Topología de superficies

Copyright © 2020 Juan Marín Noguera, juan.marinn@um.es.

Esta obra está bajo la licencia Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons (CC-BY-SA 4.0). Para ver una copia de esta licencia, visite https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.

Bibliografía:

- Diapositivas de clase, Pascual Lucas (2019–20), Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia.
- Ian Richard Cole (2015). *Modelling CPV*, https://repository.lboro.ac.uk/articles/Modelling_CPV/9523520.
- Martin D. Crossley (2005), Springer. *Essential Topology*.
- Wikipedia, the Free Encyclopedia, https://en.wikipedia.org/.
- Klint Qinami. *Algebraic Topology*, https://www.cs.princeton.edu/~kqinami/pdfs/algebraic_topology_notes.pdf.
- James R. Munkres (2000). *Topología* (segunda edición).

Capítulo 1

Espacios topológicos

Dado un conjunto X, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **topología** si $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}, \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ y $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}, \bigcap \{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{T}$. Entonces llamamos **espacio topológico** al par $(X, \mathcal{T})$, (**conjuntos**) **abiertos** a los elementos de $\mathcal{T}$ y (**conjuntos**) **cerrados** a sus complementarios. Así, $\emptyset$ y X son cerrados, la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y la unión finita de cerrados es un cerrado.

Dado $X \neq \emptyset$, llamamos **topología trivial** o **indiscreta** a $\mathcal{T}_{\text{ind}} := \{\emptyset, X\}$ y **topología discreta** a $\mathcal{T}_{\text{dis}} := \mathcal{P}(X)$. Llamamos **espacio indiscreto** a $(X, \mathcal{T}_{\text{ind}})$ y **espacio discreto** a $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$.

1.1. Interior y clausura

Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$, llamamos **interior** de S, $\text{int}S$ o $\mathring{S}$ al mayor abierto contenido en S, que es la unión de todos ellos, y **clausura** de S, $\text{cl}S$ o $\overline{S}$ al menor cerrado que lo contiene, que es la intersección de todos ellos. Así, $\mathring{S} \subseteq S \subseteq \overline{S}$, y S es abierto si y sólo si $S = \mathring{S}$ y cerrado si y sólo si $S = \overline{S}$.

Un **entorno** de $x \in X$ es un elemento de $\mathcal{E}(x) := \{U \in \mathcal{T} \mid x \in \mathcal{U}\}$. Entonces $x \in \mathring{S}$ si y sólo si existe un entorno de x contenido en S, y $x \in \overline{S}$ si y sólo si todo entorno de x interseca con S.

1.2. Espacios métricos

Una **distancia** en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y, z \in X$, $0 \leq d(x, y) = d(y, x) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Decimos entonces que (X, d) es un **espacio métrico**.

En $\mathbb{R}$ tenemos la distancia usual $d_u(x, y) := |x - y|$. Dado un espacio métrico en (X, d), definimos en X^n la distancia

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{n} d(x_k, y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $p \in \mathbb{N}^*$, y $d_\infty(x,y) := \max_{k=1}^n d(x_k,y_k)$. Llamamos **distancia Manhattan** o **del taxi** a d_1, **distancia euclídea** a d_2 y **distancia del ajedrez** a d_∞. Además, en un conjunto X definimos la **distancia discreta** como

$$d_D(x,y) := \begin{cases} 1 \text{si } x \neq y, \\ 0 \text{si } x = y. \end{cases}$$

Sean (X,d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\delta > 0$, llamamos **bola** (**abierta**) en la distancia d de centro x y radio δ a

$$B_d(x,\delta) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Llamamos **topología** (**métrica**) **inducida** por d en X a la topología $\mathcal{T}_d := \{A \in X \mid \forall x \in A, \exists \delta > 0 \mid B_d(x,\delta) \subseteq A\}$. Las bolas son abiertas en la topología inducida, por lo que en esta los abiertos son uniones de bolas.

La distancia discreta induce la topología discreta, y las distancias del taxi, euclídea y del ajedrez sobre $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual en $\mathbb{R}$ inducen una misma topología que llamamos **topología usual** en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). En $\mathbb{R}$, los abiertos de esta topología son las uniones de intervalos abiertos.

1.3. Subespacios topológicos

Dados un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ e $Y \subseteq X$, $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y\}_{U \in \mathcal{T}}$ es una topología sobre Y, la **topología del subespacio** o **inducida** sobre Y. Algunos subespacios topológicos importantes:

1. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. En este caso, la topología inducida por la usual es la discreta.
2. La n**-esfera**, $\mathbb{S}^n(r) := \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\}$.
3. El **plano agujereado** $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y el **espacio agujereado** $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
4. El **intervalo cerrado** $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ o el **cuadrado unidad** $I \times I \subseteq \mathbb{R}^2$.
5. El **cilindro**, $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, cono de rotación sobre el eje z de $\{(1,0,s)\}_{s \in [0,1]}$, esto es, $C = \{R_\theta(1,0,s)\}_{\theta \in [0,2\pi], s \in [0,1]}$ con

   $$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. El **toro**, $\mathbb{T} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4\sqrt{x^2+y^2} + 3 = 0\}$, cono de rotación sobre el eje z de $\{(x,0,z) \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$.
7. La **cinta de Möbius**, $M := \{(\cos\theta(3 - t\sin\frac{\theta}{2}), \sin\theta(3 - t\sin\frac{\theta}{2}), t\cos\frac{\theta}{2})\}_{\theta \in [0,2\pi], t \in [-1,1]}$. La idea es tener una varilla inicialmente paralela al eje Z a longitud 3 que va girando alrededor del eje a la vez que gira alrededor de su punto medio a la mitad de velocidad angular de forma perpendicular al eje.
8. El **grupo lineal general** $\mathcal{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, compuesto por las matrices invertibles, con la topología para $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dada por isomorfismo lineal con $\mathbb{R}^{n^2}$.

9. El **grupo ortogonal** $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$, formado por las matrices cuya inversa es su traspuesta.

10. El **grupo ortogonal especial** $\mathcal{SO}(n) \subseteq \mathcal{O}(n)$, formado por las matrices ortogonales con determinante 1.

1.4. Continuidad

Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $f : X \to Y$, o $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ si queremos resaltar la dependencia de las topologías, es **continua** si $\forall V \in \mathcal{T}_Y, f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Dados dos espacios topológicos X_1 y X_2 y $f : X_1 \to X_2$ continua, si $Y_1 \subseteq X_1$, $f|_{Y_1} : Y_1 \to X_2$ es continua, por lo que en particular la inclusión $i : Y_1 \to X_1$ es continua, y si $f(X_1) \subseteq Y_2 \subseteq X_2$, la **restricción del rango** $f' : X_1 \to Y_2$, dada por $f'(x) \coloneqq f(x)$, es continua. Además, si X_2 es un subespacio topológico de X', la **extensión de la imagen** $f' : X_1 \to X'$ es continua.

Son funciones continuas:

1. Las de forma $f : (X, \mathcal{T}_{\text{dis}}) \to Y$ o $f : X \to (Y, \mathcal{T}_{\text{ind}})$.

2. Las constantes.

3. La composición de aplicaciones continuas. No obstante, dadas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, que $g \circ f$ sea continua no significa que lo sean f y g, pues por ejemplo, si tomamos g constante, $g \circ f$ es continua aun si f es discontinua.

4. La **suma** $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $s(x, y) \coloneqq x + y$, con la topología usual.

5. El **producto** $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x, y) \coloneqq xy$, con la topología usual.

6. La **diagonal** $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $d(x) \coloneqq (x, \ldots, x)$, con la topología usual.

