactos de $(X, \mathcal{T})$ a compactos de $(Y, \mathcal{T}')$, pero dado $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, C es compacto, $f(C)$ también y por ser $(Y, \mathcal{T}')$ Hausdorff, $f(C)$ es cerrado. Hemos probado que dado $C \subseteq X$ cerrado, $g^{-1}(C) = f(C)$ es cerrado, luego g es continua.

Por tanto toda aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ inyectiva y continua, siendo $(X, \mathcal{T})$ compacto e $(Y, \mathcal{T}')$ Hausdorff, es un homeomorfismo entre $(X, \mathcal{T})$ y $(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$.

Toda $f : (X, d) \to (Y, d')$ continua, siendo $(X, \mathcal{T}_d)$ compacto, es uniformemente continua. **Demostración:** Dado $\varepsilon > 0$, para $p \in X$, existe $\delta_p > 0$ tal que $\forall y \in X, (d(p, y) < \delta_p \implies d'(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2})$. Sea ahora $\delta'_p := \frac{\delta_p}{2}$ y $\{B(p; \delta'_p)\}_{p \in X}$ un recubrimiento abierto de X, podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{B(p_1; \delta'_{p_1}), \dots, B(p_r; \delta'_{p_r})\}$, y llamamos $\delta := \text{mín}\{\delta'_{p_1}, \dots, \delta'_{p_r}\}$. Sean $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, entonces existe $i \in \{1, \dots r\}$ con $d(x, p_i) < \delta_{p_i}$, luego $d(y, p_i) \leq d(y, x) + d(x, p_i) < \delta + \delta'_{p_i} \leq 2\delta'_{p_i} = \delta_{p_i}$. Así, $d'(f(x), f(p_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d'(f(y), f(p_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$, y por tanto $d'(f(y), f(x)) \leq d'(f(y), f(p_i)) + d'(f(p_i), f(x)) < \varepsilon$.

4.4. Compacidad por sucesiones

$(X, \mathcal{T})$ es **compacto por sucesiones** si toda sucesión admite una subsucesión convergente. Ahora probaremos que todo espacio métrico compacto es compacto por sucesiones, y viceversa.

Primero probamos que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en (X, d) y p es un punto de acumulación de ella, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión convergente a p. En efecto, sea $S = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el conjunto de puntos, para todo $r > 0$ debe ser $(B(p; r) \backslash \{p\}) \cap S$ infinito, pues si fuera finito $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_r}\}$ podríamos escoger $r' > 0$ con $r' < d(p, x_{n_i}) \forall i$ y por tanto $(B(p; r') \backslash \{p\}) \cap S = \emptyset$, lo que contradice que p sea punto de acumulación. Ahora bien, si para $k = 1$ tomamos $r = 1$ existirá $x_{n_1} \in B(p; 1)$, y si tenemos $x_{n_k} \in B(p; \frac{1}{k})$ con $n_k > n_{k-1}$ entonces como $B(p; \frac{1}{k+1}) \cap S$ es infinito, podemos tomar $x_{n_{k+1}} \in B(p; \frac{1}{k+1})$ con $n_{k+1} > n_k$, formando una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ que converge a p. Esto también vale para cualquier espacio topológico 1AN y Hausdorff.

Ahora vemos que todo subconjunto infinito S de $(X, \mathcal{T})$ compacto tiene al menos un punto de acumulación. Supongamos que no los tiene, es decir, $\forall p \in X, \exists U_p \in \mathcal{E}(p) : (U_p \backslash \{p\}) \cap S = \emptyset$. Entonces podríamos considerar el recubrimiento abierto $\{U_p\}_{p \in X}$ de X, del que podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{U_{p_1}, \dots, U_{p_r}\}$, pero $S = S \cap X = S \cap (U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_r}) = (S \cap U_{p_1}) \cup \dots \cup (S \cap U_{p_r}) \subseteq \{p_1, \dots, p_r\}$.#

Con esto podemos probar que todo espacio métrico compacto es compacto por sucesiones. Supongamos que (X, d) es compacto y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Ahora sea $S = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si S es finito, debe existir $p \in X$ que se repite infinitas veces en la sucesión, y estos términos forman una subsucesión constante y por tanto convergente. Si es infinito, posee un punto de acumulación y por tanto tiene una subsucesión convergente.