7. Una función $f : X \to \prod_{i \in I} Y_i$ es continua si y sólo si los componentes $f_i(x) \coloneqq f(x)_i$ lo son.

8. Los polinomios reales, con la topología usual.

9. El determinante $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

10. La inversa matricial $\text{inv} : \mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$.

11. La aplicación suprayectiva $f : \mathbb{S}^3 \to \mathcal{SO}(3)$ dada por

$$f(w, x, y, z) \coloneqq \begin{pmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy - wz) & 2(wy + xz) \\ 2(xy + wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix},$$

que asocia a $(\cos\theta, x, y, z) \in \mathbb{S}^3$ la rotación de ángulo 2θ alrededor de la recta $\langle(x, y, z)\rangle$.

12. La aplicación $f : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{SO}(3)$ dada por

$$f(x, y, z) \coloneqq \begin{pmatrix} 2x^2 - 1 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2 - 1 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2 - 1 \end{pmatrix},$$

que asocia a cada punto de la esfera la rotación de 180º alrededor de la recta que genera.

1.5. Base de una topología

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una **base** para $\mathcal{T}$ si $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} : A = \bigcup \mathcal{A}$, en cuyo caso llamamos **elementos básicos** a los elementos de $\mathcal{B}$. Vemos que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$ si y sólo si $\forall U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U$, y entonces, si $\mathcal{B}_Y$ es base de $\mathcal{T}_Y$, $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}_Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

Dadas dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ sobre X, decimos que $\mathcal{T}'$ es **más fina** o **más grande** que $\mathcal{T}$, y que $\mathcal{T}$ es **más gruesa** o **más pequeña** que $\mathcal{T}'$, si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Si la inclusión es estricta, decimos que $\mathcal{T}'$ es **estrictamente más fina** o **estrictamente más grande** que $\mathcal{T}$ y que $\mathcal{T}$ es **estrictamente más gruesa** o **estrictamente más pequeña** que $\mathcal{T}'$. $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son **comparables** si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ o $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases respectivas para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ sobre X, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ si y sólo si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}'$, si y sólo si $\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' : x \in B' \subseteq B$.

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **base** para una topología sobre X si $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$ y $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. En tal caso, llamamos **topología generada** por $\mathcal{B}$ a $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \mid x \in B \subseteq U\}$, y se tiene que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es una topología y $\mathcal{B}$ es base para $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Llamamos **topología del límite inferior**, $\mathcal{T}_{\ell i}$, a la topología $\mathcal{T}_{\ell i}$ generada por la base $\mathcal{B}_{\ell i} := \{[a, b)\}_{a,b \in \mathbb{R}; a<b}$. Para indicar que $\mathbb{R}$ está equipado con esta topología, escribimos $\mathbb{R}_{\ell i}$. Esta topología es estrictamente más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$.

1.6. Axiomas de numerabilidad

$(X, \mathcal{T})$ cumple el **segundo axioma de numerabilidad** o es **2A**$\mathbb{N}$ si $\mathcal{T}$ admite una base numerable. Ejemplos:

1. Si X es finito, toda topología es 2A$\mathbb{N}$, pues $\mathcal{T}$ es base finita de $\mathcal{T}$.
2. $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ es 2A$\mathbb{N}$ si y sólo si X es numerable, y $(X, \mathcal{T}_{\text{ind}})$ siempre es 2A$\mathbb{N}$.
3. $\mathbb{R}$ es 2A$\mathbb{N}$.
4. $\mathbb{R}_{\ell i}$ no es 2A$\mathbb{N}$.

Dados $(X, \mathcal{T})$ y $x \in X$, $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{E}(x)$ es una **base de entornos** de x si $\forall U \in \mathcal{E}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subseteq U$, en cuyo caso llamamos **entornos básicos** en x a los elementos de $\mathcal{B}_x$. $(X, \mathcal{T})$ satisface el **primer axioma de numerabilidad** o es **1A**$\mathbb{N}$ si todo $x \in X$ tiene una base de entornos numerable.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}_{\ell i}$.
2. Todo espacio métrico (X, d).
3. Todo espacio 2A$\mathbb{N}$.

Capítulo 2

Propiedades topológicas

Una propiedad de un espacio topológico es **hereditaria** si, cuando un espacio X la tiene, sus subespacios también. Por ejemplo, los axiomas $1\mathrm{A}\mathbb{N}$ y $2\mathrm{A}\mathbb{N}$ son hereditarios.

2.1. Conexión

Una **separación** de X es un par $\{U, V\}$ de abiertos disjuntos no vacíos cuya unión es X. X es **conexo** si no admite ninguna separación, si y sólo si los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados son el vacío y el total, y en caso contrario es **disconexo**, si y sólo si existe $A \subseteq X$ no vacío, abierto y cerrado. Un espacio discreto X es conexo si y sólo si $|X| \leq 1$, y uno indiscreto es siempre conexo.

Un espacio topológico X es conexo si y sólo si no existe una aplicación continua y sobreyectiva $X \to \mathbb{S}^0 = \{1, -1\}$.

2.1.1. Conexión en $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ es conexo, así como sus intervalos y $\mathbb{R}^n$.

Toda función continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tiene algún punto fijo.

Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, existe $x_0 \in [a, b]$ con $f(x_0) = 0$.

2.1.2. Subespacios conexos

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $Y \subseteq X$ es un **subespacio conexo** de X si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es conexo. Una **separación** de Y en X es un par $\{U, V\}$ de abiertos en X tal que $Y \subseteq U \cap V$, $U \cap Y, V \cap Y \neq \emptyset$ y $U \cap V \cap Y = \emptyset$. $Y \subseteq X$ es un subespacio conexo de X si y sólo si no existe ninguna separación de Y en X.

Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo, $f(X)$ también lo es. Por tanto la conexión es una propiedad topológica, pero no es hereditaria porque, por ejemplo, $[-1, 1]$ es conexo pero su subespacio $\{-1, 1\}$ no lo es.

Si $X \neq \emptyset$ es conexo e Y es discreto, toda función continua $X \to Y$ es constante, pues $f(X)$ debe ser conexo, y en particular toda función $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es constante.

Dada una separación $\{U, V\}$ de X, si $Y \subseteq X$ es un subespacio conexo de X, entonces $Y \subseteq U$ o $Y \subseteq V$. En efecto, si no fuera así, serían $U \cap Y, V \cap Y \neq \emptyset$, pero $Y \subseteq X = U \cap V$ y $U \cap V \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$, por lo que $\{U, V\}$ sería una separación de Y en $X\#$.

Como **teorema**, dado un subespacio conexo Y de X, todo Z con $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$ es conexo.

Como **teorema**, si $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una colección arbitraria de subespacios conexos de un espacio topológico X con $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$, entonces $Y := \bigcup_{i\in I} Y_i$ es conexo.

Criterio del peine: Dada una familia $\{Y_i\}_{i\in I}$ de subespacios conexos de X e $Y' \subseteq X$ conexo, si $\forall i \in I, Y' \cap Y_i \neq \emptyset$, $Y' \cup \bigcup_i Y_i$ es conexo.

Un espacio topológico es **totalmente disconexo** si sus únicos subconjuntos conexos no vacíos son los unipuntuales, como ocurre con los espacios discretos, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_{\ell i}$.