Observamos que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ con d_T, d_E o d_∞ posee una subsucesión convergente.

(X, d) es **precompacto** o **totalmente acotado** si para cada $r > 0$ existe una cantidad finita de puntos $\{x_1, \dots, x_m\}$ de X tales que $X = B(x_1; r) \cup \dots \cup B(x_m; r)$. Esta definición es casi igual a la de compacto, pero no se considera un recubrimiento abierto cualquiera sino solo los de la forma $\{B(p;r)\}_{p\in X}$. Así, todo espacio métrico compacto es precompacto, y todo espacio precompacto es acotado.

Todo espacio métrico compacto por sucesiones es precompacto. Sea (X,d) un espacio métrico compacto por sucesiones tal que $\exists r>0:\forall S\subseteq X, X\neq\bigcup_{x\in S}B(x;r)$, y construiremos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X de la siguiente forma. Sea $x_1\in X$ cualquiera y supongamos que hemos construido $x_1,\dots,x_m$ de modo que $d(x_i,x_j)>r\forall i,j\leq m, i\neq j$, y como por la hipótesis $X\neq\bigcup_{i=1}^m B(x_i;r)$, existe $x_{m+1}\in X\setminus\bigcup_{i=1}^m B(x_i;r)$ y tenemos por inducción una sucesión tal que $d(x_i,x_j)>r\forall i\neq j$. Ahora bien, por la compacidad por sucesiones ha de existir una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a un $p\in X$, pero entonces existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $d(p,x_{n_k})<\frac{r}{2}$ para $k\geq k_0$ y entonces $d(x_{n_k},x_{n_{k+1}})\leq r$, lo cual es absurdo.

Todo espacio métrico precompacto es separable. Si (X,d) es precompacto, para $n\in\mathbb{N}$ existen $\{x_{1n},\dots,x_{r_nn}\}$ tales que $X=\bigcup_{i=1}^{r_n}B(x_{in};\frac{1}{n})$. El conjunto $D=\{x_{in}\}_{n\in\mathbb{N},1\leq i\leq r_n}$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos. Probaremos que es denso viendo que, dado $p\in X$, se tiene $p\in\overline{D}$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ existe x_{in} tal que $p\in B(x_{in};\frac{1}{n})$, pero entonces $x_{in}\in B(p;\frac{1}{n})$ y $B(p;\frac{1}{n})$ corta a D, luego D corta a todos los entornos de la base $\{B(p;\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Dado un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de (X,d), $r>0$ es un **número de Lebesgue** de $\mathcal{A}$ si $\forall p\in X,\exists A_p\in\mathcal{A}:B(p;r)\subseteq A_p$.

El **lema de Lebesgue** afirma que si (X,d) es compacto por sucesiones entonces todo recubrimiento abierto admite un número de Lebesgue. Sea $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X que no admite un número de Lebesgue. Entonces $\forall r>0,\exists p\in X:\forall i\in I, B(p;r)\nsubseteq A_i$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ tal que $B(x_n;\frac{1}{n})\nsubseteq A_i\forall i\in I$, como (X,d) es compacto por sucesiones, existirá $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un $p\in X$. Sea $i_0\in I$ con $p\in A_{i_0}\in\mathcal{T}_d$, existe $r_0>0$ con $B(p;r_0)\subseteq A_{i_0}$. Sea $N\in\mathbb{N}$ con $d(p,x_N)<\frac{r_0}{2}$ y $\frac{1}{N}<\frac{r_0}{2}$. Ahora, tomando $t\in B(x_N;\frac{1}{N})$ vemos que $d(p,y)\leq d(p,x_N)+d(x_N,y)<r_0$, luego $y\in B(p;r_0)\subseteq A_{i_0}$ y por tanto $B(x_N;\frac{1}{N})\subseteq B(p;r_0)$, lo cual es absurdo.