2.1.3. Ejemplos de conexión

1. La hipérbola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ no es conexa.
2. La esfera $\mathbb{S}^n$ es conexa si y sólo si $n \geq 1$.
3. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo para $n > 1$.
4. $\mathcal{GL}(3, \mathbb{R})$ y $\mathcal{O}(3, \mathbb{K})$ no son conexos.
5. $\mathcal{SO}(3)$ es conexo.

2.1.4. Componentes conexas

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, la relación en X dada por $x \sim y$ si y sólo si existe un subespacio conexo de X que contiene a x e y es de equivalencia, y sus clases de equivalencia son las **componentes conexas** de X.

Estas forman una partición de X en subespacios conexos **maximales**, pues todo subespacio conexo de X está en una componente conexa, con lo que la componente conexa que contiene un cierto $p \in X$ es la unión de todos los subespacios conexos que contienen a p. X es conexo si y sólo si tiene una única componente conexa. Las componentes conexas son cerradas en X, pues si A es una componente conexa, $\overline{A}$ es también conexo, pero como A es conexo maximal, $A = \overline{A}$.

2.1.5. Conexión por caminos

$(X, \mathcal{T})$ es **conexo por caminos** o **por arcos** si para $x, y \in X$, existe un camino que une x con y.

Todo espacio conexo por arcos es conexo. El recíproco no se cumple.

Como **teorema**, si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo por caminos, $f(X)$ también lo es.

Como **teorema**, si $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una colección de subespacios conexos por caminos de X y $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$, $Y := \bigcup_{i\in I} Y_i$ es conexo por caminos.

Dado un espacio vectorial E, $X \subseteq E$ es **convexo** si $\forall x, y \in X, [x, y] := \{(1-t)x + ty\}_{t\in[0,1]} \subseteq X$ y **estrellado** respecto a un $x_0 \in X$ si $\forall x \in X, [x_0, x] \subseteq X$. Todo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ estrellado o convexo es conexo por caminos.

2.2. Compacidad

Un **recubrimiento abierto** de $(X, \mathcal{T})$ es un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = X$, y entonces un **subrecubrimiento** de $\mathcal{A}$ es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $\bigcup \mathcal{B} = X$. X es **compacto** si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito. Así:

1. Todo espacio topológico finito es compacto.

2. Un espacio discreto es compacto si y sólo si es finito.

$Y \subseteq X$ es un **subespacio compacto** de X si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es compacto. Un **recubrimiento** de Y por subconjuntos de X es un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} \supseteq Y$, y un subrecubrimiento de $\mathcal{A}$ es un subconjunto $\mathcal{B}$ suyo con $\bigcup \mathcal{B} \supseteq Y$. Entonces Y es un subespacio compacto si y sólo si todo recubrimiento de Y por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.

Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$, si $f : X \to Y$ es continua y X es compacto, $f(X)$ es compacto.

Como **teorema**, todo cerrado de un compacto es compacto.

2.2.1. Compacidad en $\mathbb{R}^n$

El cubo unidad $[0, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto.

Sean $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es compacto.

Teorema de Heine-Borel: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

De aquí que, aunque la compacidad es una propiedad topológica, no es hereditaria. Además, como **teorema**, si X es compacto, toda aplicación continua $f : X \to \mathbb{R}$ alcanza sus extremos en X, esto es, existen $p, q \in X$ con $f(p) = \min_{x \in X} f(x)$ y $f(q) = \max_{x \in X} f(x)$. En particular, el **teorema de Bolzano** afirma que toda aplicación $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua alcanza sus extremos.

2.3. Axiomas de separación

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es:

- T_2 o **Hausdorff** si $\forall x, y \in X, (x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{E}(x), V \in \mathcal{E}(y) : U \cap V = \emptyset)$.

- T_1 si $\forall x, y \in X, (x \neq y \implies \mathcal{E}(x) \nsubseteq \mathcal{E}(y) \land \mathcal{E}(y) \nsubseteq \mathcal{E}(x))$.

- T_0 si $\forall x, y \in X, (x \neq y \implies \mathcal{E}(x) \neq \mathcal{E}(y))$.

Es claro que todo espacio T_2 es T_1 y todo espacio T_1 es T_0, pero los recíprocos no se cumplen. Ser Hausdorff es una propiedad hereditaria.

Todo espacio **metrizable** (generado por algún espacio métrico) es Hausdorff. $\mathbb{R}_{\ell i}$ es Hausdorff.

Un espacio X es T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado en X. En particular, todo subconjunto finito de un espacio T_1 es cerrado.

Sea X Hausdorff y $f : X \to X$ continua, $\text{fix} f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ es cerrado en X. En particular, si X es un espacio métrico, $\forall x \neq f(x), \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \cap \text{fix} f = \emptyset$.

Si $f : X \to Y$ es continua e inyectiva e Y es Hausdorff, X también lo es.

Como **teorema**, todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.

Capítulo 3

Homeomorfismos y construcciones topológicas

Un **homeomorfismo** es una biyección $f : X \to Y$ continua con inversa continua. Si existe, X e Y son **homeomorfos** ($X \cong Y$). Esta relación es de equivalencia. Una función $f : X \to Y$ es un **embebimiento** si su restricción de rango $\hat{f} : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

Algunos homeomorfismos:

1. Los isomorfismos lineales entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfismos.

2. Los intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre sí, al igual que los cerrados y acotados.

3. Las funciones $f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) := \tan(\frac{\pi}{2}x)$ y $g(x) := \frac{x}{1-x^2}$ son homeomorfismos.

4. Sea $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, la **proyección estereográfica**, que asigna a cada $x \in \mathbb{S}^n \setminus N$ el punto de corte de $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$ con la recta $\overrightarrow{Nx}$, es un homeomorfismo.

5. $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ y $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos.

6. El disco $\mathbb{D}^n := \overline{B}_{d_2}(0; 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $[-1, 1]^n$.

7. Dados dos espacios topológicos X e Y, si para cierto $x \in X$ y para todo $y \in Y$, $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$ no son homeomorfos, X e Y tampoco lo son.

Un **invariante topológico** es una propiedad que pueden tener espacios topológicos que se conserva por homeomorfismos, y que podemos usar para saber si dos espacios son o no homeomorfos. Como **teorema**, la conexión, la conexión por caminos, la compacidad, ser Hausdorff y los axiomas de numerabilidad 1A$\mathbb{N}$ y 2A$\mathbb{N}$ son invariantes topológicos. Así:

1. Un intervalo cerrado y uno abierto no son homeomorfos.

2. $\mathbb{S}^1$ y un intervalo (incluyendo $\mathbb{R}$) no son homeomorfos.

Una función $f : X \to Y$ es **abierta** si transforma abiertos de X en abiertos de Y, y es **cerrada** si transforma cerrados de X en cerrados de Y. Si f es biyectiva, f es abierta si y sólo si es cerrada, y es un homeomorfismo si y sólo si es continua y abierta.

Si $f : X \to Y$ es continua con X compacto e Y Hausdorff, f es cerrada. En particular, si además f biyectiva, es un homeomorfismo.

Un espacio Y compacto y Hausdorff es una **compactificación** de un subespacio $X \subseteq Y$ si $\overline{X} = Y$. Si $Y \setminus X$ es unipuntual, llamamos a este punto ∞ y decimos que Y es la **compactificación por un punto** de X. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^n$. Llamamos **esfera de Riemann** a $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

3.1. Uniones disjuntas

Llamamos **unión disjunta** de dos conjuntos X e Y a $X \amalg Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son espacios topológicos, definimos la topología $\mathcal{T}_{X \amalg Y} := \{U \subseteq X \amalg Y \mid \{x \mid (x, 0) \in U\} \in \mathcal{T}_X \wedge \{y \mid (y, 1) \in U\} \in \mathcal{T}_Y\}$.