De aquí que todo espacio métrico compacto por sucesiones es compacto. Sean (X,d) un espacio métrico compacto por sucesiones y $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Sea ε un número de Lebesgue para $\mathcal{A}$. Entonces existe un recubrimiento finito de X mediante bolas $\{B(x_1;\varepsilon),\dots,B(x_r;\varepsilon)\}$ de radio ε. Pero como cada bola $B(x_i;\varepsilon)$ ha de estar contenida en un abierto A_i de $\mathcal{A}$, tendremos que $\{A_1,\dots,A_r\}$ es un subrecubrimiento finito de X.

Capítulo 5

Espacios conexos

Una **separación por abiertos** o **partición por abiertos** de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un par $\{A, B\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos con $A \dot\cup B = X$. $(X, \mathcal{T})$ es **conexo** si no admite ninguna separación por abiertos, y de lo contrario es **disconexo**. Equivalentemente, $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y sólo si no existe ningún par de cerrados $\{C, D\}$ no vacíos con $C \dot\cup D = X$, si y sólo si los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados al mismo tiempo son el total y el vacío.

$(X, \mathcal{T})$ es conexo si y sólo si toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_D)$ es constante.

$\Longrightarrow$] Sea $(X, \mathcal{T})$ conexo y supongamos que existe $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_D)$ continua no constante. Entonces existen $p, q \in X$ con $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$. Como $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos, $A = f^{-1}(\{0\})$ y $B = f^{-1}(\{1\})$ forman una separación por abiertos de $(X, \mathcal{T})$.#

$\Longleftarrow$] Sea $(X, \mathcal{T})$ disconexo y A y B abiertos no vacíos de $(X, \mathcal{T})$ con $A \dot\cup B = X$. Si definimos $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_D)$ tal que $f(p) = 0$ si $p \in A$ y $f(p) = 1$ si $p \in B$, entonces f es continua porque la imagen inversa de todo abierto es abierto, pero no es constante.

$(X, \mathcal{T})$ es conexo si y sólo si toda aplicación continua cumple que $\forall x, y \in X, c \in (f(x), f(y)); \exists z \in X : f(z) = c$.

$\Longrightarrow$] Supongamos que existe $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ tal que existen $x, y \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ con $f(x) < c < f(y)$ pero $c \notin f(X)$. Entonces $f^{-1}(-\infty, c)$ y $f^{-1}(c, +\infty)$ forman una separación por abiertos de $(X, \mathcal{T})$ (ningún $x \in X$ va a parar a $(-\infty, c)$ y a $(c, +\infty)$ a la vez).

$\Longleftarrow$] Sea $(X, \mathcal{T})$ disconexo, entonces existe $g : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_D)$ no constante. Si componemos esto con la inclusión $\{0, 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}$, obtenemos $x, y \in X$ con $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, y si tomamos $c = \frac{1}{2}$ entre $f(x)$ y $f(y)$ entonces $c \notin f(X)$.

Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua entonces $(f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ es conexo. **Demostración:** Sea B abierto y cerrado en $(f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$, como $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, $f^{-1}(B)$ es abierto y cerrado en $(X, \mathcal{T})$, por lo que es el total o el vacío y por tanto $B = f(X)$ o $B = \emptyset$.

De aquí que si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son homeomorfos y uno es conexo, el otro también, y si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua y $(X, \mathcal{T})$ es conexo, la gráfica $\{(x, f(x))\}_{x \in X}$ es conexa, pues es homeomorfa a $(X, \mathcal{T})$.

5.1. Subespacios conexos de $\mathbb{R}$

El **teorema de Bolzano** afirma que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, existe $x \in [a,b]$ con $f(x) = 0$. El **teorema de los valores intermedios** o **primer teorema de Weierstrass** afirma que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $c \in \mathbb{R}$ cumple $f(a) \leq c \leq f(b)$ entonces existe $x \in [a,b]$ con $f(x) = c$.