Vemos que $f : X \amalg Y \to Z$ es continua si y sólo si lo son $f|_{X \times \{0\}}$ y $f|_{Y \times \{1\}}$, y que $f : Z \to X \amalg Y$ es continua si y sólo si $f|_{f^{-1}(X \times \{1\})}$ y $f|_{f^{-1}(Y \times \{0\})}$ lo son. Entonces:

1. Si H es un hiperplano de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \amalg \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \setminus H$.

2. $\mathcal{SO}(3) \amalg \mathcal{SO}(3) \cong \mathcal{O}(3)$.

Como **teoremas**:

1. X e Y son compactos si y sólo si lo es $X \amalg Y$.

2. X e Y son Hausdorff si y sólo si lo es $X \amalg Y$.

3. Si $X, Y \neq \emptyset$, $X \amalg Y$ es disconexo.

4. Si Z es disconexo, $Z \cong X \amalg Y$ para ciertos $X, Y \neq \emptyset$.

3.2. Espacios producto

Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, llamamos **topología producto** en $X \times Y$ a la generada por la base $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ y $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{S}^0$.

Como **teoremas**:

1. Las **proyecciones** $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ dadas por $\pi_1(a, b) := a$ y $\pi_2(a, b) := b$ son continuas.

2. Sean $a : X \to Y$ y $b : X \to Z$, $f : X \to Y \times Z$ dada por $f(x) := (a(x), b(x))$ es continua si y sólo si lo son a y b.

3. Para $k \in \{0, 1, 2\}$ y $X, Y \neq \emptyset$, $X \times Y$ es T_k si y sólo si lo son X e Y.

4. $X \times Y$ es conexo si y sólo si lo son X e Y.

5. $X \times Y$ es 1AN si y sólo si lo son X e Y.

6. $X \times Y$ es 2A$\mathbb{N}$ si y sólo si lo son X e Y.

Lema del tubo: Si Y es compacto, sea $W \subseteq X \times Y$ abierto con $\{x_0\} \times Y \subseteq W$ para cierto x_0, existe $U \in \mathcal{E}(x_0)$ tal que $U \times Y \subseteq W$.

Teorema de Tychonov: $X \times Y$ es compacto si y sólo si lo son X e Y. Por ejemplo, el cilindro $C \cong \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ y el toro $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son compactos.

3.3. Espacios cociente

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una relación de equivalencia $\sim$ en X, llamamos **topología cociente** en $X/\sim$ a $\{V \subseteq (X/\sim) \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$, donde $p : X \to X/\sim$ es la **proyección canónica** o **aplicación cociente** $p(x) \coloneqq \overline{x} \coloneqq [x]$ que a cada x le asigna su clase de equivalencia u **órbita**.

Toda aplicación cociente es continua, por lo que si X es compacto, conexo o conexo por caminos, $X/\sim$ también. Ser Hausdorff no se conserva, pues $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ es Hausdorff pero $(\mathbb{R} \amalg \mathbb{R})/\sim$ con $L(x) \sim L(y) :\iff x = y$, $R(x) \sim R(y) :\iff x = y$, $L(x) \sim R(y) :\iff x = y \neq 0$, no lo es.

Si $A \subseteq X$, llamamos $X/A \coloneqq X/\sim_A$ donde $a \sim_A b :\iff a = b \vee a, b \in A$. En el espacio cociente, llamamos $*$ a la clase A y a a la clase $\{a\}$ para cada $a \in X \setminus A$.

Ejemplos:

1. Sea $X \coloneqq \mathbb{D}^2$, $X/\partial X \cong \mathbb{S}^2$.
2. Para $n \geq 1$, sea $X \coloneqq [0,1]^n$, $X/\partial X \cong \mathbb{S}^n$.
3. Sean $X \coloneqq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y $x \sim y :\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : y = \lambda x$, $X/\sim$ es homeomorfo al plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$.

Además, sea $X \coloneqq [0,1] \times [0,1]$:

1. Si $(x, y) \sim (x', y') :\iff x - x' \in \mathbb{Z} \wedge y = y'$, $X/\sim$ es homeomorfo al cilindro.
2. Si $(x, y) \sim (x', y') :\iff (x, y) = (x', y') \vee (x - x' \in \{\pm 1\} \wedge y = 1 - y')$, $X/\sim$ es homeomorfo a la cinta de Möbius.
3. Si $(x, y) \sim (x', y') :\iff (x - x' \in \mathbb{Z} \wedge y = y') \vee (x = 1 - x' \wedge y - y' \in \{\pm 1\})$, $X/\sim$ es homeomorfo a la botella de Klein.

Como **teorema**, sean X e Y espacios topológicos, $\sim$ una relación de equivalencia en X y $g : X \to Y$ tal que $\forall x, y \in X, (x \sim y \implies g(x) = g(y))$, g induce una única función $f : X/\sim \to Y$ tal que $f \circ p = g$, y f es continua si y sólo si lo es g. Por tanto existe una biyección entre las funciones continuas $X/\sim \to Y$ y las funciones continuas $X \to Y$ constantes en las órbitas.

Una relación de equivalencia $\sim$ en $(X, \mathcal{T})$ es **abierta** si $\forall U \in \mathcal{T}, p^{-1}(p(U)) \in \mathcal{T}$. Entonces:

1. $\sim$ es abierta si y sólo si $p : X \to X/\sim$ es abierta.
2. Si $\sim$ es abierta y X es 2A$\mathbb{N}$, $X/\sim$ es 2A$\mathbb{N}$.
3. Si $\sim$ es abierta, $X/\sim$ es Hausdorff si y sólo si $\{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ es cerrado en $X \times X$.

Capítulo 4

Homotopías

Dos funciones $f,g:X\to Y$ son **homotópicas**, $f\simeq g$, si existe $F:X\times[0,1]\to Y$ continua tal que $\forall x\in X,(F(x,0)=f(x)\land F(x,1)=g(x))$, en cuyo caso F es una **homotopía**. De la continuidad de F se obtiene la de f y g, y si $\mathcal{C}(X,Y)$ es el espacio de las funciones continuas $X\to Y$, F es un camino en $\mathcal{C}(X,Y)$.

Lema del pegamiento: Sean $X:=A\cup B$ con A y B cerrados en X y $f:X\to Y$, si $f|_A$ y $f|_B$ son continuas con la topología de subespacio, f es continua.

La relación ser funciones homotópicas es de equivalencia, y llamamos $[X,Y]:=\mathcal{C}(X,Y)/\simeq$.

Sean X un espacio topológico e $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ un subespacio convexo, todas las funciones continuas $X\to Y$ son homotópicas. En particular $[X,Y]$ es unipuntual.

Sean $f,g:X\to Y$ y $h,j:Y\to Z$ funciones continuas, $F:X\times[0,1]\to Y$ una homotopía entre f y g y H una homotopía de h a j, entonces $(x,t)\mapsto H(F(x,t),t)$ es una homotopía de $h\circ f$ a $j\circ g$.

4.1. Equivalencia homotópica

Un subespacio $Y\subseteq X$ es un **retracto** de X si existe $r:X\to Y$ continua tal que $r|_Y=1_Y$, en cuyo caso r es una **retracción**. Y es un **retracto de deformación** de X si existe una retracción $r:X\to Y$ tal que $i\circ r\simeq 1_X$, donde $i:Y\to X$ es la inclusión, y es un **retracto fuerte de deformación** si podemos tomar r para el que exista una homotopía F de $i\circ r$ a 1_X tal que $\forall(y,t)\in Y\times[0,1],F(y,t)=y$.

Dos espacios X e Y son **homotópicamente equivalentes**, $X\simeq Y$, si existen $f:X\to Y$ y $g:Y\to X$ continuas con $g\circ f\simeq 1_X$ y $f\circ g\simeq 1_Y$, en cuyo caso llamamos **equivalencias homotópicas** a f y g.

Dado otro espacio Z, $\Phi:[X,Z]\to[Y,Z]$ dada por $\Phi([h]):=[h\circ g]$ es biyectiva con inversa $\Phi^{-1}([j])=[j\circ f]$, y $\Psi:[Z,X]\to[Z,Y]$ dada por $\Psi([h]):=[f\circ h]$ es biyectiva con inversa $\Psi^{-1}([j])=[g\circ j]$.

Si X e Y son homeomorfos, $X\simeq Y$.

El recíproco no se cumple:

1. La corona circular $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\in[0,1]\}$ es homotópicamente equivalente, pero no homeomorfa, a $\mathbb{S}^1$.

2. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es homotópicamente equivalente, pero no homeomorfo, a $\mathbb{S}^n$.

X es **contráctil** si es homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual, y es fácil ver que todo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo es contráctil.

Sean X e Y espacios topológicos con Y contráctil, todas las funciones continuas $X \to Y$ son homotópicas.

Todo espacio contráctil es conexo por caminos.

Un **invariante homotópico** es una propiedad que se conserva por equivalencias homotópicas. Son invariantes homotópicos:

1. La conexión.

2. La conexión por caminos.

La compacidad no es un invariante topológico. Tampoco lo es la propiedad Hausdorff.

4.2. Circunferencia

Una **aplicación recubridora** es una función $r : X \to Y$ sobreyectiva tal que para todo $x \in X$ existe $U \in \mathcal{E}(x)$ con $r : U \to r(U)$ homeomorfismo.

Sean un camino $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $e(\theta_0) = \alpha_0$, existe un único camino $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $e(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s)$ y $\tilde{\alpha}(0) = \theta_0$, llamado **levantamiento** de α a través de e determinado por la condición inicial θ_0.

Sean $r : X \to Y$ una aplicación recubridora, $\alpha : [0,1] \to Y$ un camino, $x_0 \in X$ e $y_0 \coloneqq r(x_0)$, existe un único camino $\tilde{\alpha} : [0,1] \to X$ tal que $\alpha = r \circ \tilde{\alpha}$ y $\tilde{\alpha}(0) = r_0$.

La **aplicación exponencial** es la aplicación recubridora $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $e(\theta) \coloneqq (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta))$.

Un **lazo** es un camino en el que el punto inicial y el final coinciden. Si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es continua, $\alpha_f \coloneqq f \circ e : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ es un lazo, y dado $\theta_0 \in e^{-1}\{f(1,0)\}$, sea $\tilde{\alpha}_f$ el levantamiento de α_f a través de e determinado por θ_0, $\theta_1 \coloneqq \tilde{\alpha}_f(1) \eqqcolon \theta_0 + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ que no depende de θ_0. Llamamos **grado** de f a $\deg f \coloneqq n = \tilde{\alpha}_f(1) - \tilde{\alpha}_f(0)$. Así:

1. Si f no es sobreyectiva (por ejemplo, si es constante), $\deg f = 0$.

2. $\deg 1_{\mathbb{S}^1} = 1$.

3. Si f es la **función antípoda**, $f(x) \coloneqq -x$, $\deg f = 1$.

4. Si $f(x,y) \coloneqq (x^2 - y^2, 2xy)$, $\deg f = 2$.

5. Dado $n \in \mathbb{Z}$, si $f(z) \coloneqq z^n$ en $\mathbb{C}$, $\deg f = n$.

6. Si $f(x,y) = (x,-y)$ o $f(x,y) = (-x,y)$, $\deg f = -1$.

Si $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ es continua y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ cumple $e(\theta_0) = F(0,0)$, existe una única $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua con $e(\tilde{F}(s,t)) = F(s,t)$ y $\tilde{F}(0,0) = \theta_0$.

$\mathbb{S}^1$ no es contráctil. Como **teorema**, $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ son homotópicas si y sólo si $\deg f = \deg g$.

Así, $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ es biyectivo con $\mathbb{Z}$.

4.3. Teorema del punto fijo de Brower

Si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es continua, $\deg f = 0$ si y sólo si f admite una extensión continua a $\mathbb{D}^2 := B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir, una función continua $\hat{f} : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ con $\hat{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

Así, no existe una retracción de $\mathbb{D}^2$ a $\mathbb{S}^1$, y por conexión tampoco existe una de $\mathbb{D}^1$ a $\mathbb{S}^0$. **Teorema del punto fijo de Brower:**

1. Toda $f : \mathbb{D}^1 \to \mathbb{D}^1$ continua tiene algún punto fijo.
2. Toda $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tiene un punto fijo.

4.4. Teorema de la bola peluda

Un **campo de vectores** sobre $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función continua $v : X \to \mathbb{R}^n$, y es **tangente** a x si para todo $x \in X$, existen un camino $\gamma : [a,b] \to X$ y $t_0 \in [0,1]$ tales que $\gamma(t_0) = x$ y $\gamma'(t_0) = v(x)$. Un $x \in X$ es un **punto estacionario** de v si $v(x) = 0$.

Como **teorema**, todo campo de vectores $v : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$, bien tiene un punto estacionario, bien existen $p, q \in \mathbb{S}^1$ tales que $v(p)$ apunta directamente hacia fuera de $\mathbb{D}^2$ y q apunta directamente hacia dentro.

Un campo de vectores tangente a $\mathbb{S}^2$ es una función continua $v : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $v(p) \in T_p\mathbb{S}^2 := \operatorname{span}\{p\}^\perp$ para cada $p \in \mathbb{S}^2$. **Teorema de la bola peluda:** Todo campo de vectores tangente a $\mathbb{S}^2$ tiene un punto estacionario.

Capítulo 5

El grupo fundamental

Dos caminos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ son **homotópicos por caminos**, $\alpha \simeq_p \beta$, si tienen el mismo punto inicial x, el mismo punto final y y existe $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que para $s, t \in [0,1]$, $F(s,0) = \alpha(s)$, $F(s,1) = \beta(s)$, $F(0,t) = x$ y $F(1,t) = y$, en cuyo caso F es una **homotopía de caminos**.

Llamamos $\mathcal{C}(X,x,y)$ $(x, y \in X)$ al conjunto de los caminos en X que unen x a y. Un camino α en X es un **lazo** si $\alpha(0) = \alpha(1)$, y llamamos $\mathcal{L}(X,x) := \mathcal{C}(X,x,x)$. Dos lazos α y β son **homotópicos** si son homotópicos por caminos.

La relación $\simeq_p$ es de equivalencia, y llamamos $\pi_1(X,x,y) := \mathcal{C}(X,x,y)/\simeq_p$ y $\pi_1(X,x) := \mathcal{L}(X,x)/\simeq_p$.

Dados $\alpha \in \mathcal{C}(X,x,y)$ y $\beta \in \mathcal{C}(X,y,z)$, llamamos **yuxtaposición** o **producto** de caminos a $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{C}(X,x,z)$ dado por

$$(\alpha \wedge \beta)(s) := \begin{cases} \alpha(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La operación $* : \pi_1(X,x,y) \times \pi_1(X,y,z) \to \pi_1(X,x,z)$ dada por $[\alpha] * [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$ está bien definida.