$S \subseteq \mathbb{R}$ no vacío es un **intervalo** si y sólo si $\forall x, y \in S, z \in \mathbb{R}; (x < z < y \implies z \in S)$. Un subespacio de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es conexo si y sólo si es un intervalo.

$\implies$] Si S no es un intervalo, existen $x, y \in S$ y $z \in \mathbb{R}\backslash S$ con $x < z < y$, luego $S \cap (-\infty, z)$ y $S \cap (z, +\infty)$ es una separación por abiertos no vacíos de $(S, \mathcal{T}_u|_S)$ y por tanto es disconexo.

$\impliedby$] Sea S un intervalo y supongamos que no es conexo. Entonces existe $f : (S, \mathcal{T}_u|_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ tal que existen $x, y \in S$ con $x < y$ y $f(x) \neq f(y)$ y existe $c \in (f(x), f(y))$ con $c \notin f(S)$. Pero entonces existe $f : ([x,y], \mathcal{T}_u|_{[x,y]}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ que no cumple el teorema de los valores intermedios.#

De aquí que si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es continua entonces $f(X)$ es un intervalo.

5.2. Propiedades

Si H es un subespacio conexo de $(X, \mathcal{T})$ entonces todo S con $H \subseteq S \subseteq \overline{H}$ es conexo. **Demostración:** Supongamos que existen abiertos no vacíos A' y B' en $(S, \mathcal{T}_S)$ con $A' \dot{\cup} B' = S$. Entonces existen $A, B \in \mathcal{T}$ no vacíos con $A' = A \cap S$ y $B' = B \cap S$, luego $(A \cap H) \cap (B \cap H) = (A' \cap H) \cap (B' \cap H) = A' \cap B' \cap H = \emptyset$ y $(A \cap H) \cup (B \cap H) = (A' \cap H) \cup (B' \cap H) = (A' \cup B') \cap H = S \cap H = H$, y como $(H, \mathcal{T}|_H)$ es conexo, debe ser $A \cap H = \emptyset$ o $B \cap H = \emptyset$. Si por ejemplo $A \cap H = \emptyset$, como $A' \neq \emptyset$, existe $p \in A' = A \cap S \subseteq A \cap \overline{H}$, pero A es un entorno de p que no corta a H por lo que p no puede estar en $\overline{H}$.#

De aquí que la clausura de un subespacio conexo es conexa. Veamos ahora el **criterio del peine**, que afirma que dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $\{H_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios conexos para la que existe $i_0 \in I$ con $H_i \cap H_{i_0} \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces $H \coloneqq \bigcup_{i \in I} H_i$ es conexo. **Demostración:** Primero vemos que dado $C \subseteq X$ conexo y $\{A, B\}$ una separación de X por abiertos entonces $C \subseteq A$ o $C \subseteq B$. En efecto, si no fuera así se tendría $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B \neq \emptyset$, y $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ siendo $C \cap A$ y $C \cap B$ abiertos en $(C, \mathcal{T}_C)$ no vacíos con $(C \cap A) \cap (C \cap B) = C \cap (A \cap B) = \emptyset$, contradiciendo que C sea conexo. Ahora bien, si $\{A, B\}$ es una separación por abiertos de $(H, \mathcal{T}_H)$, dado $i \in I$, $H_i \subseteq B$ o $H_i \subseteq A$. Supongamos $H_{i_0} \subseteq A$. Como para cualquier i se tiene $H_i \cap H_{i_0} \neq \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset$ no puede ser $H_i \subseteq B$, luego cada $H_i \subseteq A$ y $H = \bigcup_{i \in I} H_i \subseteq A$, con lo que $B = \emptyset$ y H es conexo.