Propiedades:

1. Asociatividad.

2. Llamamos **camino constante** en x a $c_x \in \mathcal{L}(X,x)$ dado por $c_x(s) := x$. Entonces, si $\alpha \in \mathcal{C}(X,x,y)$, $[c_x] * [\alpha] = [\alpha] * [c_y] = [\alpha]$.

3. Llamamos **camino inverso** de $\alpha \in \mathcal{C}(X,x,y)$ a $\overline{\alpha} \in \mathcal{C}(X,y,x)$ dado por $\overline{\alpha}(s) := \alpha(1-s)$. Entonces $[\alpha] * [\overline{\alpha}] = [c_x]$ y $[\overline{\alpha}] * [\alpha] = [c_y]$.

De aquí que $(\pi_1(X,x), *)$ es un grupo, llamado **grupo fundamental** o **primer grupo de homotopía** de X relativo al **punto base** x, con neutro $[c_x]$ y $[\alpha]^{-1} = [\overline{\alpha}]$.

Dado $\alpha \in \mathcal{C}(X,x,y)$, $\hat{\alpha} : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ dada por $\hat{\alpha}([\gamma]) := [\overline{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$ es un isomorfismo de grupos. Así, si X es conexo por caminos, el grupo fundamental no depende del punto base, es decir, $\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$ para todo $x, y \in X$.

Dados $x, y \in X$, $\pi_1(X,x)$ es abeliano si y sólo si $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X,x,y)$.

5.1. Funciones homotópicas

Si $f : X \to Y$ cumple $f(x_0) = y_0$, escribimos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Entonces llamamos **homomorfismo inducido** por f relativo a x_0 a $(f_{x_0})_* := f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ dada por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. En efecto, si $\alpha \simeq_p \beta$ y $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ es una homotopía de caminos de α a β, entonces $f \circ F$ es una homotopía de caminos de $f \circ \alpha$ a $f \circ \beta$, y $f_*([\alpha] * [\beta]) = f_*([\alpha \wedge \beta]) = [f \circ (\alpha \wedge \beta)] = [(f \circ \alpha) \wedge (f \circ \beta)] = f_*([\alpha]) * f_*([\beta])$.

Propiedades:

1. $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x)}$.
2. Sean $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
   $(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_*([f \circ \alpha]) = (g_* \circ f_*)(\alpha)$.

Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es un homeomorfismo, f_* es un isomorfismo, luego el grupo fundamental es un invariante topológico salvo isomorfismos.

Sean $f, g : (X, x) \to (Y, y)$ continuas, f es **homotópica** a g con $x \to y$, $f \simeq_{x \to y} g$, si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \to Y$ de f a g tal que $\forall t \in [0,1], F(x,t) = y$.

Como **teorema**, si $f \simeq_{x \to y} g$, entonces $f_* = g_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$.

Una función $f : (X, x) \to (Y, y)$ es una **equivalencia homotópica** si existe $g : (Y, y) \to (X, x)$ tal que $g \circ f \simeq_{x \to x} 1_X$ y $f \circ g \simeq_{y \to y} 1_Y$, en cuyo caso (X, x) e (Y, y) son (**equivalentes**) **homotópicos**, $(X, x) \simeq (Y, y)$.

Como **teorema**, si $(X, x) \simeq (Y, y)$, entonces $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, y)$.

5.2. Espacios simplemente conexos

X es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x)$ es el grupo trivial para algún $x \in X$, y por tanto para todo $x \in X$. Escribimos $\pi_1(X, x) = 0$.

Todo espacio contráctil es simplemente conexo.

En particular, todo subespacio estrellado de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo, y por tanto también todo subespacio convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$.

Si X es simplemente conexo y $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X, x, y)$, entonces $\alpha \simeq_p \beta$.

5.3. Algunos grupos fundamentales

Sean $r : X \to Y$ una aplicación recubridora, $y_0 \in \mathbb{S}^1$ y $r(x_0) := y_0$, si para $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$ llamamos $\tilde{\alpha}$ al levantamiento de α por r con $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ y $\phi([\alpha]) := \tilde{\alpha}(1)$, llamamos **correspondencia del levantamiento** asociada a r a

$$\phi : \pi_1(Y, y_0) \to r^{-1}(y_0),$$

que está bien definida.

La correspondencia del levantamiento asociada a e es biyectiva.

Así, como **teorema**, el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.

Como **teorema**, sean $X = U \cup V$ con U, V y $U \cap V$ abiertos en X conexos por caminos y $x \in U \cap V$, todo $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ se expresa como producto de elementos de $\pi_1(U, x)$ o $\pi_1(V, x)$.

Teorema de Van Kampen especial, versión 1: Sea $X = U \cup V$ con U, V y $U \cap V \neq \emptyset$ abiertos en X conexos por caminos, si U y V son simplemente conexos, X también lo es.

Si $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa.

Además, $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para $n \neq 2$.

Sean G y H dos grupos, una **palabra** en G y H es una secuencia $s_1 \cdots s_n$ con cada $s_i \in G \amalg H$. **Reducir** una palabra es aplicarle sucesivamente las siguientes acciones hasta no poder aplicar ninguna:

1. Eliminar un elemento identidad de G o H de la secuencia.

2. Reemplazar una subsecuencia $s_k s_{k+1}$ con $s_k, s_{k+1} \in G$ o $s_k, s_{k+1} \in H$ por su producto.

El resultado de esto es una **palabra reducida**. El **producto libre** de G y H, $G * H$, es el conjunto de las palabras reducidas en G y H con la operación de concatenación seguida de reducción.

Teorema de Van Kampen especial, versión 2: Sean $X = U \cup V$ con U y V abiertos conexos por caminos y $U \cap V \neq \emptyset$ simplemente conexo, si $x_0 \in U \cap V$, entonces $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.

Dados dos espacios X e Y, $x \in X$ e $y \in Y$, llamamos **unión por un punto** de X e Y a $X \vee Y := (X \amalg Y)/\{x, y\}$. Si $Z = A \cup B$ con A y B cerrados en Z y $A \cap B = \{x_0\}$, decimos que $Z = A \vee B$.

La **figura ocho** es $E := \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, y $\pi_1(E) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Como **teorema**, el grupo fundamental de la figura ocho no es abeliano.

5.4. Cálculo de grupos fundamentales

Un **monomorfismo** es un homomorfismo inyectivo. Si $A \subseteq X$ es un retracto de X, la inclusión $i : A \to X$ induce un monomorfismo $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Como **teorema**, si $A \subseteq X$ es un retracto de deformación en X (por ejemplo, si $A = \mathbb{S}^n$ y $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$), la inclusión $i : A \to X$ induce un isomorfismo i_* entre los grupos fundamentales.

Ejemplos:

1. La figura ocho E es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$.

2. El **espacio theta**, $\theta := \mathbb{S}^1 \cup ([-1, 1] \times \{0\})$, es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$.

3. E no es un retracto de deformación de θ ni al revés.

Como **teorema**, $\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. En particular el grupo fundamental del toro, $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Como **teorema**, sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$, si E es conexo por caminos, la correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ es sobreyectiva, y si además E es simplemente conexo, ϕ es biyectiva.

Así, si $\mathbb{RP}^2$ es el plano proyectivo e $y \in \mathbb{RP}^2$, $\pi_1(\mathbb{RP}^2, y) \cong \mathbb{Z}_2$.

Una m**-variedad** es un espacio Hausdorff X tal que todo $x \in X$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$, aunque también se suele exigir que X sea 1AN. Una **curva** es una 1-variedad, y una **superficie** es una 2-variedad.

Ejemplos de superficies son $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{T}^2$, el **cilindro abierto** $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$, la banda de Möbius, la botella de Klein y el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ o $\mathbb{P}^2$.

Capítulo 6

El número de Euler

6.1. Complejos simpliciales

Los puntos $\{v_0,\dots,v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ son **afínmente independientes** o están en **posición general** si no están contenidos en ningún subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión menor que k, si y sólo si $\{v_1 - v_0, v_2 - v_1, \dots, v_k - v_{k-1}\}$ son linealmente independientes, si y sólo si $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ son linealmente independientes.

La **envoltura convexa** de un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$, $\text{conv}W$, es el menor conjunto convexo que contiene a W, la intersección de todos ellos. Si $W =: \{v_1,\dots,v_k\}$ con $k > 0$,

$$\text{conv}W = \left\{ t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} t_i = 1, t_i \in [0,1] \right\}.$$

$\subseteq$] El conjunto dado es un convexo que contiene a W, luego contiene a $\text{conv}W$.

$\supseteq$] Sea C un convexo que contiene a $\{v_0,\dots,v_k\}$, queremos ver que $[v_1,\dots,v_k] \subseteq C$. Sea $v := t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in [v_1,\dots,v_k]$. Si $k = 1$, esto es obvio. Sea $k > 1$ y supongamos probada la propiedad para $k-1$. Si $t_k = 1$, $v = v_k \in C$. En otro caso, $w := \frac{t_1}{1-t_k} v_1 + \dots + \frac{t_{k-1}}{1-t_k} v_{k-1} \in \text{conv}\{v_1,\dots,v_{k-1}\} \subseteq \text{conv}\{v_1,\dots,v_k\} \subseteq C$, luego $v = (1-t_k)w + t_k v_k \in C$.

Un **k-símplice** o **símplice k-dimensional** es la envoltura conexa de un conjunto de $k+1$ puntos $v_0,\dots,v_k$, llamados **vértices**, en posición general, $[v_0,\dots,v_k] := \text{conv}\{v_0,\dots,v_k\}$. Si $v := t_0 v_0 + \dots + t_k v_k \in [v_0,\dots,v_k]$ con cada $t_i \in [0,1]$ y $\sum_i t_i = 1$, llamamos **coordinadas baricéntricas** de v a los $(t_0,\dots,t_k)$.

Si $W := \{v_0,\dots,v_k\}$ determina un k-símplice $[v_0,\dots,v_k]$, todo subconjunto $A \subseteq W$ determina un símplice, y decimos que $\text{conv}A$ es un **subsímplice** de $\text{conv}W$. Un subsímplice es una **cara** si solo omite un vértice, y la unión de las caras es la **frontera** del símplice. Si $k > 0$, el **interior** de un k-símplice es el complementario de la frontera, y si $k = 0$, su **interior** es él mismo.

Un **complejo simplicial** es un **poliedro** $K \subseteq \mathbb{R}^n$ junto a una lista de símplices L tal que $K = \bigcup_i L_i$, cada $x \in K$ está en el interior de un único símplice y cada cara de cada L_i también está en la lista. La **dimensión** de K es la máxima dimensión de sus símplices.

Ejemplos:

1. Una **circunferencia simplicial** es un complejo formado por 3 0-símplices y 3 1-símplices, el borde de un triángulo.

2. Un **cuadrado simplicial** es un complejo formado por 4 0-símplices, 5 1-símplices y 2 2-símplices, un cuadrilátero.

3. Una **corona simplicial** es un complejo formado por 6 0-símplices, 12 1-símplices y 6 2-símplices, una corona de triángulo.

4. Un **toro simplicial** es un complejo formado por 9 0-símplices, 27 1-símplices y 18 2-símplices, una corona tridimensional de un triángulo donde cada sección de cada lado de la corona es un triángulo.

5. Un **tetraedro** es un complejo formado por 4 0-símplices, 6 1-símplices y 4 2-símplices.

6.2. Número de Euler

Si T es un complejo simplicial n-dimensional con i_k k-símplices para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, el **número** o **característica de Euler** de T es $\chi(T) := i_0 - i_1 + \cdots + (-1)^n i_n$. Así, la circunferencia, la corona y el toro tienen índice 0, y el cuadrado tiene índice 1.

Una **triangulación** de un espacio topológico X es un complejo simplicial $K \subseteq \mathbb{R}^n$ junto a un homomorfismo $H : K \to X$, y si existe, X es **triangulable**.

Así, $\mathbb{S}^1$ es triangulable al complejo formado por los puntos $(0, 2)$, $(\sqrt{3}, -1)$ y $(-\sqrt{3}, -1)$ y los 3 1-símplices entre ellos, al complejo formado por los 4 puntos $(\pm 2, \pm 2)$ y los 4 1-símplices entre ellos, con el homomorfismo $(x, y) \mapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\mathbb{S}^2$ es triangulable a un tetraedro.

Como **teorema**, si K y K' son triangulaciones de X, $\chi(K) = \chi(K')$.

Con esto, el **número de Euler** de un espacio triangulable X, $\chi(X)$, es el de cualquier complejo simplicial cuyo poliedro es homeomorfo a X, y es un invariante topológico.

6.3. Presentaciones poligonales

Sea $S := \overline{B_{d_1}}(0; 1)$. $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa a $\mathbb{D}^2/\sim$ con

$$x \sim y :\iff x = y \vee (x, y \in \mathbb{S}^1 \wedge y = \overline{x}),$$

donde $\overline{x}$ es el conjugado complejo de x, y también lo es a $S/\sim$ con

$$x \sim y :\iff x = y \vee (x, y \in \partial S \wedge y = \overline{x}).$$

$\mathbb{P}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^2/\sim$ con

$$x \sim y :\iff x = y \vee (x, y \in \mathbb{S}^1 \wedge x = -y),$$

y también lo es a $S/\sim$ con

$$x \sim y :\iff x = y \vee (x, y \in \partial S \wedge x = -y).$$

Una **presentación poligonal** es una expresión de la forma $\mathcal{P} \coloneqq \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$, donde S un conjunto finito de letras $\{a_1, \dots, a_n\}$ llamadas **aristas** y $W_1, \dots, W_k$ con $k \geq 1$ son palabras en $\{a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}^*$ con longitud mínima 2 llamadas **caras**. Una presentación poligonal $\mathcal{P}$ determina un espacio topológico $|\mathcal{P}|$ salvo isomorfismo, la **realización geométrica** de $\mathcal{P}$, de la siguiente forma:

1. Para cada palabra W_i, sea $n_i \coloneqq |W_i|$.

   a) Si $n_i \geq 3$, tomamos n_i vértices $v_{i1}, \dots, v_{in_i} \in \mathbb{R}^2$ no alineados de forma que todo $v_{ij} \in \partial\text{conv}\{v_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$; los n_i caminos $a_{i1}, \dots, a_{in_i}$ dados por $a_{ij} \coloneqq [v_{ij}, v_{i(j+1)}]$ entendiendo $v_{i(n_i+1)} = v_{i1}$, y el polígono $P_i \coloneqq \text{conv}\{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$.

   b) Si $n_i = 2$, tomamos dos vértices $v_{i1}, v_{i2} \in \mathbb{R}^2$ distintos; caminos a_{i1} de v_{i1} a v_{i2} y a_{i2} de v_{i2} a v_{i1} disjuntos (salvo en los puntos inicial y final), y $P_i \coloneqq \text{conv}\{a_{ij}(s)\}_{s\in[0,1]}^{j\in\{1,2\}}$.