En particular, si $\{H_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios conexos de $(X, \mathcal{T})$ con $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ entonces $H \coloneqq \bigcup_{i \in I} H_i$ es conexo, y si H_1 y H_2 son conexos con $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ entonces $H_1 \cup H_2$ es conexo.

El espacio producto $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ es conexo si y sólo si $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ son conexos.

$\implies$] Se deriva de que las proyecciones son continuas.

$\impliedby$] Sean $X_1, X_2 \neq \emptyset$ (de lo contrario $X_1 \times X_2 = \emptyset$ y la propiedad es cierta), dado $p_2 \in X_2$, $X_1 \times \{p_2\}$ es homeomorfo a $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y por tanto conexo, y lo mismo ocurre con $\{p_1\} \times X_2$

dado $p_1 \in X_1$. La unión de espacios conexos $\bigcup_{p_1 \in X_1} \{p_1\} \times X_2 \cup \bigcup_{p_2 \in X_2} X_1 \times \{p_2\}$ da $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$, y basta aplicar el criterio del peine.

5.3. Conexión por arcos

Dados $p, q \in X$, un **arco** de p a q en $(X, \mathcal{T})$ es una aplicación continua $\sigma : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (X, \mathcal{T})$ con $\sigma(0) = p$ y $\sigma(1) = q$. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **conexo por arcos** o **por caminos** si cualquier par de puntos pueden ser conectados por un arco.

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cualesquiera $x, y \in S$, el **segmento** $L_{xy} := \{(1-t)x + ty\}_{t \in [0,1]}$ es un subconjunto de S. Todo subconjunto convexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es conexo por arcos. Por tanto las bolas en d_T, d_E y d_∞, tanto abiertas como cerradas, y los rectángulos, son conexos por arcos.

Todo espacio topológico conexo por arcos es conexo. **Demostración:** Supongamos que existe una separación $\{A, B\}$ por abiertos no vacíos del espacio $(X, \mathcal{T})$ conexo por arcos. Entonces podemos tomar $a \in A$ y $b \in B$ y σ un arco de a hasta b. Pero como $\sigma([0,1])$ es conexo, debe estar contenido en A o en B.#

El recíproco no se cumple, pues $([0,1] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \times [0,1]) \cup \{(0,1)\}$ en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ es conexo pero no conexo por arcos.

Sean $\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \to X$ dos arcos en $(X, \mathcal{T})$ que unen, respectivamente, x con y e y con z, llamamos **unión**, **producto** o **composición de arcos**, escrito $\sigma_1 * \sigma_2$, a la aplicación $\tau : [0,1] \to X$ dada por

$$\tau(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que es un arco que une x con z.

Decimos que un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **estrellado** en $p \in S$ si $\forall x \in S, L_{px} \subseteq S$. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo por arcos si y sólo si existe $p \in X$ tal que cualquier $q \in X$ se pueda unir con p por un arco en $(X, \mathcal{T})$, y en particular los subconjuntos estrellados son conexos por arcos.

Todo subconjunto abierto y conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es conexo por arcos. **Demostración:** Sean U un abierto conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $p \in U$ y A el subconjunto de los puntos de U que se pueden unir con p. Si $y \in A$, como U es abierto, existe $r > 0$ con $B(y; r) \subseteq U$ y si $z \in B(y; r)$, la unión del arco que une p con y y el radio que une y con z es un arco que une p con z, luego $B(y; r) \subseteq A$ y, como y es arbitrario, A es abierto. Ahora bien, sea $y \in U \backslash A$, existe $r > 0$ con $B(y; r) \subseteq U$. Pero si existiera $z \in B(y; r)$ con $z \in A$, la unión del arco que une p con z y el radio que une z con y es un arco que une p con y y por tanto $y \in A$#, luego $B(y; r) \subseteq U \backslash A$, y como y es arbitrario, $U \backslash A$ es abierto y A es cerrado. Como A es abierto y cerrado en un espacio conexo y $A \neq \emptyset$ porque $p \in A$, entonces $A = U$ y U es conexo por arcos.