2. Sea $W_i = e_{i1} \cdots e_{in_i}$. Tomamos el espacio topológico $X \coloneqq (P_1 \amalg \cdots \amalg P_k)/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o, para ciertos i, j, i', j', t, bien $e_{ij} = e_{i'j'}$, $x = a_{ij}(t)$ e $y = a_{i'j'}(t)$, bien $e_{ij} = e_{i'j'}^{-1}$ (o al revés), $x = a_{ij}(t)$ e $y = a_{i'j'}(1-t)$.

3. $|\mathcal{P}|$ es cualquier espacio homeomorfo al subespacio de X de los puntos que no tienen un entorno en X homeomorfo a un intervalo de $\mathbb{R}$.

Si $Y = |\mathcal{P}|$, $\mathcal{P}$ es una **presentación** (**poligonal**) de X. Si $\mathcal{P}$ tiene una sola cara, X es conexo. Ejemplos:

1. $\mathbb{S}^2 = |\langle a \mid aa^{-1} \rangle| = |\langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle|$.

2. $\mathbb{RP}^2 = |\langle a \mid aa \rangle| = |\langle a, b \mid abab \rangle|$.

3. $\mathbb{T}^2 = |\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle|$.

4. La botella de Klein $K = |\langle a, b \mid abab^{-1} \rangle|$.

Una **región poligonal** es un subespacio compacto de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es una concatenación de segmentos, llamados **aristas**. Si $P_1, \dots, P_k$ son regiones poligonales, $P \coloneqq P_1 \amalg \cdots \amalg P_k$ y $\sim$ es una relación de equivalencia en P que identifica cada arista de cada P_i con exactamente una arista de algún P_j (que puede ser la misma), entonces $P/\sim$ es una superficie compacta.

6.4. Orientación

Sean α un camino $\mathcal{C}^1$ cerrado sobre una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $e_1, e_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ campos de vectores unitarios tangentes a S tales que $e_1(s)$ es tangente a $\alpha(s)$ y $e_2(s)$ es perpendicular a $e_1(s)$. Entonces α **preserva la orientación** si la orientación de $e_1(1)$ y $e_2(1)$ es la misma que la de $e_1(0)$ y $e_2(0)$, e **invierte la orientación** en caso contrario.

Una superficie es **orientable** si todo camino $\mathcal{C}^1$ cerrado sobre ella preserva la orientación, y es **no orientable** en caso contrario. Para una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, S es orientable si y sólo si existe un campo unitario normal a S definido en todo S.

Por ejemplo, son orientables $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^1 \times (0,1)$ y $\mathbb{T}^2$, pero no lo son la banda de Möbius, la botella de Klein y $\mathbb{RP}^2$.

6.5. Suma conexa

Dadas dos superficies X e Y con subespacios respectivos X_0 e Y_0 y homeomorfos a un disco en $\mathbb{R}^2$, dado un homeomorfismo $h : \partial X_0 \cong \mathbb{S}^1 \to \partial Y_0 \cong \mathbb{S}^1$, llamamos **suma conexa** de X e Y, $X\sharp Y$, a $((X \setminus \mathring{X}_0) \amalg (Y \setminus \mathring{Y}_0))/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$, o bien $x \in X_0$ e $y \in Y_0$ con $y = h(x)$, o bien al revés. Como **teorema**, el grupo fundamental del **doble toro**, $\mathbb{T}\sharp\mathbb{T}$, no es abeliano.

Dadas dos superficies X e Y:

1. $X\sharp Y$ es una superficie.
2. $X\sharp Y$ es independiente de X_0 e Y_0 salvo por homeomorfismo.
3. $X\sharp Y$ es orientable si y sólo si lo son X e Y.
4. Si X e Y son triangulables, $X\sharp Y$ también lo es y $\chi(X\sharp Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2$.

Entonces:

1. $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.
2. $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$.
3. $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$.
4. Si $T_1, \dots, T_n$ son toros, $\chi(T_1\sharp \dots \sharp T_n) = 2 - 2n$.
5. Si $P_1, \dots, P_n$ son planos proyectivos, $\chi(P_1\sharp \dots \sharp P_n) = 2 - n$.

6.6. Clasificación de superficies

Dos presentaciones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son **topológicamente equivalentes** si $|\mathcal{P}_1| \cong |\mathcal{P}_2|$. Cada una de las siguientes transformaciones sobre una presentación, llamadas **transformaciones elementales**, produce otra presentación topológicamente equivalente:

1. **Reetiquetado**: Cambiar el nombre de una arista (el nuevo nombre no puede ser el de otra arista).
2. **Subdivisión**: Cambiar una arista a por aristas a_1 y a_2, y cambiar cada aparición de a por a_1a_2 y cada una de a^{-1} por $a_2^{-1}a_1^{-1}$.
3. **Consolidación**: Si a_1 aparece siempre seguida de a_2 y a_2^{-1} de a_1^{-1}, contando que la última letra de una palabra va seguida de la primera, cambiar las aristas a_1 y a_2 por a, cada aparición de a_1a_2 por a y cada una de $a_2^{-1}a_1^{-1}$ por a^{-1}.
4. **Reflejo** o **simetría**: $\langle S \mid a_1 \cdots a_m, \dots \rangle \Rightarrow \langle S \mid a_m^{-1} \cdots a_1^{-1}, \dots \rangle$.
5. **Rotación**: $\langle S \mid a_1 \cdots a_m, \dots \rangle \Rightarrow \langle S \mid a_2 \cdots a_m a_1, \dots \rangle$.
6. **Corte**: $\langle S \mid W_1W_2, \dots \rangle \Rightarrow \langle S, e \mid W_1e, e^{-1}W_2, \dots \rangle$.
7. **Pegado**: $\langle S, e \mid W_1e, e^{-1}W_2, \dots \rangle \Rightarrow \langle S \mid W_1W_2, \dots \rangle$.

8. **Doblado**: $\langle S, e \mid Wee^{-1}, \dots \rangle \Rightarrow \langle S \mid W, \dots \rangle$.

9. **Desdoblado**: $\langle S \mid W, \dots \rangle \Rightarrow \langle S, e \mid Wee^{-1}, \dots \rangle$.

Dadas superficies M_1 y M_2 con presentaciones poligonales respectivas $\langle S_1 \mid W_1 \rangle$ y $\langle S_2 \mid W_2 \rangle$ de una sola cara con S_1 y S_2 disjuntos, entonces $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$ es una presentación de $M_1 \sharp M_2$.

Como **teorema**, toda superficie compacta admite una presentación poligonal.

Teorema de clasificación: Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una esfera, una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos.

Con esto, dos superficies compactas son homeomorfas si y sólo si tiene el mismo número de Euler y la misma orientabilidad.

El **género** de una superficie compacta M, o el número de **agujeros**, es

$$g(M) := \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(M)), & M \text{ orientable;} \\ 2 - \chi(M), & M \text{ no orientable.} \end{cases}$$

Tenemos $g(\mathbb{S}^2) = 0$, $g(\mathbb{T}^2) = 1$ y $g(\mathbb{RP}^2) = 1$, luego si $T_1, \dots, T_n$ son toros, $g(T_1 \sharp \dots \sharp T_n) = n$, y si $P_1, \dots, P_n$ son planos proyectivos, $g(P_1 \sharp \dots \sharp P_n) = n$.